GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

I. KIẾN THỨC CƠ SỞ:

1. $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \dfrac{A \mp B}{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}$, với mọi A, B lớn hơn 0 và A khác B.

2. $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B} = \dfrac{A \mp B}{\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{A.B} + \sqrt[3]{B^2}}$, với mọi A, B.

3. $\sqrt[4]{A} \pm \sqrt[4]{B} = \dfrac{A \mp B}{(\sqrt[4]{A} \mp \sqrt[4]{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}$, với mọi A, B lớn hơn 0 và A khác B.

II. NỘI DUNG:

1. Phương pháp liên hợp trực tiếp:

*** Phương pháp chung:** Ta phát hiện trong phương trình có ngay dấu hiệu liên hợp

Ví dụ 1: Giải phương trình sau: $\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 3x$ (1)

**** Phân tích:*** Ta để ý hiệu của hai biểu thức trong căn bằng 6x, do đó ta sẽ nghĩ ngay đến nhân liên hợp.

Lời giải:

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 3x$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x + 5 - 2x^2 - 3x - 5}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5}} = 3x$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5}} = 3x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 5} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = 2 \qquad (2)$$

Đến đây ta kết hợp phương trình (1) và (2), ta được:

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x^2-3x+5}=3x+2\\&\Leftrightarrow x=4\end{aligned}$$

Ta thay x = 4 vào phương trình thấy thỏa mãn.

**** Kết luận:*** Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 4

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$ (1)

**** Phân tích:*** Ta để ý hiệu của hai biểu thức trong căn bằng x - 3, còn vế phải ta đặt 2 ra ngoài khi đó trong ngoặc còn x – 3, do đó ta sẽ nghĩ ngay đến nhân liên hợp.

Lời giải:

Điều kiện: $x\geq\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6\\&\Leftrightarrow\frac{2x-3-x}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2(x-3)\\&\Leftrightarrow(x-3)(\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2)\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2=0(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

Đến đây ta đã có một nghiệm x = 3, giờ ta sẽ đi xử lý phương trình (*). Nhân thấy với $x\geq\frac{3}{2}$ thì mẫu luôn dương, do đó ta chỉ cần chứng minh tử của nó luôn khác 0.

$$(*)\Leftrightarrow\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}-2=0\\&\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=2\\&\Leftrightarrow1=2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x})\end{aligned}$$

Rõ ràng ta nhận thấy phương trình cuối vô nghiệm, vậy biểu thức (*) luôn khác 0.

*** *Kết luận:*** Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 3

2. Phương pháp nhân liên hợp không trực tiếp:

Phương pháp chung là ta phải tiến hành nhẩm nghiệm của phương trình, rồi từ đó mới tìm được biểu thức liên hợp. Phương pháp nhẩm nghiệm sử dụng máy tính cầm tay Casio fx-570ES PLUS:

a) Dạng 1: Phương trình có 1 một nghiệm đẹp:

Phương pháp:

- Bước 1: Sử dụng SHIFT + SOLVE để tìm nghiệm x = a

- Bước 2: Kiểm tra còn nghiệm nào khác nữa không bằng cách sử dụng

SHIFT + SOLVE $\frac{f(x)}{x-a}=0$

- Bước 3: Liên hợp

- Bước 4: Chứng minh phần trong dấu ngoặc khác 0 (vô nghiệm).

Ví dụ 3: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x\in\left[\frac{-1}{3};6\right]$

Nhẩm nghiệm (ở đây rơi vào trường hợp 1) ta được x = 5. Giờ ta đi tìm biểu thức liên hợp.

$\begin{cases}\sqrt{3x+1}=4\\ \sqrt{6-x=1}\end{cases}$ (ta thay x = 5 vào hai biểu thức chứa căn được kết quả).

Ta có:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)-(\sqrt{6-x}-1)+(3x^2-14x-5)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}-\frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1)=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1)=0(*) \end{array}\right.$$

Ta có nghiệm x = 5, giờ ta đi xử lý phương trình (*). Nhưng ta nhận thấy với TXĐ $x\in\left[\frac{-1}{3};6\right]$ thì phương trình (*) luôn dương, do đó nó vô nghiệm.

*** *Kết luận:*** Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 5

Ví dụ 4: Giải phương trình sau:

$$x^3+\sqrt{x^2-2x+10}=2(x^2+x+1)\sqrt{x-1}+6 \qquad (1)$$

*** *Phân tích:*** Ta tiến hành nhẩm nghiệm của phương trình (1). Để nhẩm được nghiệm của phương trình (1) ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay để nhẩm.

Lời giải:

TXĐ: $x\in[1;+\infty)$

Nhẩm nghiệm (ở đây rơi vào trường hợp 2): Ở đây ta được nghiệm x = 5. Giờ ta đi tìm biểu thức liên hợp.

$\begin{cases}\sqrt{x^2-2x+10}=5\\ \sqrt{x-1}=2\end{cases}$ (ta thay x = 5 vào hai biểu thức chứa căn)

$$x^3+\sqrt{x^2-2x+10}=2(x^2+x+1)\sqrt{x-1}+6$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-2x+10}-5)-2(x^2+x+1)(\sqrt{x-1}-2)+(x^3-4x^2-4x-5)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+10-25}{\sqrt{x^2-2x+10}+5}-\frac{2(x^2+x+1)(\text{x}-1-4)}{x^2+x+1)(\sqrt{x-1}+2)}+(x-5)(x^2+x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+3)}{\sqrt{x^2-2x+10}+5}-\frac{2(x^2+x+1)(\text{x}-5)}{x^2+x+1)(\sqrt{x-1}+2)}+(x-5)(x^2+x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(\frac{(x+3)}{\sqrt{x^2-2x+10}+5}-\frac{2(x^2+x+1)}{x^2+x+1)(\sqrt{x-1}+2)}+x^2+x+1)=0$$

Với $x\in[1;+\infty)$ thì: $\begin{cases}\dfrac{(x+3)}{\sqrt{x^2-2x+10}+5}>0\\ \dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+x+1)(\sqrt{x-1}+2)}\le x^2+x+1\end{cases}$

Từ đó ta suy ra phương trình (1) có nghiệm duy nhất x = 5

***Kết luận:** Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 5

b) Dạng 2: Phương trình có 2 nghiệm đẹp:

Phương pháp:

- Bước 1: Sử dung SHIFT + SOLVE để tìm nghiệm x = a

- Bước 2: Tìm x = b bằng cách sử dụng SHIFT + SOLVE $\frac{f(x)}{x-a}=0$

- Bước 3: Kiểm tra phương trình chỉ có 2 nghiệm bằng cách SHIFT + SOLVE $\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}=0$ khi nào ra CAN'T SOLVE thì thôi.

- Bước 4: Tìm đại lượng liên hợp

- Bước 5: Liên hợp

- Bước 6: Chứng minh phần trong dấu ngoặc vô nghiệm

Ví dụ 5: Giải phương trình sau:

$$x\sqrt{3x-2}+(x+1)\sqrt{5x-1}=8x-3 \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Nhẩm nghiệm ta được nghiệm x = 1 và x = 2. Giờ ta đi tìm biểu thức liên hợp (ta thay x = 1 và x = 2 vào hai biểu thức chứa căn):

$$\sqrt{3x-2} = a.x + b \Rightarrow \begin{cases} a.1 + b = 1 \\ a.2 + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Biểu thức liên hợp của $\sqrt{3x-2}$ là x

$$\sqrt{5x-1} = a.x + b \Rightarrow \begin{cases} a.1 + b = 2 \\ a.2 + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Biểu thức liên hợp của $\sqrt{3x-2}$ là x + 1

Do đó, ta có:

$$x\sqrt{3x-2} + (x+1)\sqrt{5x-1} = 8x - 3$$
$$\Leftrightarrow x(\sqrt{3x-2} - x) + (x+1)(\sqrt{5x-1} - (x+1)) + (2x^2 - 6x + 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(3x-2-x^2)}{\sqrt{3x-2}+x} + \frac{(x+1)(5x-1-(x+1)^2)}{(x+1)(\sqrt{5x-1}+x+1)} + 2(x^2-3x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x(3x-2-x^2)}{\sqrt{3x-2}+x} + \frac{(x+1)(5x-1-(x+1)^2)}{(x+1)(\sqrt{5x-1}+x+1)} + 2(x^2-3x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)(2 - \frac{x}{\sqrt{3x-2}+x} - \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{5x-1}+x+1)})$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 2 - \dfrac{x}{\sqrt{3x-2}+x} - \dfrac{x+1}{(x+1)(\sqrt{5x-1}+x+1)} = 0 \end{array}\right.$$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3x-2}+x} < \dfrac{x}{x} = 1 \\ \dfrac{x+1}{(x+1)(\sqrt{5x-1}+x+1)} < \dfrac{x+1}{x+1} = 1 \end{cases}$,(Vì $x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$)

Dấu "=" không thể đồng thời xảy ra được vì x = 1/5 và x = 2/3 nên tổng:

$$\frac{x}{\sqrt{3x-2}+x}+\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{5x-1}+x+1)}<2$$

Vậy biểu thức trong ngoặc vô nghiệm, nên suy ra phương trình chỉ có hai nghiệm là x = 1 và x = 2.

* ***Kết luận:*** Vậy phương trình có nghiệm x = 1 và x = 2

Ví dụ 6: Giải phương trình sau:

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}-x^2-8=0 \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x\in\left[-2;\frac{22}{3}\right]$

Nhẩm nghiệm ta được nghiệm x = -1 và x = 2. Giờ ta đi tìm biểu thức liên hợp (ta thay x = 1 và x = 2 vào hai biểu thức chứa căn):

$$\sqrt{x+2}=a.x+b\Rightarrow\begin{cases}a.(-1)+b=1\\a.2+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow$Biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+2}$ là $\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

$$\sqrt{22-3x}=a.x+b\Rightarrow\begin{cases}a.(-1)+b=5\\a.2+b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{3}\\b=\frac{14}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow$Biểu thức liên hợp của $\sqrt{22-3x}$ là $\frac{-1}{3}x+\frac{14}{3}$

Ta có:

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}-x^2-8=0$$
$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x+2}-(\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}))+(\sqrt{22-3x}-(\frac{-1}{3}x+\frac{14}{3}))-(x^2-x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x+2}-(\frac{x+4}{3}))+(\sqrt{22-3x}-(\frac{14-x}{3})-(x^2-x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x+2}-(\frac{x+4}{3}))+(\sqrt{22-3x}-(\frac{14-x}{3})-(x^2-x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}\left[\frac{9(x+2)-(x+4)^2}{3\sqrt{x+2}+(\frac{x+4}{3})}\right]+\left[\frac{9(22-3x)-(14-x)^2}{\sqrt{22-3x}-(\frac{14-x}{3})}\right]-(x^2-x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{12(-x^2+x+2)}{9(3\sqrt{x+2}+x+4)}+\frac{3(-x^2+x+2)}{9(\sqrt{22-3x}+14-x}+(-x^2+x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (-x^2+x+2)(\frac{12}{9(3\sqrt{x+2}+x+4)}+\frac{3}{9(\sqrt{22-3x}+14-x}+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+x+2=0 \\ \dfrac{12}{9(3\sqrt{x+2}+x+4)}+\dfrac{3}{9(\sqrt{22-3x}+14-x}+1=0 \end{array}\right.$$

Nhưng ta nhận thấy phương trình thứ 2 luôn vô nghiệm với mọi $x\in\left[-2;\frac{22}{3}\right]$. Do đó, phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$-x^2+x+2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{array}\right.$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm x = -1 và x = 2

Ví dụ 7: Giải phương trình sau:

$$x^2-2x+3=(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x\in R$

Nhẩm nghiệm ta được nghiệm x = 1 và x = 2. Giờ ta đi tìm biểu thức liên hợp (ta thay x = 1 và x = 2 vào hai biểu thức chứa căn):

$$\sqrt{x^2-3x+3}=a.x+b \Rightarrow \begin{cases} a.1+b=1 \\ a.2+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Biểu thức liên hợp của $\sqrt{x^2-3x+3}$ là **1**

Ta có:

$$x^2-2x+3=(x+1)\sqrt{x^2-3x+3}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2-3x+3}-1)-x^2+3x-2=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2-3x+3}-1)-(x^2-3x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-3x+2)}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-(x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}-1=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{x^2-3x+3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm x = 1 và x = 2

c) Dạng 3: Phương trình có một nghiệm xấu:

*** Phương pháp:**

- Bước 1: SHIFT + SOLVE để tìm x = a

- Bước 2: Tìm biểu thức liên hợp bằng cách thay x vào các biểu thức chứa căn.

- Bước 3: Nhân liên hợp

- Bước 4: Chứng minh phần trong ngoặc vô nghiệm.

Ví dụ 8: Giải phương trình sau:

$$x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x} \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$

Nhẩm nghiệm: Sử dụng SHIFT + CALC để tìm một nghiệm vô tỷ của phương trình: x = 0,618…

Thay x = 0,618… vào các biểu thức chứa căn ta được $\begin{cases} \sqrt{3-x} \approx 0,618... \\ \sqrt{x} \approx 1,618... \end{cases}$

Do đó biểu thức liên hợp sẽ là: $\begin{cases} \sqrt{3-x} \approx 0,618... \approx \mathrm{x}-2 \\ \sqrt{x} \approx 1,618... \approx \mathrm{x}-1 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
& x^2 - x - 2 = \sqrt{3-x} + \sqrt{x} \\
& \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + (x - 2 - \sqrt{3-x}) + (x - 1 - \sqrt{x}) = 0 \\
& \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \frac{((x-2)^2 - \sqrt{3-x})}{(x - 2 + \sqrt{3-x})} + \frac{((x-1)^2 - \sqrt{x})}{(x - 1 + \sqrt{x})} = 0 \\
& \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 + \frac{(x^2 - 3x + 1)}{(x - 2 + \sqrt{3-x})} + \frac{(x^2 - 3x + 1)}{(x - 1 + \sqrt{x})} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(1 + \frac{1}{(x - 2 + \sqrt{3-x})} + \frac{1}{(x - 1 + \sqrt{x})}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 \\ 1 + \dfrac{1}{(x - 2 + \sqrt{3-x})} + \dfrac{1}{(x - 1 + \sqrt{x})} = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Nhận thấy với $2 \leq x \leq 3$ thì phương trình thứ 2 luôn vô nghiệm. Do đó phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ còn nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ loại.

*** *Kết luận:*** Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 9: Giải phương trình sau:

$$x^3+x^2=(x^2+1)\sqrt{x+1}+1 \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $\begin{cases} x^3+x^2-1\ge 0 \\ -1\le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+x^2-\dfrac{3}{8}\ge 0 \\ -1\le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-\dfrac{1}{2})(x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}) \\ -1\le x \end{cases} \Rightarrow x\ge \dfrac{1}{2}$

Nhẩm nghiệm: Sử dụng SHIFT + CALC để tìm một nghiệm vô tỷ của phương trình: x = 1,618…

Thay x = 1,618… vào biểu thức chứa căn thức ta được $\sqrt{x+1}\approx 1,618...$

Khi đó biểu thức liên hợp là: $\sqrt{x+1}\approx 1,618...=\mathrm{x}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&x^3+x^2=(x^2+1)\sqrt{x+1}+1\\
&\Leftrightarrow x^2-x-1+(x^2+1)(\mathrm{x}-\sqrt{x+1})=0\\
&\Leftrightarrow x^2-x-1+\frac{(x^2+1)(\mathrm{x}^2-(x-1))}{(\mathrm{x}+\sqrt{x+1})}=0\\
&\Leftrightarrow (x^2-x-1)(1+\frac{(x^2+1)}{(\mathrm{x}+\sqrt{x+1})})=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0\\ 1+\dfrac{(x^2+1)}{(\mathrm{x}+\sqrt{x+1})}=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Nhận thấy với $x\ge\dfrac{1}{2}$ thì phương trình thứ 2 luôn vô nghiệm. Do đó phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ còn nghiệm $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ loại.

*** *Kết luận:*** Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

d) Dạng 4: Phương trình có hai nghiệm xấu:

- Bước 1: SHIFT + SOLVE để tìm x = a

- Bước 2: Tìm biểu thức liên hợp bằng cách thay x vào các biểu thức chứa căn.

- Bước 3: Nhân liên hợp

- Bước 4: Chứng minh phần trong ngoặc vô nghiệm.

Ví dụ 10: Giải phương trình sau:

$$x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2} \qquad (1)$$

Lời giải:

*** Phân tích:** Ở đây ta thấy phương trình không có nghiệm nguyên (nghiệm đẹp), nên ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm biểu thức liên hợp hoặc sử dụng phương pháp hệ số bất định để giải bài toán.

+ Phương pháp hệ số bất định:

TXĐ: $x\in R$

Ta nhận thấy x = -2 không phải là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\begin{aligned}&x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x^2+x-1}{x+2}=\sqrt{x^2-2x+2}\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x^2+x-1}{x+2}-(a.x+b)=\sqrt{x^2-2x+2}-(a.x+b)\end{aligned}$$

Đến đây ta quy đồng vế trái và nhân liên hợp vế phải, ta được:

$$\frac{(1-a)x^2+(1-2a-b)x-1-2b}{x+2}=\frac{x^2(1-a^2)-2(1+ab)x+2-b^2}{\sqrt{x^2-2x+2}+a.x+b}$$

Ta đồng nhất hệ số:

$$\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1-2a-b}{-2(1+ab)}=\frac{-1-2b}{2-b^2}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=3\end{cases}$$

Vậy biểu thức liên hợp ở đây là **3**

Ta có:

$$\begin{aligned}
&x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}\\
&\Leftrightarrow\frac{x^2+x-1}{x+2}=\sqrt{x^2-2x+2}\\
&\Leftrightarrow\frac{x^2+x-1}{x+2}-3=\sqrt{x^2-2x+2}-3\\
&\Leftrightarrow\frac{x^2-2x-7}{x+2}=\frac{x^2-2x-7}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}\\
&\Leftrightarrow(x^2-2x-7)(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+3})=0\\
&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-7=0\\ \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1+2\sqrt{2}\\x=1-2\sqrt{2}\end{array}\right.\\ \dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+3}=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đến đây ta nhận thấy phương trình thứ 2 vô nghiệm.

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases}x=1-2\sqrt{2}\\x=1+2\sqrt{2}\end{cases}$

Ngoài phương pháp nêu trên ta còn có thể giải phương trình vô tỉ có 2 nghiệm xấu theo cách sau đây:

*** Phương pháp:**

- Bước 1: SHIFT + SOLVE để tìm x = a, lưu x vào biến A

- Bước 2: Tìm biểu thức liên hợp bằng cách thay giá trị của A vào biểu thức có chứa căn.

- Bước 3: Nhân liên hợp

- Bước 4: Chứng minh phần trong ngoặc vô nghiệm.

Ví dụ 11: Giải phương trình sau:

$$x^2 + x + 2 = \sqrt{5x+5} + \sqrt{3x+2} \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x \in \left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$

Nhẩm nghiệm được nghiệm: $x = 1,618...$ ta lưu vào biến **A**

Do đó ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{5A+5} = 3,618... \approx x+2 \\ \sqrt{3A+2} = 2,618... \approx x+1 \end{cases}$$

Vậy biểu thức liên hợp của các biểu thức chứa căn sẽ là:

$$\begin{cases} (x+2) - \sqrt{5x+5} \\ (x+1) - \sqrt{3x+2} \end{cases}$$

(Lưu ý: Ta lấy biểu thức có bậc cao hơn trừ đi biểu thức có bậc thấp hơn).

Ta có lời giải của bài toán như sau:

$$x^2+x+2=\sqrt{5x+5}+\sqrt{3x+2}$$
$$\Leftrightarrow (x+2-\sqrt{5x+5})+(x+1-\sqrt{3x+2})+(x^2-x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2-(5x+5)}{x+2+\sqrt{5x+5}}+\frac{(x+1)^2-(3x+2)}{x+1+\sqrt{3x+2}}+(x^2-x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-1}{x+2+\sqrt{5x+5}}+\frac{x^2-x-1}{x+1+\sqrt{3x+2}}+(x^2-x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+5}}+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+2}}+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0 \\ \dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+5}}+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+2}}+1=0 \end{array}\right.$$

Nhận thấy với $x\in\left[\frac{-2}{3};+\infty\right)$ thì phương trình thứ 2 luôn vô nghiệm. Giải phương trình thứ nhất ta thu được:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

*** *Kết luận:*** Vậy phương trình có 2 nghiệm $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ví dụ 12: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x^2-10x+5}=\sqrt{5x-2}+x^3-24x+11 \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x\in\left[\frac{5+\sqrt{15}}{2};+\infty\right)$

+ Cách 1: Sử dụng định lý Vi-et đảo:

Nhẩm nghiệm được 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x_1=0,4384471872 \\ x_2=4,561552813 \end{array}\right.$ (sử dụng SOLVE)

Khi đó 2 nghiệm trên là nghiệm của phương trình $X^2-(A+B)X+A.B=0$

Nhưng ta có A + B = 5 và A.B = 2 nên phương trình trên trở thành

$$X^2-5X+2=0$$

Và đây chính là nhân tử cần tìm.

*** Bình luận:** Tuy nhiên cách này không hoàn toàn khả dụng trong trường hợp chỉ có một nghiệm thỏa mãn TXĐ, tức là ta phải loại đi một nghiệm. Để khắc phục được tình trạng trên ta sẽ thực hiện cách số 2 sau đây:

+ Cách 2: Chỉ cần tìm một nghiệm (khác với cách 1 ta phải tìm 2 nghiệm)

- Bước 1: SHIFT + SOLVE để tìm x = a, lưu x vào biến A

- Bước 2: Tìm biểu thức liên hợp bằng cách thay giá trị của A vào biểu thức có chứa căn.

- Bước 3: Nhân liên hợp

- Bước 4: Chứng minh phần trong ngoặc vô nghiệm.

Ví dụ 13: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{2x^2-10x+5}=\sqrt{5x-2}+x^3-24x+11 \qquad (1)$$

Lời giải:

TXĐ: $x\in\left[\frac{5+\sqrt{15}}{2};+\infty\right)$

Nhẩm nghiệm: Ta nhẩm được nghiệm vô tỷ là $x=4,561...$

Thay vào các biểu thức có chứa căn thức để tìm biểu thức liên hợp:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2-10x+5}=1\\ \sqrt{5x-2}=4,561...\end{cases}$$

Vậy biểu thức liên hợp của các biểu thức chứa căn sẽ là:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2-10x+5}=1 \\ \sqrt{5x-2}=4,561...=\text{x} \end{cases}$$

Ta có:

$$\sqrt{2x^2-10x+5}=\sqrt{5x-2}+x^3-24x+11$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2-10x+5}-1)+(x-\sqrt{5x-2})-(x^3-23x+10)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10x+5-1}{\sqrt{2x^2-10x+5}+1}+\frac{x^2-5x+2}{x+\sqrt{5x-2}}-(\text{x}+5)(x^2-5x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-5x+2)(\frac{2}{\sqrt{2x^2-10x+5}+1}+\frac{1}{x+\sqrt{5x-2}}-(\text{x}+5))=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+2=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2x^2-10x+5}+1}+\dfrac{1}{x+\sqrt{5x-2}}-(\text{x}+5)=0 \end{array}\right.$$

Ta nhận thấy phương trình thứ 2 luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x\in\left[\frac{5+\sqrt{15}}{2};+\infty\right)$, tức là vô nghiệm. Do đó phương trình đã cho có nghiệm: $x=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ còn nghiệm $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ ta loại.