PHƯƠNG PHÁP UCT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC
(UCT – Un coeficent Teachmque – Kỹ thuật hệ số bất định)

I. CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP:

Sử dụng các biểu thức phụ chứa các hệ số chưa xác định để giải bài toán dễ dàng hơn. Biểu thức phụ không có dạng cố định nào cả.

Dấu hiệu để sử dụng phương pháp UCT đó là khi gặp những bài toán khó, các bài toán các biến có tính chất đối xứng.

II. NỘI DUNG:

*** Phương pháp chung:**

+ **Bước 1:** Dự đoán điểm rơi (để xác định hệ số bất định được dễ dàng hơn).

+ **Bước 2:** Tìm biểu thức phụ (**Lưu ý:** Bậc của biểu thức phụ phải bằng bậc của hạng tử trong điều kiện đã cho ban đầu của bài toán) và chứng minh bất đẳng thức phụ.

+ **Bước 3:** Áp dụng bất đẳng thức phụ vào chứng minh bài toán.

Ví dụ 1: Cho a, b, c lớn hơn 0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=2(a+b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

*** Nháp:**

Dự đoán điểm rơi: a = b = c = 1

$$P = 2(a+b+c)+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$= (2a+\frac{1}{a})+(2b+\frac{1}{b})+(2c+\frac{1}{c})$$

Tìm biểu thức phụ: Ta dự đoán biểu thức phụ có dạng

$$2x+\frac{1}{x} \geq mx^2+n \qquad \textbf{(*)}$$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} 2a+\frac{1}{a} \geq ma^2+n \\ 2b+\frac{1}{b} \geq mb^2+n \\ 2c+\frac{1}{c} \geq mc^2+n \end{cases}$$

Cộng 2 vế ta được:

$$P \geq m(a^2+b^2+c^2)+3n = 3(m+n)$$

Ở trên ta đã dự đoán điểm rơi a = b = c = 1, nên khi đó P = 9.

Do đó ta có n = 3 – m, thay ngược trở lại vào (*), ta được:

$$2x+\frac{1}{x} \geq mx^2+3-m$$
$$\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x} \geq m(x-1)(x+1)+3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x} \geq m(x-1)(x+1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)}{x} \geq m(x-1)(x+1)$$
$$\Leftrightarrow m \leq \frac{2x-1}{x(x+1)}$$

Đồng nhất x = 1 vào ta được $m = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \frac{5}{2}$, ta được biểu thức phụ là:

$$2x+\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$$

Lời giải:

Với mọi $x\in(0;3)$, ta có:

$$2x+\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+5x-2\leq 0 \qquad (**)$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)\leq 0$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 1

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Áp dụng bất đẳng thức (**) cho bài toán, ta có:

$$P\geq\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+3.\frac{5}{2}=\frac{1}{2}.3+\frac{15}{2}=\frac{18}{2}=9 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c =1

Ví dụ 2: Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$P=\sqrt{5a+4}+\sqrt{5b+4}+\sqrt{5c+4}\geq 7$$

*** Nháp:**

Dự đoán điểm rơi: $\begin{cases}a=1\\ b,c=0\end{cases}$ và các hoán vị của nó. Khi đó ta dự đoán:

$$\sqrt{5a+4}\geq ma+n$$

Đến đây ta để ý có 2 điểm rơi, ta sẽ thay lần lượt a = 0 và a = 1 vào trên ta được:

$$\begin{cases}n=2\\ m+n=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=2\end{cases}$$

Ta có bất đẳng thức phụ là $\sqrt{5a+4}\geq a+2$

Lời giải:

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ: $\sqrt{5a+4} \geq a+2$

Với $a \in [0;1]$, ta có:

$$\begin{aligned}&\sqrt{5a+4} \geq a+2\\&\Leftrightarrow 5a+4 \geq a^2+4a+4\\&\Leftrightarrow a^2-a \leq 0\\&\Leftrightarrow a(a-1) \leq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng với $a \in [0;1]$. Do đó:

$$P \geq a+b+c+2+2+2+=7 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = 1; b, c = 0 và các hoán vị của nó.

Ví dụ 3: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$$

*** Nháp:**

Dự đoán điểm rơi: $a=b=c=1$, khi đó P = 1. Ta có:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}=\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}$$

Dự đoán biểu thức phụ:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2-a+3} \leq ma+n\\&\Rightarrow P \leq m(a+b+c)+3n\end{aligned}$$

Thay a = 1 ở trên ta được:

$$P \leq 3(m+n)=1 \Rightarrow \text{n}=\frac{1}{3}-m$$

Ta có:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le ma+\frac{1}{3}-m$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2-a+3}-\frac{1}{3}\le m(a-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-(a^2-a+3)}{a^2-a+3}\le m(a-1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-a(a-1)}{a^2-a+3}\le m(a-1)$$
$$\Leftrightarrow m\ge \frac{-a}{a^2-a+3}$$

Ta đồng nhất bằng cách thay a = 1 ở trên vào, ta được: m = -1/3 và n = 2/3

Ta có bất đẳng thức phụ là:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\le -\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}$$

Lời giải:

Chứng minh bất đẳng thức phụ:

Với $x\in(0;3)$, ta có:

$$\frac{1}{x^2-x+3}\le -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+5x-3\le 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Áp dụng vào bài toán ta được:

$$P\le -\frac{1}{3}(a+b+c)+3.\frac{2}{3}=1 \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c =1

Ví dụ 4: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}\le \frac{6}{5}$$

*** Phân tích:** Ở 3 ví dụ trên ta nhận thấy các bài toán đều có điều kiện ban đầu, điều đó giúp ta dự đoán được điểm rơi một cách chính xác. Nhưng ở bài toán này không cho điều kiện rằng buộc giữa các biến nên rất khó dự đoán điểm rơi. Để giải quyết được vấn đề này chúng ta cùng làm quen với **"Kỹ thuật chuẩn hóa"** trong chứng minh bất đẳng thức. Nhưng hẳn sẽ tồn tại câu hỏi: Thế nào là chuẩn hóa? Chuẩn hóa đơn giản chỉ là cách ta đặt ẩn phụ và từ đó làm xuất hiện điều kiện rằng buộc giữa các biến mới.

*** Dấu hiệu chuẩn hóa:** Bậc của các hạng tử phải bằng nhau

*** Cách đặt ẩn mới:**

Ta có thể chia các hạng tử cho: $abc, a+b+c, (a+b+c)^2, a^2+b^2+c^2, ab+bc+ca$

Việc chia làm sao để xuất hiện ẩn mới và kèm theo điều kiện thích hợp để dễ dàng sử dụng phương pháp hệ số bất định UCT.

Trở lại bài toán: Ta nhận thấy các hạng tử có tử và mẫu đều là bậc 2, do đó ta nghĩ đến việc chia cả tử và mẫu cho $(a+b+c)^2$, khi đó ta có:

$$\frac{\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2}}{\frac{a^2+(b+c)^2}{(a+b+c)^2}}+\frac{\frac{b(c+a)}{(a+b+c)^2}}{\frac{b^2+(c+a)^2}{(a+b+c)^2}}+\frac{\frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2}}{\frac{a^2+(b+c)^2}{(a+b+c)^2}}\le\frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{a}{a+b+c}.\frac{b+c}{a+b+c}}{\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b+c}{a+b+c}\right)^2}+\frac{\frac{b}{a+b+c}.\frac{c+a}{a+b+c}}{\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{a+b+c}\right)^2}+\frac{\frac{c}{a+b+c}.\frac{a+b}{a+b+c}}{\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^2}\le\frac{6}{5}$$

Đặt: $\begin{cases} x=\frac{a}{a+b+c} \\ y=\frac{b}{a+b+c} \\ z=\frac{c}{a+b+c} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$P = \frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2} + \frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2} + \frac{z(x+y)}{z^2+(x+y)^2} \le \frac{6}{5} \text{ với } x+y+z=1$$

*** Lưu ý:** Việc chuẩn hóa không bó buộc trong một phạm vi nào cả. Giả sử vẫn đặt ẩn phụ như trên nhưng ta có thể chuẩn hóa x + y + z = 3

Đến đây ta hoàn toàn sử dụng được phương pháp hệ số bất định UCT. Ta có:

$$P = \frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2} + \frac{y(z+x)}{y^2+(z+x)^2} + \frac{z(x+y)}{z^2+(x+y)^2} \le \frac{6}{5}$$
$$\Leftrightarrow P = \frac{x(3-x)}{x^2+(3-x)^2} + \frac{y(3-y)}{y^2+(3-y)^2} + \frac{z(3-z)}{z^2+(3-z)^2} \le \frac{6}{5}$$
$$\Leftrightarrow P = \frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9} + \frac{y(3-y)}{y^2-6y+9} + \frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9} \le \frac{6}{5}$$

*** Nháp:**

Dự đoán điểm rơi: x = y = z = 1, khi đó P = 6/5

Dự đoán biểu thức phụ:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le mt+n \qquad (*)$$

Thay t = 1 vào ta được:

$$\Rightarrow \frac{6}{5} = m.3+3n \Leftrightarrow \frac{6}{5} = 3(m+n) \Rightarrow n = \frac{2}{5} - m$$

Thay vào biểu thức (*) ở trên ta được:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le mt + \frac{2}{5} - m$$
$$\Leftrightarrow \frac{-9t^2+27t-18}{5(2t^2-6t+9)} \le m(t-1)$$
$$\Rightarrow m \ge \frac{-9(t-2)}{5(2t^2-6t+9)}$$

Ta đồng nhất t = 1, suy ra m = 9/25 và n = 1/25

Khi đó ta có bất đẳng thức phụ:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le \frac{9}{25}t + \frac{1}{25}$$

Lời giải:

Chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le \frac{9}{25}t + \frac{1}{25}$$

Với $t \in (0;3)$, ta có:

$$\frac{t(3-t)}{2t^2-6t+9} \le \frac{9}{25}t + \frac{1}{25}$$
$$\Leftrightarrow 18t^3 - 27t^2 + 9 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow 9(t-1)^2(2t+1) \ge 0$$

Với $t \in (0;3)$ bất đẳng thức cuối luôn đúng.

Áp dụng vào bài toán, ta có:

$$P = \frac{x(3-x)}{2x^2-6x+9} + \frac{y(3-y)}{y^2-6y+9} + \frac{z(3-z)}{2z^2-6z+9} \le \frac{9}{25}(x+y+z) - 3.\frac{1}{27} = \frac{6}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 (đpcm)

Ví dụ 5: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2+(a+b)^2} \ge \frac{3}{5}$$

Chia cả hai vế cho $(a+b+c)^2$

Đặt: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a+b+c} \\ y = \dfrac{b}{a+b+c} \\ z = \dfrac{c}{a+b+c} \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$P=\frac{x^2}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y^2}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z^2}{z^2+(x+y)^2}\geq\frac{3}{5}\text{ với } x+y+z=3$$

Vế trái:
$$\begin{aligned}P&=\frac{x^2}{x^2+(3-x)^2}+\frac{y^2}{y^2+(3-y)^2}+\frac{z^2}{z^2+(3-z)^2}\\&=\frac{x^2}{2x^2-6x+9}+\frac{y^2}{2y^2-6y+9}+\frac{z^2}{2z^2-6z+9}\end{aligned}$$

Biểu thức phụ:

$$\frac{t^2}{2t^2-6t+9}\geq mt+n$$
$$\Rightarrow\frac{3}{5}=3(m+n)\Rightarrow n=\frac{1}{5}-m$$

Vậy:
$$\begin{aligned}&\frac{t^2}{t^2+(3-t)^2}\geq mt+\frac{1}{5}-m\\&\Leftrightarrow\frac{3t^2+6t-9}{5(2t^2-6t+9)}\geq m(t-1)\\&\Leftrightarrow\frac{(t-1)(t+2)}{5(2t^2-6t+9)}\geq m(t-1)\\&\Rightarrow m=\frac{12}{25}\Rightarrow n=-\frac{7}{25}\end{aligned}$$

Lời giải:

Chứng minh bất đẳng thức phụ:

$$\frac{t^2}{2t^2-6t+9}\geq\frac{12}{25}t-\frac{7}{25}$$

Với mọi $t\in(0;3)$, ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{t^2}{2t^2-6t+9}\geq\frac{12}{25}t-\frac{7}{25}\\&\Leftrightarrow 25t^2\geq 24t^3-86t^2+150t-63\\&\Leftrightarrow 8t^3-37t^2+50t-21\leq 0\\&\Leftrightarrow (t-1)^2(8t-21)\leq 0\end{aligned}$$

Đến đây ta xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $t \in \left(0;\dfrac{21}{8}\right)$ thì bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó: $P \geq \dfrac{3}{5}$

+ Trường hợp 2: $t \in \left(\dfrac{21}{8};+\infty\right)$ bất đẳng thức cuối luôn lớn hơn 0, do đó giá trị $t \in \left(\dfrac{21}{8};+\infty\right)$ không thỏa mãn.

Áp dụng vào bài toán, ta có:

$$P=\frac{x^2}{2x^2-6x+9}+\frac{y^2}{2y^2-6y+9}+\frac{z^2}{2z^2-6z+9}\geq\frac{12}{25}(x+y+z)-3.\frac{7}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1 (đpcm)

Ví dụ 6: Cho $a,b,c>0$. Tìm GTNN của:

$$P=\frac{x+3z}{x+y}+\frac{z+3x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}$$

*** Phân tích:**

Ta dùng phương pháp hệ số bất định để giải quyết bài toán trên. Nhưng ở ví dụ chỉ có 2 số hạng đầu các biến số có tính chất đối xứng, hạng tử thứ 3 thì không, do đó phương pháp hệ số bất định có biến thể một chút. Bây giờ ta tìm hệ số k_1,k_2. Ta có:

$$\begin{cases} k_1=\dfrac{x+3z}{x+z}=\dfrac{z+3x}{y+z} \\ k_2=\dfrac{4y}{z+x} \end{cases}$$

Nên $\begin{aligned} & x+3z+k_1(x+y)=z+3x+k_1(y+z)\sim 4y+k_2(z+x) \\ & \Leftrightarrow (k_1+1)x+k_1y+3z=3x+k_1y+(k_1+1)z\sim k_2x+4y+k_2z \end{aligned}$

Đồng nhất hệ số ta được: $\Rightarrow k_1=2\rightarrow k_2=6$

Lời giải:

$$P = (\frac{x+3z}{x+y}+2)+(\frac{z+3x}{y+z}+2)+(\frac{4y}{z+x}+6)$$
$$= (3x+2y+3z)(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{z+x})-10$$
$$= \left[(x+y)+(y+z)+2(z+x)\right](\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}+\frac{2}{z+x})-10$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$P \geq (1+1+2)^2 - 10 = 6$$

Dấu $"=" \Leftrightarrow x+y=y+z=z+x \Leftrightarrow x=y=z$