PHẦN I - KIẾN THỨC CƠ BẢN

I . Một số bất đẳng thức cần nhớ:

$$a^2 \geq 0; \ |a| \geq 0; \quad -|b| \leq b \leq |b|$$

- Bất đẳng thức Cô sy:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n} \text{ Với } a_i > 0$$

dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

- Bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\left(a_2{}^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right).\left(x_1^2 + x_2^2 + ... +_n^2\right) \geq \left(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n\right)^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra <=> $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = ... = \frac{a_n}{x_n}$

- Bất đẳng thức Trê- bư-sép:

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \frac{aA + bB + cC}{3} \leq \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

II - Một số bất đẳng thức phụ đã được chứng minh là đúng.

- $x^2 + y^2 \geq 2xy$
- $x^2 + y^2 \geq |\ xy\ |$ dấu(=) khi x = y = 0
- $(x+y)^2 \geq 4xy$
- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{b+c}\quad (Khi\ b,c>0)$$

- $\frac{1}{b}+b\geq 2\quad (khi\, x>0)$

$$\frac{1}{bc}\geq\frac{4}{(b+c)^2}\quad (Khi\, x,y>0)$$

III □ Các bất đẳng thức trong tam giác

IV □ Các hàm lượng giác thông dụng

V □ Các tính chất cơ bản

Tính chất 1: a > b <=> b < a

Tính chất 2: a > b và b > c => a > c

Tính chất 3: a > b <=> a + c > b + c

Hệ quả : a > b <=> a - c > b — c

a + c > b <=> a > b — c

Tính chất 4 : a > c và b > d => a + c > b + d

a > b và c < d => a - c > b — d

Tính chất 5 : a > b và c > 0 => ac > bd

a > b và c < 0 => ac < bd

Tính chất 6 : a > b > 0 ; c > d > 0 => ac > bd

a > b > 0 => $a^n > b^n$

a > b <=> $a^n > b^n$ với n lẻ .

VI □ Các hằng đẳng thức đáng nhớ

VII □ Các kiến thức về toạ độ vec tơ

VIII □ Các kiến thức về tính chất của tỉ lệ thức:

$$\frac{a}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}\quad \forall a,b,c\in R^+$$

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}\quad \forall a,b,c,d\in R^+$$

PHẦN II CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Các phương pháp chứng minh Bất đẳng thức vô cùng đa dạng ở đây tôi xin trình bày những dạng phương pháp thông dụng nhất như sau:

Dạng 1 Dựa vào định nghĩa và các phép biến đổi tương đương

Dạng 2 Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky và các bất đẳng thức phụ.

Dạng 3 Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy

Dạng 4 Chứng minh bằng phản chứng

Dạng 5 Phương pháp lượng giác

Dạng 6 Phương pháp chứng minh qui nạp

Dạng 7 Phương pháp áp dụng các tính chất của các dãy tỉ số bằng nhau

Dạng 8 Phương pháp dùng tam thức bậc hai

Dạng 9 Phương pháp dùng tính chất bắc cầu

Dạng 10 - Phương pháp dùng các bất đẳng thức trong tam giác

Dạng 11 Phương pháp đổi biến số

Dạng 12 Phương pháp làm trội (chứng minh bất đẳng thức có n số hạng)

Dạng 1- Dựa vào định nghĩa và các phép biến đổi tương tương đương

Đây là phương pháp cơ bản nhất, dựa vào các tính chất cơ bản của bất đẳng thức đơn giản để biến đổi các bất đẳng thức phức tạp của đề ra thành các bất đẳng thức đơn giản và đúng hoặc các bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng. Ở phần này các bạn chú ý đến các hằng đẳng thức:

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\geq 0$
- $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2\geq 0$

Phương pháp:

- *Khi biến đổi tương đương ta cố gắng làm xuất hiện các điều kiện đã cho trong giả thiết nhằm áp dụng được điều kiện của giả thiết để chứng minh được bất đẳng thức đó là đúng.*
- *Chuyển vế để chứng minh bất đẳng thức đó (* $\leq 0; \geq 0; < 0; > 0$ *)*
- *Chuyển vế các thừa số về dạng hằng đẳng thức để dể chứng minh*
- *Làm xuất hiện các tích các thừa số có chứa các yếu tố của đề bài để ta xét dấu các thừa số đó*
- *Chia nhỏ từng vế để chứng minh sau đó cộng vế theo vế các bất đẳng thức con để được điều phải chứng minh.*

Một số ví dụ:

Ví dụ 1:

Chứng tỏ rằng với $\forall a,b\geq 0$ thì:

$$(ax+by)(bx+ay)\geq (a+b)^2xy \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow abx^2 + a^2xy + b^2yx + bay^2 \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy$

$\Leftrightarrow ab(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0$

$\Leftrightarrow ab(x-y)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức luôn đúng vì $\forall a, b \geq 0$.

Ví dụ 2:

Cho $0 < a \leq b \leq c$ Chứng minh rằng:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$

Giải

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c} = \frac{1}{abc}(a^2c + b^2a + c^2b - b^2c - c^2a - a^2b)$$

$$= \frac{1}{abc}\left[(a^2c - b^2c) + (b^2a - a^2b) + (c^2b - c^2a)\right]$$

$$= \frac{1}{abc}\left[c(a^2 - b^2) + ab(b-a) + c^2(b-a)\right]$$

$$= \frac{1}{abc}(b-a)(ca - cb + ab + c^2)$$

$$= \frac{1}{abc}(b-a)(c-b)(c-a) \geq 0$$

Vì $0 < a \leq b \leq c$.

Vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$

Ví dụ 3:

Với $a, b, c > 0$ chứng minh:

$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c})$

Giải

$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq 2(bc+ac-ba)\quad (do\ \ abc>0)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2bc-2ac+2ab\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)^2\geq 0$ Hiển nhiên đúng.

Vậy $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})$.

<u>Ví dụ 4</u>: Chứng minh rằng mọi a,b,c,d thì :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+1\geq a+b+c+d\ \ (1)$$

<u>Giải</u>

(1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+1-(a+b+c+d)\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(a^2-a\right)+(b^2-b)+(c^2-c)+(d^2-d)+1\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2+(d-\frac{1}{2})^2\geq 0$

Vậy : $a^2+b^2+c^2+d^2+1\geq a+b+c+d$

<u>Ví du 5</u>: Chứng minh rằng nếu: $a+b\geq 2$ thì $a^3+b^3\leq a^4+b^4$ (1)

<u>Giải</u>

(1) $\Leftrightarrow a^4+b^4-a^3-b^3\geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a-1)+b^3(b-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a-1)+b^3(b-1)-(a-1)-(b-1)+(a-1)+(b-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-1)+(b-1)(b^3-1)+a+b-2\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+a+1)+(b-1)^2(b^2+b+1)+a+b-2\geq 0$

Suy ra điều phải chứng minh.

Vì:

$$(a-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)^2(a^2+a+1) > 0$$
$$(b-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow (b-1)^2(b^2+b+1)$$
$$a+b \geq 2 \qquad \Leftrightarrow a+b-2 \geq 0$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho a + b = 2. Chứng minh rằng: $a^4+b^4 \geq 2$

Bài 2:Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$$

Bài 3: Chứng minh $\forall$m,n,p,q ta đều có

$$m^2+n^2+p^2+q^2+1 \geq m(n+p+q+1)$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4)$

Bài 5: Chứng minh bất đẳng thức : $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ Trong đó : a > 0 , b > 0

Bài 6: Chứng minh rằng: Với mọi số dương a, b, c, d ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}$$

Dạng 2 – Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpsky và các bất đẳng thức phụ

Đây là phương pháp phổ biến nhất trong việc chứng minh Bất đẳng thức. Chúng ta dựa vào điều kiện đã cho ở đề bài để ta lựa chọn phương pháp cho thích hợp. Ngoài ra, ta cần phải chú ý đến dấu của BĐT để có thể sử dụng bất đẳng thức nào để chứng minh. Khi áp dụng các BĐT đã được chứng minh là đúng thì bạn nên tách nhỏ BĐT cần chứng minh ra thành các vế nhỏ sau đó cộng vế theo vế để được BĐT cần chứng minh.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x,y,z ta có:

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

Giải

$$3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow x+y+z \le \sqrt{3(x^2+y^2+z^2}$$

$$\bullet x^2+y^2+z^2 \le 3\sqrt[3]{xyz^2}$$

$$\bullet xy+yz+zx \ge 3\sqrt[3]{xyz^2}$$

Do đó ta có:

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \le \frac{xyz((\sqrt{3}+1)\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(3\sqrt[3]{xyz^2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{3}\frac{\sqrt[3]{xyz}}{\sqrt{\sqrt[3]{xyz}}} \le \frac{\sqrt{3}+1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

Dấu "=" xảy ra khi x=y=z

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $1994^{2000} + 1995^{2000} < 1996^{2000}$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow (\frac{1994}{1995})^{2000} + 1 < (\frac{1996}{1995})^{2000} = (1+\frac{1}{1995})^{2000}$$

Theo bất đẳng thức Becnuli ta có:

$$(1\frac{1}{1995})^{2000} > 1+\frac{2000}{1995} > 1+(\frac{1994}{1995})^{2000}$$

Vì: $\frac{2000}{1995} > 1 > (\frac{1994}{1995})^{2000}$

Ví dụ 3:

Cho $a + b = 2$ Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 \geq 2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 4số 1,1,a,b ta có:

$$(1.a + 1.b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \leq a^2 + b^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 4số 1,1,a^2,b^2 ta có:

$$(1.a^2 + 1.b^2) \leq (1^2 + 1^2)(a^4 + b^4)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq (a^2 + b^2) \leq 2(a^4 + b^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \leq 2(a^4 + b^4)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4 + b^4 \geq 2$$

Ví dụ 4: Cho a,b,c>0 Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a + b + c}$

Giải

Ta có:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 9$$

Vì : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2$$

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$$

Nên: $3+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\leq 9$

<u>Ví dụ 5</u>: Cho 4 số dương a,b,c,d chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+d}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

<u>Giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức phụ:

$$\frac{1}{xy}\geq\frac{1}{(x+y)^2}\qquad (x,y>0)$$

Ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}=\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}\geq 4\frac{a^2+c^2+ad+bc}{(a+b+c+d)^2}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}\geq 4\frac{b^2+d^2+ab+cd}{(a+b+c+d)^2}$$

Cộng vế theo vế ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+d}+\frac{d}{a+b}\geq 4\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd}{(a+b+c+d)^2}$$

Ta chứng minh:

$$4\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd}{(a+b+c+d)^2}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd\geq 2(a+b+c+d)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-4ac-4bd\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2+(b-d)^2\geq 0$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho x,y,z thoã mãn $x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le\frac{4}{3}$

Chứng minh rằng: $x+y+z\le 4$

Bài 2: Cho a>b>c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{1}{2}$$

Bài 3: Cho x , y là 2 số thực thoả mãn $x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$

Chứng minh rằng : $3x + 4y \le 5$

Bài 4: Cho a, b, c ≥ 0 ; $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$$

Bài 5:Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác, p là nửa chu vi.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\le\sqrt{3p}\quad(1)$$

Bài 6: Cho a, b,c là 3 số khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Bài 7 Cho ba số $a,b,c>0$ .Thoả mãn $ab+bc+ca=abc$

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}\quad(*)$$

Dạng 3 □ Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Đây là phương pháp chứng minh BĐT mà học sinh THCS dễ nhận dạng để chứng minh đó là sử dụng Bất đẳng thức Cauchy . Ta cần phải chú ý đến dấu của BĐT để *có thể sử dụng bất đẳng thức nào để chứng minh. Khi áp dụng các BĐT đã được chứng minh là đúng thì bạn nên tách nhỏ BĐT cần chứng minh ra thành các vế nhỏ sau đó cộng vế theo vế để được BĐT cần chứng minh.*

Ví dụ 1: Cho 3 số dương a,b,c chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Giải

Vận dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+1\geq 3\frac{a}{b}\quad(1)$$

$$\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+1\geq 3\frac{b}{c}\quad(2)$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}+1\geq 3\frac{c}{a}\quad(3)$$

Cộng vế theo vế (1) (2) và (3) ta có:

$$2\left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\right)+3\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

$$\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+3$$

Vậy: $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

Ví dụ 2: Cho a,b,c >0 thoả mãn $\frac{1}{1+a}>\frac{1}{1+b}>\frac{1}{1+c}\geq 2$

Chứng minh rằng: $abc>\frac{1}{8}$

Giải

Ta có: $$\frac{1}{1+a} \geq 1-\frac{1}{1+b}+1-\frac{1}{1+c}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(1+b)(1+c)}}$$
$$\frac{1}{1+a} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(1+a)(1+c)}}$$

$$\frac{1}{1+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(1+a)(1+b)}}$$

Nhân lại ta được: $$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}$$

Ví dụ 3: Giả sử a,b,c d, là 4 số dương thoã mãn:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d} \geq 3$$

Chứng minh rằng: $abcd \leq \frac{1}{81}$

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{1}{1+a}-1+\frac{1}{1+b}-1+\frac{1}{1+c}-1+\frac{1}{1+d}-1 \geq 3-4$$
$$\Rightarrow \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+a}+\frac{c}{1+a}+\frac{d}{1+a} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{a(1+b)+b(1+a)}{(1+a)(1+b)} + \frac{c(1+d)+d(1+c)}{(1+c)(1+d)}$$
$$= \frac{a+b+2ab}{1+a+b+ab} + \frac{c+d+2cd}{1+c+d+cd}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1 \geq \frac{2\sqrt{ab}+2ab}{1+2\sqrt{ab}+ab} + \frac{2\sqrt{cd}+2cd}{1+2\sqrt{cd}+cd} = \frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{cd}}{1+\sqrt{cd}}$$
$$\Rightarrow 1 \geq 2\left[2\sqrt{\frac{\sqrt{abcd}}{1+\sqrt{ab}+\sqrt{cd}+\sqrt{abcd}}}\right] = 4\frac{\sqrt[4]{abcd}}{1+\sqrt{ab}+\sqrt{cd}+\sqrt{abcd}}$$
$$\Rightarrow 1 \geq \frac{4\sqrt[4]{abcd}}{1+2\sqrt[4]{abcd}+\sqrt{abcd}} = \frac{4\sqrt[4]{abcd}}{\sqrt{(1+\sqrt[4]{abcd})^2}}$$
$$\Rightarrow 1+\sqrt[4]{abcd} \geq 4\sqrt[4]{abcd}$$
$$\Rightarrow 1 \geq 3\sqrt[4]{abcd}$$
$$\Rightarrow abcd \leq \frac{1}{8}$$

Bài tập áp dung:

Bài 1: Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ với $a,b,c > 0$

Bài 2: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác với chu vi 2p

Chứng minh rằng:

a) $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$

b) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 3: Cho $a, b, c \geq 0$; $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} < 3,5$$

Bài 4:Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh và 2p là chu vi của một tam giác.

Chứng minh rằng:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$$

Dạng 4 □ Chứng minh bằng phản chứng

Đây là phương pháp chứng minh BĐT dựa vào các phương pháp chứng minh phản chứng trong Toán học. Để chứng minh mệnh đề A đúng thì ta giả sử mệnh đề A sai và chứng minh rằng từ mệnh đề A sai ta suy ra một điều mâu thuẩn để kết luận A là đúng. Muốn chứng minh bất đẳng thức $A \ge B$ đúng, ta giả sử $A \ge B$ sai, tức là $A < B$ đúng, từ đó chứng minh những lập luận chính xác ta suy ra điều mâu thuẩn từ giả thiết. Kết luận $A \ge B$ đúng. Điều vô lý có thể là trái với giả thiết, hoặc là những điều trái ngược nhau , từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng.
Một số hình thức chứng minh bằng phản chứng:

- *Dùng mệnh đề đảo.*
- *Phủ định rồi suy ra điều trái với giả thiết.*
- *Phủ định rồi suy ra trái với điều đúng.*
- *Phủ định rồi suy ra hai điều trái ngược nhau.*

Một số ví du:

Ví dụ 1: Cho $a, b, c, d \in R$ và $a + b = 2cd$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đây là đúng

$$c^2 \ge a, d^2 \ge b$$

Giải

Giả sử hai bất đẳng thức trên đều sai, có nghĩa ta được :

$$c^2 < a \text{ và } d^2 < b$$

$$\Rightarrow c^2 - a < 0 \text{ và } d^2 - b < 0$$

$$\Rightarrow c^2 - a + d^2 - b < 0$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 - (a + b) < 0$$

$$\Rightarrow c^2 + d^2 - 2cd < 0$$

Vì a+b =2cd

$$\Rightarrow (c - d)^2 < 0 \quad \text{Mâu thuẫn}$$

Nên sẽ có ít nhất một trong hai bất đẳng thức đã cho là đúng

Ví dụ 2: Cho 3 số dương a,b,c nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$$a(2 - a) > 1$$

$$b(2 - b) > 1$$

$$c(2 - c) > 1$$

Giải

Giả sử các bất đẳng thức sau đều đúng, nhân ba đẳng thức lại ta được

$$a(2 - a)b(2 - c)c(2 - c) > 1$$

Mà $0 \le a(2 - a) = 2a - a^2 = 1 - (a - 1)^2 \le 1$

Tương tự ta có:

$$0 \le b(2 - b) \le 1$$

$$0 \le c(2 - c) \le 1$$

Suy ra:

$$abc(2 - a)(2 - b)(2 - c) \le 1$$

Mâu thuẫn

Vậy có ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là sai

Ví dụ 3: Cho 6 số tự nhiên khác 0 nhỏ hơn 108. Chứng minh rằng có thể chọn được 3 trong 6 số đó, chẳng hạn a,b,c sao cho a<bc, b<ca, c<ab

Giải

Giả sử 6 số tự nhiên khác 0 là $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_6 \le 108$

Rõ ràng $a_2 \geq 2;\ a_3 \geq 3$ Với 3 số x,y,z thoả mãn $1 \leq x \leq y \leq z$

Ta luôn có x<yz và y<xz. Nếu trong các số a_1, a_2 ,…, a_6 không có 3 số nào thoã mãn a<b<c và c<ab thì có $a_4 \geq a_2a_3 = 6,$

$$a_5 \geq a_4a_3 \geq 6.3 = 18$$

$$a_6 \geq a_5a_4 \geq 18.6 = 108$$

Trái với giả thiết a_6 <108. Vậy phải có 3 số a,b,c thoã mãn a<bc; b<ca; c<ab

Ví dụ 4: Cho các số thực a,b,c thoã mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a+b+c>0 & (1) \\ ab+bc+ca>0 & (2) \\ abc>0 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: a,b,c >0

Giải

Giả sử trong 3 số thực a,b,c đã cho có một số âm hay bằng 0, giả sử số đó là $a \leq 0$ mà không làm mất đi tính tổng quát của bài toán. Ta có:

$$\begin{cases} abc>0 \\ a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ bc \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ b>0 \\ c<0 \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq 0 \\ b<0 \\ c>0 \end{cases}$$

Xét khả năng $a \leq 0;\ b>0;\ c<0 \ \Rightarrow a+c<0$

Ta có:

$$(1): a+b+c>0 \ \Leftrightarrow b>-(a+c) \ \Leftrightarrow (a+c)b<-(a+c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+c)b+ca < -(a+c)^2+ac = -(a^2+ac+c^2)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca<0$$

Vì : $(a^2+ac+c^2>0 \ \ \forall a,b,c \in R)$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy 3 sô a,b,c đều là số dương.

Bài tập áp dụng:

Bài 1:

Cho $0 < a,b,c < 1$.Chứng minh rằng ít nhất có một bất đẳng thức sau đây là sai:

$$a(1-b) > \frac{1}{4};\quad b(1-c) > \frac{1}{4};\quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

Kết quả này mâu thuẩn với kết quả của giả thiết đã nêu ra ở trên.

Vậy ít nhất phải có một bất đẳng thức sai.

Bài 2:

Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_{25}$ thoả mản điều kiện

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9.$$

Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó, tồn tại hai số bằng nhau.

Dạng 5 □ Phương pháp lượng giác

Đây là một trường hợp đặc biệt của phương pháp đổi biến số. Đối với học sinh THCS thì việc sử dụng phương pháp này là khá mới vì kiến thức cơ bản của phần lượng giác chưa được nghiên cứu sâu. Cho nên ở phương pháp này tôi xin trình bày một số kiến thức lý thuyết và các dạng phương pháp một cách chi tiết hơn.

Kiến thức cần nhớ:

1. Các hệ thức cơ bản

+ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

+ $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$

+ $tg\alpha \cdot cotg\alpha = 1$ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

+ $1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi)$

2. Công thức cộng, công thức hạ bậc, công thức nhân đôi, công thức biến tích thành tổng và công thức biến tổng thành tích. Chúng ta dựa vào các trương hợp dưới đây để có thể đổi biến lượng giác một cách chính xác.

Một số phương pháp lượng giác thường gặp:

- Nếu thấy $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$
- Nếu thấy $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ thì đặt $\begin{cases} x = a\sin\alpha \\ y = a\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$
- Nếu thấy $|x| \le 1$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = \sin\alpha \;\; khi \;\; \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = \cos\alpha \;\; khi \;\; \alpha \in [0; \pi] \end{array}\right.$
- Nếu thấy $|x| \le m$ ($m \ge 0$) thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = m\sin\alpha \;\; khi \;\; \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x = m\cos\alpha \;\; khi \;\; \alpha \in [0; \pi] \end{array}\right.$
- Sử dụng công thức: $1 + tg2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \quad (\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi)$
- Nếu $|x| \ge 1$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - 1}$

  thì đặt $x = \frac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$
- Nếu $|x| \ge m$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - m^2}$

  thì đặt $x = \frac{m}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$
- Sử dụng công thức $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

– Nếu $x \in R$ và bài toán chứa $(1+x^2)$ thì đặt $x = tg\alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

– Nếu $x \in R$ và bài toán chứa (x^2+m^2) thì đặt $x = mtg\alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Ví dụ 1: Cho $a, b, c, d \in R$ Với $a = c\sqrt{1-d^2}$ Và $b = d\sqrt{1-c^2}$

Chứng minh rằng $|a| + |b| \leq 1$

Giải

Với: $a = c\sqrt{1-d^2}$ Và $b = d\sqrt{1-c^2}$ Ta có:

$$\begin{cases} 1-d^2 \geq 0 \\ 1-c^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 \leq 1 \\ c^2 \leq 1 \end{cases} \begin{cases} -1 \leq d \leq 1 \\ -1 \leq c \leq 1 \end{cases}$$

Do đó ta đặt: $|d| = \cos\beta$ và $|c| = \cos\alpha$ với $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow |a| = |c|\sqrt{1-d^2} = \cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\beta} = \cos\alpha\sin\beta$$

Và $|b| = |d|\sqrt{1-c^2} = \cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \cos\beta\sin\alpha$

$$\Rightarrow |a| + |b| = \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha$$

$$= \sin(\beta+\alpha) \leq 1$$

Vậy: $|a| + |b| \leq 1$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng:

$$\frac{(1-x^2)\sin a + 2x\cos a}{1+x^2} \leq 1 \quad \forall x, a \in R$$

Giải

Đặt $x = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ Với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ Thì

$$\frac{(1-x^2)\sin a + 2x\cos a}{1+x^2} = \frac{(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})\sin a + 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos a}{(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin a + 2\sin\alpha\cos\alpha\cos a}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$= \cos 2\alpha \sin a + \sin 2\alpha \cos a$$

$$= \sin(a+2\alpha) \le 1$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ và n là số nguyên lớn hơn 1 thì ta có bất đẳng thức:

$$(1+x)^n + (1-x)^n < 2^n$$

Giải :

Vì: $|x| < 1$ nên ta đặt $x = \cos t$ với

$t \in (-\pi; \pi)$

$$\Rightarrow (1+x)^n + (1-x)^n = (1+\cos t)^n + (1-\cos t)^n$$

$$= (2\cos^2\frac{t}{2})^n + (2\sin^2\frac{t}{2})^n$$

$$\Leftrightarrow 2^n\left[(\cos^2\frac{t}{2})^n + (\sin^2\frac{t}{2})^n\right] \le 2^n \quad (1)$$

Do $\begin{cases} 0 < \cos^2\frac{t}{2} < 1 \\ 0 < \sin^2\frac{t}{2} < t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{t}{2} > (\cos^2\frac{t}{2})^n \\ \sin^2\frac{t}{2} > (\sin^2\frac{t}{2})^n \end{cases}$

$$\Rightarrow 1 > (\cos^2\frac{t}{2})^n + (\sin^2\frac{t}{2})^n$$

$\Rightarrow (1)$ đúng

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng: $\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\left[\sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3}\right] \le 2\sqrt{2} + \sqrt{2-2a^2}$ (1)

Giải:

Từ đk |a| ≤ 1 nên

Đặt a=cosα với $\alpha \in [0,\pi] \Rightarrow \sqrt{1-a} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}; \sqrt{1+a} = \sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}; \sqrt{1-a^2} = \sin\alpha$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.2\sqrt{2}\left[\cos^3\frac{\alpha}{2} - \sin^3\frac{\alpha}{2}\right] \le 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \le 1 + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha \le 1 \text{ đúng} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1:

Cho $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0$. Chứng minh rằng:

$$A = \left|a^2 - b^2 + 2\sqrt{3}ab - 2(1+2\sqrt{3})a + (4-2\sqrt{3})b + 4\sqrt{3} - 3\right| \le 2$$

Bài 2: Cho a, b thoả mãn : $|5a + 12b + 7| = 13$

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 2(b-a) \ge -1$

Bài 3:

Chứng minh rằng: $\sqrt{3} - 2 \le A = 2\sqrt{3}a^2 + 2a\sqrt{1-a^2} \le \sqrt{3} + 2$

Bài 4:

Chứng minh rằng $A = \left|\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a}\right| \le 2 \quad \forall |a| \ge 1$

Bài 5:

Chứng minh rằng: - 4 ≤ A = $\dfrac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2} \le 9 \quad \forall |a| \ge 1$

Bài 6:

Chứng minh rằng: $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}+\dfrac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \ge \dfrac{|c-a|}{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}} \quad \forall a,b,c$

Bài 7:

Chứng minh rằng: $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)(b+d)}$ (1) $\forall a,b,c,d>0$ (1)

Bài 8:

Chứng minh rằng: $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \le \dfrac{1}{2} \ \forall\ a, b \in R$

Dạng 6 □ Phương pháp chứng minh qui nạp

Phương pháp qui nạp thường sử dụng để chứng minh một bất đẳng thức phụ thuộc vào số nguyên dương n. Ta thực hiện các bước sau:

- *Kiểm nghiệm để chứng tỏ BĐT đúng với điều kiện nhỏ nhất.*
- *Giả sử BĐT đúng với một số nguyên dương k bất kỳ*
- *Cần chứng minh BĐT cũng đúng với n = k + 1*

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $2^n > 2n+1$ Với mọi số dương $n \ge 3$

Giải:

Với n=3 thì $2^3 = 8 > 2.3+1 = 7$ đúng

Giả sử bất đẳng thức đúng với n=k bất kì có nghĩa là:

$$2^k > 2k+1 \Rightarrow 2.k.2 \ge (2k+1).2$$

Ta cần chứng minh:

$$2^{k+1} > 2(k+1)+1$$

Theo gt quy nạp ta có:

$$2^{k+1} \geq (2k+1)2 = 4k+2 = 2k+2k+2 > 2(k+1)+1$$

Điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 2</u>**:** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

Ta có:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

<u>Giải:</u>

a. Với n=2 ta có:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24} \text{ đúng}$$

Giả sử với n=k ta có: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$$

Ta có:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2} = \left(\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

Vì :

$$\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

Nên:

$$\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1} = \frac{13}{24} \text{ đúng.}$$

<u>Ví dụ 3:</u> Chứng minh bất đẳng thức Côsi trong trường hợp tổng quát.

Với $a_1, a_2 \ldots a_n \in R_n, n \geq 2$ thì

$$\frac{a_1+a_2...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$

Giải:

- Với $n=2$ bất đẳng thức đả được chứng minh ở 1. *(bất đẳng thức Ơclit)*

Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^{n-1} < x_2^{n-1}$. $\forall x_1, x_2 \in R^+$

Vậy $\forall x_1, x_2 \in R^+$ thì ta luôn có (chuyển một bộ phận sang vế phải, ta được)

$$(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) \geq 0$$
$$x_1^n + x_2^n \geq x_1x_2^{n-1} + x_2x_1^{n-1}.$$

Lấy n số thực không âm $x_1, x_2 ... x_n \in R^+$, viết các bất đẳng thức tương ứng rồi cộng lại ta được:

$$\begin{aligned}
&(x_1^n + x_2^n) + (x_1^n + x_3^n) + ... + (x_1^n + x_n^n) + \\
&+(x_2^n + x_3^n) + ... + (x_2^n + x_n^n) + ... + (x_{n-1}^n + x_n^n) \\
&\geq (x_1x_2^{n-1} + x_2x_1^{n-1}) + \\
&+(x_1x_3^{n-1} + x_3x_1^{n-1}) + ... + (x_1x_n^{n-1} + x_nx_1^{n-1}) + ... \\
&+(x_{n-1}x_n^{n-1} + x_nx_{n-1}^{n-1}) \quad (1)
\end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}
&(n-1)(x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n) \geq x_1(x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + ... + x_n^{n-1}) \\
&+x_2(x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + ... + x_n^{n-1}) + x_n(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + ... + x_{n-1}^{n-1}) \quad (2)
\end{aligned}$$

Bây giờ theo giả thiết quy nạp, ta thừa nhận rằng đối với $n-1$ số thực không âm bất kì , trung bình cộng không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng. Thế thì nói riêng ta có:

$$x_2^{n-1}+x_3^{n-1}+...+x_n^{n-1}\geq(n-1)x_2x_3...x_n$$

$$x_1^{n-1}+x_3^{n-1}+...+x_n^{n-1}\geq(n-1)x_1x_3...x_n$$

□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□

$$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+...+x_{n-1}^{n-1}\geq(n-1)x_1x_2...x_{n-1}$$

Sử dụng các bất đẳng thức này, ta có thể tăng cường các bất đẳng thức (2)

$$(n-1)(x_1^n+x_2^n+...+x_n^n)\geq n(n-1)x_1x_2...x_n)$$

Trong hệ thức này đặt $x_1^n=a_1,x_2^n=a_2,...x_n^n=a_n$ ta được

$$\frac{a_1+a_2...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$$ (đpcm)

Trong tất cả quá trình lý luận trên, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$x_1=x_2=...=x_n$ tức là khi và chỉ khi $a_1=a_2=...=a_n$

Một số bài tập:

Bài 1:

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\quad\forall n\in N;n>1\qquad(1)$$

Bài 2:

Cho $n\in N$ và a+b > 0. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leq\frac{a^n+b^n}{2}$ (1)

Bài 3: Cho a,b là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông với c là cạnh huyền

Chứng minh rằng: $a^{2n} + b^{2n} \le c^{2n} \quad \forall n \in N$

Dạng 7 - Phương pháp áp dụng các tính chất của các dãy tỉ số bằng nhau

Đây là phương pháp đặc trưng cho học sinh THCS vì phương pháp này áp dụng các tính chất của dãy tỉ số bằng nhau đã được học ở lớp 7. Các tính chất đặc biệt thường gặp trong loại này ta cần lưu ý như:

Kiến thức:

$$\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c} \quad \forall a,b,c \in R^+$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d} \quad \forall a,b,c,d \in R^+$$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Cho 3 số dương a,b,c chứng minh rằng $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Giải:

Vì: $\frac{a}{a+b} < 1$ nên: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$

Tương tự:

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho a,b,c,d là các số dương, chứng minh rằng:

$$A = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$$

Giải:

Vì: $\frac{a+b}{a+b+c}<1$ nên $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$

Tương tự:

$$\frac{b+c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d}$$
$$\frac{c+d}{a+b+c+d}<\frac{c+d}{c+d+a}<\frac{c+d+b}{a+b+c+d}$$
$$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d}$$

Cộng lại ta được 2<A<3. Suy ra A không thể là số nguyên .

Bài tập áp dung:

Bài 1:

Cho a, b, c, d > 0 . Chứng minh rằng:

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{a}{d+a+b}<2$$

Bài 2:

Cho a;b;c;d là các số nguyên dương thỏa mãn : a + b = c + d =1000

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$.

Bài 3:

Cho: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và b,d > 0 . Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

Dạng 8 □ Phương pháp dùng tam thức bậc hai

Kiến thức:

Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$

Nếu $\Delta<0$ thì $a.f(x)>0 \qquad \forall x\in R$

Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) > 0$ $\quad \forall x \neq -\frac{b}{a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì $a.f(x) > 0$ $\quad$ với $x < x_1$ hoặc $x > x_2$ $\quad (x_2 > x_1)$

$a.f(x) < 0$ $\quad$ với $x_1 < x < x_2$

Một số ví du:

Ví du 1: Chứng minh rằng: $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0$ Với mọi giá trị của x,y.

Giải:

Đặt: $\quad f(x) = x^2 - (2y-1)2x + 5y^2 - 6y + 3$

$\Delta' = (2y-1)^2 - 5y^2 + 6y - 3$

$\Delta' = -y^2 + 2y - 2$

Ta có: $\quad (\delta') = 1 - 2 = -1$

$(\delta') < 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ \forall y \in R \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ \forall x, y \in R \end{cases}$

Ví du 2: Cho hai dãy số: $a_1, a_2, \ldots a_n$

$B_1, b_2, \ldots b_n$

Chứng minh rằng: $(\sum_1^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_1^n a^2{}_i)(\sum_1^n b^2{}_i) \quad (1)$

Giải:

Ta có: $\quad (1) \Leftrightarrow \quad (\sum_1^n a_i b_i) - (\sum_1^n a^2{}_i)(\sum_1^n b^2{}_i) \leq 0 \quad (2)$

Đặt: $\quad f(x) = (\sum_1^n a^2{}_i)X^2 - 2(\sum_1^n a_i b_i)X + (\sum_1^n b^2{}_i)$

Ta có: $\quad f(X) = \sum_1^n (a_i X - b_i)^2 \geq 0$ Với mọi X nên tam thức (X) có $\Delta' \leq 0$

Suy ra: $(\sum_{1}^{n} a_i b_i)^2 - (\sum_{1}^{n} a^2{}_i)(\sum_{1}^{n} b^2{}_i) \le 0$

Tức là (2) đúng nên (1) đúng.

Ví dụ 3: $\forall x, y \in R$, chứng mih bất đẳng thức sau:

$$x^2y^4 + 2(x^2+2)y^2 + 4xy + x^2 \ge 4xy^3 \quad (1)$$

Giải:

(1) $\Leftrightarrow$ $(y^2+1)^2x^2 + 4y(1-y^2)x + 4y^2 \ge 0$

Đặt $F(x) = (y^2+1)^2x^2 + 4y(1-y^2)x + 4y^2$

$$\Delta' = 4y^2(1-y^2)^2 - 4y^2(y^2+1)^2$$

$$\Delta' = -16y^2$$

$$\begin{cases} \Delta' \le 0 \\ \forall y \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ \forall x, y \in R \end{cases}$$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Cho a,b,c,d thoã mãn b < c < d.

Chứng minh rằng $(a+b+c+d)^2 > 8(ac+bd)$ (1)

Bài 2: Cho các số a , b , c , d , p , q sao cho:

$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$

Chứng minh rằng:

$(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \le (pq - ac - bd)^2$ (1)

Dạng 9 □ Phương pháp dùng tính chất bắc cầu

Đây là phương pháp chứng minh bất đẳng thức sử dụng tính chất bắc cầu trong Toán học.

Chẳng hạn: $a > b$ *và* $b > c$ *thì* $a > c$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1:

Cho a, b, c ,d >0 thỏa mãn a > c+d , b >c+d. Chứng minh rằng: ab >ad+bc

Giải

Ta có: $\begin{cases} a > c+d \\ b > c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c > d > 0 \\ b-d > c > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (a-c)(b-d) > cd

$\Leftrightarrow$ ab — ad — bc + cd > cd

$\Leftrightarrow$ ab > ad + bc điều phải chứng minh.

Ví dụ 2:

Cho a,b,c>0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$

Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$

Giải

Ta có :(a + b — c)^2= a^2+ b^2 + c^2 + 2(ab — ac — bc) > 0

$\Rightarrow$ ac + bc - ab $\langle \frac{1}{2}$(a^2 + b^2 + c^2)

$\Rightarrow$ ac + bc — ab $\leq \frac{5}{6} \langle$ 1 Chia hai vế cho abc > 0 ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\langle \frac{1}{abc}$

Ví dụ 3:

Cho $0<a,b,c<1$. Chứng minh rằng:

$2a^3+2b^3+2c^3<3+a^2b+b^2c+c^2a$

Giải

Do a < 1 $\Rightarrow$ $a^2<1$ và

Ta có $(1-a^2).(1-b)<0$ $\Rightarrow$ 1- b - a^2 + a^2b > 0

$\Rightarrow 1+a^2b^2 > a^2$ + b

mà $0 < a,b < 1 \Rightarrow a^2 > a^3,\ b^2 > b^3$

Từ đó ta suy ra $1 + a^2b^2 > a^3 + b^3$

Vậy $a^3 + b^3 < 1 + a^2b^2$

Tương tự ta có: $b^3 + c^3 \le 1 + b^2c$

Và $c^3 + a^3 \le 1 + c^2a$

Cộng các bất đẳng thức ta có: $2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \le 3 + a^2b + b^2c + c^2a$

Ví dụ 4:

Cho $0 \le x, y, z \le 1$ Chứng minh rằng:

a. $0 \le x + y + z - xy - yz - zx \le 1$

b. $x^2 + y^2 + z^2 \le 1 + x^2y + y^2z + z^2x$

Giải

a. Ta có: $x + y + z - xy - yz - zx = x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \ge 0$ (1)

Mặt khác: $(1-x)(1-y)(1-z) = 1 - x - y + xy + yz + zx - xyz \ge 0$

Suy ra: $x + y + z - xy - yz - zx \le 1 - xyz \le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $0 \le x + y + z - xy - yz - zx \le 1$

b. Ta chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 - x^2y - y^2z - z^2x \le 1$

Ta có: $$x^2 + y^2 + z^2 - x^2y - y^2z - z^2x = x^2(1-y) + y^2(1-z) + z^2(1-x)$$
$$\le x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)$$

Vì ($x^2 \le x, y^2 \le y, z^2 \le z$)

$\le x + y + z - xy - yz - zx \le 1$ (theo câu a).

Bài tập áp dụng:

Bài 1:

Cho $0 < a,b,c,d < 1$. Chứng minh rằng:

$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1 - a - b - c - d$

Bài 2:

Cho $0 \le a,b,c \le 2$ thoả mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2 \le 5$$

Bài 3:

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$$

Bài 4:

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2$$

Dạng 10 □ Phương pháp dùng các bất đẳng thức trong tam giác

Đây là phương pháp sử dụng các bất đẳng thức trong tam giác làm các giả thiết để chứng minh các bất đẳng thức.

Ở phương pháp chứng minh này các bạn nên chú ý một số kiến thức cơ bản sau:

Kiến thức:

1. Các bất đẳng thức trong tam giác:

Với a, b, c là 3 cạnh của một tam giác thì $a,b,c>0$

$$|b-c|<a<b+c$$
$$|a-c|<b<a+c$$
$$|a-b|<c<a+b$$

Nếu $a>b>c$ thì số đo của 3 góc A, B, C cũng đúng với bất đẳng thức trên.

2. Công thức liên quan đến tam giác

$$p=\frac{a+b+c}{2}\Rightarrow\begin{cases}p-a=\dfrac{b+c-a}{2}\\ p-b=\dfrac{c+a-b}{2}\\ p-c=\dfrac{a+b-c}{2}\end{cases}$$

Một số ví du:

Ví dụ 1:

Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$a^3+b^3+c^3+2abc<a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\quad(1)$

Giải

Ta có:

$$(1)\begin{aligned}&\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+2abc-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)<0\\&\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)+c(2ab-a^2-b^2)-c^2(a+b-c)<0\\&\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2-c(a-b)^2-c^2(a+b-c)<0\\&\Leftrightarrow (a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)<0\quad(2)\end{aligned}$$

Kết quả (2) luôn đúng vì trong tam giác ta luôn có.

$$\begin{cases}a+b>c\\a+c>b\\b+c>a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b-c>0\\a+c-b>0\\b+c-a>0\end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Ví dụ 2:

Cho a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng:

a. $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$
b. abc>(a + b - c).(b + c - a)(c + a - b)

Giải

Vì a, b, c là số đo 3 cạnh của tam giác nên ta có

$$\begin{cases}0<a<b+c\\0<b<a+c\\0<c<a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2<a(b+c)\\b^2<b(a+c)\\c^2<c(a+b)\end{cases}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$a^2+b^2+c^2< 2(ab+bc+ac)$

Ta có $a>|b-c| \Rightarrow a^2>a^2-(b-c)^2>0$

$b>|a-c| \Rightarrow b^2>b^2-(c-a)^2>0$

$c>|a-b| \Rightarrow c^2>c^2-(a-b)^2>0$

Nhân từng vế của đẳng thức lại ta được:

$$\Rightarrow a^2b^2c^2>\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right]$$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2>(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

$$\Rightarrow abc>(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

<u>Ví dụ 3:</u>

Trong Δ ABC có chu vi a + b +c = 2p (a, b, c là độ dài 3 cạnh).

CMR : $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

<u>Giải</u>

Ta có : $p-a=\frac{b+c-a}{2}>0$ (vì b + c > a bất đẳng thức tam giác)

Tương tự : p - b > 0 ; p- c > 0.

Mặt khác : p - a + p - b = 2p - a - b = c

p - b + p - c = a

p - c + p - a = b

ta áp dụng tính chất của Bất đẳng thức: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\geq\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{c}$$

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq\frac{4}{a}$$

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\geq\frac{4}{b}$$

Cộng theo vế của bất đẳng thức ta có :

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Dấu '=' xảy ra khi Δ ABC đều

Ví dụ 4:

Cho a, b, c , là độ dài ba cạnh của một tam giác

(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) $\leq$abc

Giải

Bất đẳng thức về ba cạnh của tam giác :

$|b-c|<a\Rightarrow 0<a^2-(b-c)^2\leq a^2$

$|c-a|<b\Rightarrow 0<b^2-(c-a)^2\leq b^2$

$|a-b|<c\Rightarrow 0<c^2-(a-b)^2\leq c^2$

Từ đó $\left|a^2-(b-c)^2\right|\left|b^2-(c-a)^2\right|\left|c^2-(a-b)^2\right|\leq a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow$ (a + b — c)(a — b + c)(b — c +a)(b + c — a)(c — a + b)(c + a — b) $\leq a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow$ (a + b — c)^2(b + c — a)^2(c + a — b)^2 $\leq a^2b^2c^2$

$\Leftrightarrow$ (a + b — c)(b + c — a)(c + a — b) $\leq$abc

Vì a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$$\begin{cases} a+b-c>0 \\ a+c-b>0 \\ b+c-a>0 \end{cases} \text{ và abc} > 0$$

Bài tập áp dụng: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác

Bài 1:

Chứng minh rằng:

Nếu với $a \le b \le c$ thì $(a+b+c)^2 \le 9bc$

Bài 2:

Chứng minh rằng:

$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \le abc$

Bài 3:

Chứng minh rằng: Với mọi p, q sao cho p + q = 1 thì $pa^2 + qb^2 > pqc^2$

Bài 4:

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác với a < b < c. Chứng minh rằng:

$a^3(b^2-c^2) + b^3(c^2-a^2) + c^3(a^2-b^2) < 0$

Bài 5:

Chứng minh rằng: với a, b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì ta có:

$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a+b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$ (1)

Dạng 11 □ Phương pháp đổi biến số

Khi ta gặp một số bất đẳng thức có biến phức tạp thì ta có thể dùng phương pháp đổi biến số để đưa các bất đẳng thức cần chứng minh về dạng đơn giản hơn, tức là ta đặt các biến mới biểu thị được các bién cũ sao cho biến mới có thể gọn hơn hoặc dễ chứng minh hơn. Sau khi đổi biến số ta sử dụng các phương pháp chứng minh ở trên để chứng minh bất đẳng thức.

Phương pháp lượng giác cũng là một dạng của phương pháp đổi biến số.

Một số ví dụ:

Ví dụ 1:

Cho a,b,c > 0 Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ (1)

Giải

Đặt x=b+c ; y=c+a ;z= a+b ta có a=$\frac{y+z-x}{2}$; b = $\frac{z+x-y}{2}$; c =$\frac{x+y-z}{2}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\geq 3$$

$$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\geq 6$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì ($\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$; $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2$; $\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$) điều phải chứng minh.

Ví dụ 2:

Cho a,b,c > 0 và a+b+c < 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9 \quad (1)$$

Giải

Đặt x = a^2+2bc ; y = b^2+2ac ; z = c^2+2ab

Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$ Với x+y+z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$x+y+z \ge 3.\sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

$$\Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$$

Mà x+y+z < 1

Vậy $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge 9$ điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 3:</u>

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

<u>Giải</u>

Đây là ví dụ 1 nhưng ta sử dụng cách đổi biến khác:

Ta đặt $\begin{cases} x=b+c \\ y=c+a \\ z=a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{y+z-x}{2} \\ b=\frac{x+z-y}{2} \\ c=\frac{x+y-z}{2} \end{cases}$

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right) \ge \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) \ge 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{x}.\frac{x}{z}}=6$ (đúng).

Vậy Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

<u>Ví dụ 4:</u>

Cho các số thực dương a, b, c sao cho abc = 1

Chứng minh rằng:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

Giải

Do $abc=1$ nên ta có thể đặt: $\begin{cases} a=\dfrac{x}{y} \\ b=\dfrac{y}{z} \\ c=\dfrac{z}{x} \end{cases}$ với $x,y,z>0$.

Nên bất đẳng thức ta có thể viết lại như sau:

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\le 1$$

$\Leftrightarrow xyz\ge(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$ (Ta đã chứng minh được)

Vậy BĐT đã được chứng minh. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài tập áp dụng:

Bài 1:

Chứng minh rằng ; với mọi số thực x, y ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{4}\le\frac{(x^2-y^2)(1x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}\le\frac{1}{4}$$

Bài 2:

Cho x, y, z là các số dương thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$

CMR: $\dfrac{1}{2x+y+z}+\dfrac{1}{x+2y+z}+\dfrac{1}{x+y+2z}\le 1$

(Đại học khối A — năm 2005)

Bài 3:

Cho a, b, c l□ các số thực dương thoả mãn abc=1 .

CMR : $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$

Bài 4:

Cho x, y, z >0 thoả mãn $x+y+z=1$. CMR $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geq 36$

Bài 5:

Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn: $xyz=x+y+z+2$.

CMR: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$

Dạng 12 - Phương pháp làm trội (chứng minh bất đẳng thức có n số hạng)

Dùng các tính bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

Phương pháp chung để tính tổng hữu hạn : $S = u_1+u_2+....+u_n$

Ta cố gắng biến đổi số hạng tổng quát u_k *về hiệu của hai số hạng liên tiếp nhau*

$u_k=a_k-a_{k+1}$

Khi đó : $S = \left(a_1-a_2\right)+\left(a_2-a_3\right)+....+\left(a_n-a_{n+1}\right)=a_1-a_{n+1}$

Phương pháp chung về tính tích hữu hạn:

$P = u_1u_2....u_n$

Biến đổi các số hạng u_k *về thương của hai số hạng liên tiếp nhau:*

$u_k=\frac{a_k}{a_{k+1}}$

Khi đó $P = \frac{a_1}{a_2}.\frac{a_2}{a_3}.....\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_1}{a_{n+1}}$

Một số ví dụ:

Ví dụ 1:

Chứng minh rằng: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$ Với n là số nguyên

Giải:

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

Khi cho k chạy từ 1 đến n ta có

$$1>2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}>2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

□□□□□□

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

Ví dụ 2:

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2 \quad \forall n\in Z$

Giải:

Ta có $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k\left(k-1\right)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

Cho k chạy từ 2 đến n ta có

$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

....

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$

Vậy $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$

<u>Ví dụ 3:</u>

Chứng minh rằng:

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} - 1 \quad , \forall n \in Z^+$

<u>Giải:</u>

Ta có:

$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} \le \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \quad \forall k \in Z^+$

Do đó:

$1 = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \le 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \le 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

.....

$\frac{1}{\sqrt{n}} \le 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

Vậy:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\le 1-2+2\sqrt{n}=2\sqrt{n}-1$$

Ví dụ 4:

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{\sqrt{2n+1}}\ ,\forall n\in Z^{+}$$

Giải:

Ta có:

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}.\frac{3^2}{4^2}.\frac{5^2}{6^2}...\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}$$

$$<\frac{1^2}{2^2-1}.\frac{3^2}{4^2-1}....\frac{(2n-1)^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$$

Vậy: $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{\sqrt{2n+1}}$.

Bài tập áp dụng:

Bài 1:

Chứng minh BĐT sau:

a. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b. $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$