MỘT SỐ THỦ THUẬT CƠ BẢN
CHINH PHỤC CÂU TRẮC NGHIỆM
CỰC TRỊ HÀM SỐ

Một số công thức tính nhanh "thường gặp"
liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 **cực trị:** $ab \ge 0$		3 **cực trị:** $ab < 0$	
$a > 0$: 1 cực tiểu	$a < 0$: 1 cực đại	$a > 0$: 1 cực đại, 2 cực tiểu	$a < 0$: 2 cực đại, 1 cực tiểu

$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, luôn có: $8a(1 + cos\alpha) + b^3(1 - cos\alpha) = 0 \Rightarrow cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right|$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + 2017m^9 - m^4$ có 3 cực trị sao cho khoảng cách giữa hai cực tiểu bằng $\sqrt{3}$.

A. $m = 0,5$ **B.** $m = -0,5$

C. $m = 0,5$ hoặc $m = -0,5$ **D.** $m = 2$

Hướng dẫn:

Với $a = 1, b = -2(m^2 - m + 1)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $1.\left[-2(m^2 - m + 1)\right] < 0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$

$BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = 2\sqrt{-\frac{\left[-2(m^2 - m + 1)\right]}{2.1}}$ hay $2\sqrt{m^2 - m + 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 0$

$\Rightarrow m = 0,5 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(1 + m^2)x^2 + 2017m^4 - 2016$ có 3 cực trị sao cho khoảng cách giữa hai cực tiểu nhỏ nhất.

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ hoặc $m=-1$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=-2(m^2+1)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.\left[-2(m^2+1)\right]<0 \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$

$$BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}=2\sqrt{-\frac{\left[-2(m^2+1)\right]}{2.1}}=2\sqrt{m^2+1}\geq 2 \Rightarrow \min BC=2 \text{ khi } m=0$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4-2mx^2+2016m^5-2017$ có 3 cực trị sao cho khoảng cách giữa hai cực tiểu và cực đại bằng $\sqrt{2}$.

A. $m=2$ **B.** $m=0$ hoặc $m=1$ **C.** $m=1$ **D.** $m=4$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=-2m$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.(-2m)<0 \Rightarrow m>0$

$$AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}=\sqrt{\frac{(-2m)^4}{16.1^2}-\frac{(-2m)}{2.1}}=\sqrt{m^4+m}, \text{ với } AB=AC=\sqrt{2} \text{ thì}$$

$$\sqrt{m^4+m}=\sqrt{2} \Leftrightarrow m^4+m-2=0 \Leftrightarrow (m-1)(m^3+m^2+m+2)=0 \Rightarrow m=1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 4 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=(2m+1)x^4+x^2-2017m^{2018}+2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác ABC thỏa mãn $A\in Oy$ và $cos\widehat{BAC}=-\frac{7}{9}$.

A. $m=-2$ **B.** $m=-1$ hoặc $m=-1$ **C.** $m=-4$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn:

Với $a=2m+1, b=1$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $(2m+1).1<0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$

$$cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a} \Rightarrow -\frac{7}{9}=\frac{1^3+8.(2m+1)}{1^3-8.(2m+1)} \Leftrightarrow 144m+81=112m+49 \Leftrightarrow m=-1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 5 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4-2m^3x^2+2016m^{2017}+2018^m$ có 3 cực trị tạo thành tam giác ABC có diện tích bằng s thỏa mãn phương trình $(3s+1)\sqrt{s^2+s+2}=3s^2+3s+2$

A. $m=1$ **B.** $m=1$ hoặc $m=2$ **C.** $m=2$ **D.** $m=4$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=-2m^3$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.(-2m^3)<0 \Rightarrow m>0$

$$(3s+1)\sqrt{s^2+s+2}=3s^2+3s+2 \Leftrightarrow (\sqrt{s^2+s+2}-2s)(\sqrt{s^2+s+2}-s-1)=0 \Leftrightarrow s=1$$

$$S^2=-\frac{b^5}{32a^3} \Rightarrow -\frac{(-2m^3)^5}{32.1}=1 \Leftrightarrow (m^3)^5=1 \Rightarrow m=1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 6 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(16 - m^4)x^2 + m^{2018} - m^{2017}$ có 3 cực trị tạo thành tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

A. $m = -1$ **B.** $m = 0$

C. $m = -1$ hoặc $m = 1$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn:

Với $a = 1, b = -2(16 - m^4)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $1.\left[-2(16 - m^4)\right] < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

$$S = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} = \sqrt{-\frac{\left[-2(16 - m^4)\right]^5}{32}} = \sqrt{(16 - m^4)^5} \le 1024 \Rightarrow maxS = 1024 \text{ khi } m = 0$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 7 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 1$ có 3 cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O cùng nằm trên đường tròn.

A. $m = -1$ **B.** $m = 0$

C. $m = -1$ hoặc $m = 1$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn:

Với $a = 1, b = -2m^2, c = m^4 + 1$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có:

$1(-2m^2) < 0 \Rightarrow m \ne 0$ và $\Delta = b^2 - 4ac = -4$

Phương trình đường tròn đi qua $\Delta\ A, B, C : x^2 + y^2 - (c + n)x + c.n = 0,$ với $n = 1 - \frac{1}{m^2}$

$O(0;0)$ thuộc đường tròn:

$$0^2 + 0^2 - (c + n)0 + c.n = 0 \Rightarrow c.n = 0$$

hay $(m^4 + 1)\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = 0$ suy ra $m = \pm 1$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Một số dạng toán cơ bản về hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

(chứng minh hình học đơn giản)

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị:

$$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện:

Dữ kiện	**Công thức thỏa** $ab < 0$
1). Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2). Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$

3). Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=\alpha$	$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0$
4). Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC}=S_0$	$32a^3(S_0)^2+b^5=0$
5). Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6). Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC}=r_0$	$r_0=\frac{b^2}{\|a\|\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{a}}\right)}$
7). Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC=m_0$	$am_0^2+2b=0$
8). Tam giác ABC có độ dài $AB=AC=n_0$	$16a^2n_0^2-b^4+8ab=0$
9). Tam giác ABC có cực trị $B,C\in Ox$	$b^2-4ac=0$
10). Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a+b^3)>0$
11). Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2-6ac=0$
12). Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3+8a-4ac=0$
13). Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC}=R_0$	$R=\left\|\frac{b^3-8a}{8ab}\right\|$
14). Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2-2ac=0$
15). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3-8a-4abc=0$
16). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3-8a-8abc=0$
17). Tam giác ABC có cạnh $BC=kAB=kAC$	$b^3.k^2-8a(k^2-4)=0$
18). Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2=4\sqrt{2}\|ac\|$
19). Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2-8ac=0$

Dạng toán 1:

Tìm tất cả giá trị tham số thực m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân tại A.

Chứng minh: $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right),\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right)$.

Từ yêu cầu bài toán, ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=0\Leftrightarrow\boxed{8a+b^3=0}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị tham số thực m để hàm số $y=-x^4+(m-2015)x^2+2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân tại A.

A. $m=2017$ **B.** $m=2014$ **C.** $m=2016$ **D.** $m=2015$

Hướng dẫn:

Với $a=-1, b=m-2015$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $-(m-2015)<0 \Rightarrow m>2015$.

Tam giác ABC vuông cân tại A khi:

Cách 1: $8a+b^3=0 \Rightarrow 8.(-1)+(m-2015)^3=0 \Leftrightarrow m-2015=2 \Leftrightarrow m=2017$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Cách 2: $A=90^0$.

Hướng giải 1:

$$cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}\ (*), \text{vì } cosA=0 \text{ nên } (*) \Rightarrow 8a+b^3=0$$

Hướng giải 2:

$$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0\ (**), \text{vì } \tan^2\frac{A}{2}=1 \text{ nên } (**) \Rightarrow 8a+b^3=0$$

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị tham số thực m để hàm số $y=x^4+2(m+2016)x^2-2017m+2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân tại A.

A. $m=-2017$ **B.** $m=2017$ **C.** $m=-2018$ **D.** $m=2015$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=2(m+2016)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có:

$2(m+2016)<0 \Rightarrow m<-2016$

Từ $8a+b^3=0 \Rightarrow 8.1+8(m+2016)^3=0 \Leftrightarrow m+2016=-1 \Leftrightarrow m=-2017$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 2:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều.

Chứng minh: $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right), \overrightarrow{BC}=\left(2\sqrt{-\frac{b}{2a}};0\right)$.

Từ yêu cầu bài toán, ta có:

$$AB=BC \text{ hay } -\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=-\frac{2b}{a} \Leftrightarrow b^4+24ab=0 \Leftrightarrow \boxed{b^3+24a=0}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=\frac{9}{8}x^4+3(m-2017)x^2-2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m=2015$ **B.** $m=2016$ **C.** $m=2017$ **D.** $m=-2017$

Hướng dẫn:

Với $a=\dfrac{9}{8}, b=3(m-2017)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $\dfrac{9}{8}.3(m-2017)<0 \Rightarrow m<2017$

Tam giác ABC đều , thì :

Cách 1: $24a+b^3=0 \Leftrightarrow 24\left(\dfrac{9}{8}\right)+\left[3(m-2017)\right]^3=0 \Leftrightarrow m-2017=-1 \Rightarrow m=2016$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Cách 2: $A=60^0$.

Hướng giải 1: $cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$ $(*)$, vì $cosA=\dfrac{1}{2}$

nên $(*) \Rightarrow 2b^3+16a=b^3-8a \Leftrightarrow b^3+24a=0$

Hướng giải 2: $8a+b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=0$ $(**)$, vì $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{3}$ nên $(**) \Rightarrow 24a+b^3=0$

Ví dụ 2: Nếu đồ thị hàm số $y=9x^4+2(m-2020)x^2-2017m+2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều thì giá trị tham số m thuộc khoảng nào?.

A. $(2015;2017)$ **B.** $(2016;2018)$ **C.** $(2017;2019)$ **D.** $(2017;2020)$

Hướng dẫn:

Với $a=9, b=2(m-2020)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $9.2(m-2020)<0 \Rightarrow m<2020$

$24a+b^3=0 \Leftrightarrow 24.9+\left[2(m-2020)\right]^3=0 \Leftrightarrow m-2020=-3 \Rightarrow m=2017$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Dạng toán 3:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác cân tại A thỏa mãn $\widehat{BAC}=\alpha$.

Chứng minh:

$$cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-AB^2.cos\alpha=0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}\right).cos\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow 8a(1+cos\alpha)+b^3(1-cos\alpha)=0 \Rightarrow \boxed{cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}}$$

Cách khác: Gọi H là trung điểm BC, tam giác AHC vuông tại H có:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{HC}{AH}=\frac{BC}{2AH} \Rightarrow BC^2-4AH^2.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow \boxed{8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=-3x^4+(m-2015)x^2+2016$ có

3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120^0.

A. $m=-2017$ **B.** $m=2015$ **C.** $m=2017$ **D.** $m=2016$

Hướng dẫn:

Với $a=-3, b=m-2015$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $-3.(m-2015)<0 \Rightarrow m>2015$

Tam giác ABC có một góc 120^0 , thì phải có:

$$8a+b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2}=0 \text{ với } \widehat{BAC}=120^0 \Rightarrow \tan\frac{\widehat{BAC}}{2}=\sqrt{3}$$

Nên có $8a+3b^3=0 \Leftrightarrow 8.(-3)+3(m-2015)^3=0 \Leftrightarrow m-2015=2 \Leftrightarrow m=2017$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=3x^4+2(m-2018)x^2+2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120^0.

A. $m=-2018$ **B.** $m=-2017$ **C.** $m=2017$ **D.** $m=2018$

Hướng dẫn:

Với $a=3, b=2(m-2018)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có:

$3.2(m-2018)<0 \Rightarrow m<2018$

Từ $8a+b^3.\tan^2 60^0=0 \Leftrightarrow 8.3+8.(m-2018)^3.3=0 \Leftrightarrow m-2018=-1 \Leftrightarrow m=2017$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Dạng toán 4:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0.

Chứng minh: Gọi H là trung điểm của BC thì luôn có: $H\left(0;-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(0;-\frac{b^2}{4a}\right)$

Diện tích $S_0=\frac{1}{2}AH.BC \Rightarrow S_0^2=\frac{1}{4}.\frac{b^4}{16a^2}.\left(-\frac{2b}{a}\right)=-\frac{b^5}{32a^3} \Leftrightarrow \boxed{32a^3(S_0)^2+b^5=0}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=mx^4+2x^2+m-2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=-2$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn:

Với $a=m, b=2$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $m.2<0 \Rightarrow m<0$

Tam giác ABC có diện tích bằng 1, thì :

$$32a^3(S_0)^2+b^5=0 \Leftrightarrow 32.m^3.1+2^5=0 \Leftrightarrow m^3+1=0 \Rightarrow m=-1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=mx^4+4x^2+2017^m-2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

A. $m=-2$ **B.** $m=4$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn:

Với $a=m, b=4$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $m.4<0 \Rightarrow m<0$

$$32a^3(S_0)^2+b^5=0 \Leftrightarrow 32.m^3(4\sqrt{2})^2+4^5=0 \Leftrightarrow m^3+1=0 \Leftrightarrow m=-1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Dạng toán 5:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

Chứng minh: $maxS_0 \Leftrightarrow \exists maxS_0^2=-\dfrac{b^5}{32a^3}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+2-2017m+2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

A. $m=0$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-0,5$ **D.** $m=\pm 0,5$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=-2(1-m^2)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có:

$$1.\left[-2(1-m^2)\right]<0 \Leftrightarrow 1-m^2>0 \Leftrightarrow -1<m<1$$

$$S_0=\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} \text{ nên } S_0=\sqrt{(1-m^2)^5}\le 1 \Rightarrow m=0$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 6:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có 3 góc nhọn.

Chứng minh:

$$\widehat{BAC}<90^0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}>0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}>0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}>0 \Leftrightarrow \boxed{b(b^3+8a)>0}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=-x^4-(m^2-6)x^2+2017m^3+2016m-2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có 3 góc nhọn.

A. $m>-2$ **B.** $-2<m<2$ **C.** $m<2$ **D.** $-\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$

Hướng dẫn:

Với $a=-1, b=-(m^2-6)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $-1\left[-(m^2-6)\right]<0 \Leftrightarrow -\sqrt{6}<m<\sqrt{6}$

$b(8a+b^3)>0 \Leftrightarrow \left[-(m^2-6)\right]\left\{8.(-1)+\left[-(m^2-6)\right]^3\right\}>0 \Leftrightarrow (m^2-6)\left[8+(m^2-6)^3\right]>0$

$\Rightarrow 8+(m^2-6)^3<0 \Leftrightarrow -2<m<2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Dạng toán 7:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp r_0.

Chứng minh:

$$S_0=p.r_0 \Rightarrow r_0=\frac{S_0}{p}=\frac{2S_0}{AB+BC+CA}=\frac{2.\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}}+2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}} \Leftrightarrow \boxed{r_0=\frac{b^2}{|a|\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)}}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4-mx^2+2017m^8+2015m^4-2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

A. $m=-2$ **B.** $m=0$ **C.** $m=2$ **D.** $m=1$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=-m$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1(-m)<0 \Rightarrow m>0$

Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, thì phải có:

$$r_0=\frac{b^2}{|a|\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)} \Leftrightarrow \frac{(-m)^2}{1\left(1+\sqrt{1-(-m)^3}\right)}=1 \Leftrightarrow m^2=1+\sqrt{1+m^3} \Leftrightarrow m=2$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4+2(m+5)x^2+2016m^3+2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính nội tiếp bằng 1.

A. $m=7$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=-7$ **D.** $m=-7$ hoặc $m=-4$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=2(m+5)$

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.2(m+5)<0 \Rightarrow m<-5$

$$r_0=\frac{b^2}{|a|\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{a}}\right)} \Leftrightarrow \frac{4(m+5)^2}{1.(1+\sqrt{1-8(m+5)^3}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+5=-2 \\ m+5=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=-7$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Dạng toán 8:
Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính R_0

Chứng minh: Gọi H là trung điểm của BC, khi đó

$$\frac{1}{2}AH.BC = \frac{AB.BC.CA}{4R_0} \Leftrightarrow 2R_0^2.AH^2 = AB^4$$

$$2R_0^2.\frac{b^4}{16a^2} = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{R_0 = \left|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right|}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = mx^4 + x^2 + 27m^{2016} - 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính $R = \frac{9}{8}$

A. $m = -2$ **B.** $m = -1$ hoặc $m = -2$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = -1$

Hướng dẫn:

Với $a = m, b = 1$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $m.1 < 0 \Rightarrow m < 0$

Tam giác ABC trong đường tròn có bán kính $R = \frac{9}{8}$, thì phải có:

$$R_0 = \left|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{1^3 - 8.m}{8.m.1}\right| = \frac{9}{8} \Leftrightarrow |1 - 8m| = 9|m| \Rightarrow m = -1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = mx^4 - 2x^2 + 2017m^3 - 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có bán kính ngoại tiếp bằng 1.

A. $m = 2$ **B.** $m = 1$ hoặc $m = 2$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn:

Với $a = m, b = -2$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có:

$m(-2) < 0 \Rightarrow m > 0$

$$R_0 = \left|\frac{b^3 - 8a}{8ab}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{(-2)^3 - 8.m}{8m.(-2)}\right| = 1 \Leftrightarrow |1 + m| = 2|m| \Rightarrow m = 1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Dạng toán 9:
Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị mà trong đó có $BC = m_0$

Chứng minh: $2\sqrt{-\frac{b}{2a}} = m_0 \Leftrightarrow \boxed{am_0^2 + 2b = 0}$

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - mx^2 - 2016m + 1026$ có 3 cực trị mà trong đó có $BC = \sqrt{2}$

A. $m = 1$ **B.** $m = 1$ hoặc $m = 2$ **C.** $m > 0$ **D.** $m = 2$

Hướng dẫn:

Với $a = m^2, b = -m$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có:

$m^2(-m) < 0 \Rightarrow m > 0$

$am_0^2 + 2b = 0 \Leftrightarrow m^2(\sqrt{2})^2 + 2(-m) = 0 \Leftrightarrow m(m-1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 10:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị mà trong đó có $AB = AC = n_0$

Chứng minh:

$$\sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}} = n_0 \Leftrightarrow \boxed{16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0}$$

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = mx^4 - mx^2 + 2016m^{2017} + 2018m - 1$ có 3 cực trị mà trong đó có $AC = 0,75$

A. $m = -1$ **B.** $m = -1$ hoặc $m = 1$

C. $m = 1$ **D.** $m \neq 0$

Hướng dẫn:

Với $a = m, b = -m$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $m(-m) < 0 \Rightarrow m \neq 0$

$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0 \Leftrightarrow 16.m^2(0,75)^2 - (-m)^4 + 8.m.(-m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2(1 - m^2) = 0 \Rightarrow m = \pm 1.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Dạng toán 11:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có $B, C \in Ox$

Chứng minh:

$$B, C \in Ox \Rightarrow y_B = y_C = 0 \Leftrightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \boxed{b^2 - 4ac = 0}$$

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = 1008x^4 - mx^2 + 1008$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có $B, C \in Ox$

A. $m=-1008$ | **B.** $m=1008$ hoặc $m=6$
C. $m=2016$ | **D.** $m>0$

Hướng dẫn:

Với $a=1008, b=-m, c=1008$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có:

$1008.(-m)<0 \Rightarrow m>0$

$b^2-4ac=0 \Leftrightarrow (-m)^2-4.1008.1008=0 \Leftrightarrow m^2=(2016)^2 \Rightarrow m=2016$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Dạng toán 12:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Chứng minh: Từ bài toán, luôn có:

$$\begin{cases} 0+\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right)+\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}=3.0 \\ c+\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)+c+\left(-\dfrac{b^2}{4a}\right)+c=3.0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{b^2}{2a}+3c=0 \Leftrightarrow \boxed{b^2-6ac=0}$$

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2-336m$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m<0$ | **B.** $m=-20$ hoặc $m=-16$
C. $m=-336$ | **D.** $m=-2016$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=m, c=-336m$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.m<0 \Rightarrow m<0$

$b^2-6ac=0 \Leftrightarrow m^2-6.1.(-336m)=0 \Leftrightarrow m(m+2016)=0 \Rightarrow m=-2016$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Dạng toán 13:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị thành tam giác có trực tâm O.

Chứng minh:

$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b^2c}{4a}=0 \Leftrightarrow b^4+8ab-4b^2c=0 \Leftrightarrow \boxed{b^3+8a-4ac=0}$$

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2+504m+2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

A. $m=-12\sqrt{14}$ | **B.** $m=-12$ hoặc $m=-14$
C. $m=\sqrt{14}$ | **D.** $m=504$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=m, c=504m+2$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.m<0 \Rightarrow m<0$

$b^3+8a-4ac=0 \Leftrightarrow m^3+8.1-4.1.(504m+2)=0 \Leftrightarrow m(m^2-2016)=0 \Rightarrow m=-12\sqrt{14}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 14:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị cùng gốc tọa độ O lập thành hình thoi.

Chứng minh: $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right), \overrightarrow{OC}=\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Theo bài toán, ta có: $AB=OC$

$$\text{hay } -\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{2b^2c}{4a}+c^2 \Leftrightarrow 2ac^2-b^2c=0 \Rightarrow \boxed{b^2-2ac=0}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=2x^4+mx^2+4$ có 3 cực trị cùng gốc tọa độ O lập thành hình thoi.

A. $m=4$ **B.** $m=-4$ **C.** $m<0$ **D.** $m=-16$

Hướng dẫn:

Với $a=2, b=m, c=4$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $2.m<0 \Rightarrow m<0$

$b^2-2ac=0 \Leftrightarrow m^2-2.2.4=0 \Leftrightarrow m^2=16 \Rightarrow m=-4$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Dạng toán 15:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn nội tiếp.

Chứng minh: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b^2c}{4a}=0 \Leftrightarrow \boxed{b^3-8a-4abc=0}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=mx^4+2x^2-2$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn nội tiếp.

A. $m=-2$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

Hướng dẫn:

Với $a = m, b = 2, c = -2$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $m.2 < 0 \Rightarrow m < 0$

$$b^3 - 8a - 4abc = 0 \Leftrightarrow 2^3 - 8.m - 4.m.2.(-2) = 0 \Leftrightarrow 8 + 8m = 0 \Leftrightarrow m = -1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Dạng toán 16:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Chứng minh:

$$OA = OB \Leftrightarrow c^2 = -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{2b^2c}{4a} + c^2 \Leftrightarrow b^4 - 8ab^2c - 8ab = 0 \Leftrightarrow \boxed{b^3 - 8a - 8abc = 0}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = -mx^4 + x^2 - 2m - 1$ có 3 cực trị lập tam giác có O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

A. $m = 4$ **B.** $m = -4$ **C.** $m = -0,25$ **D.** $m = 0,25$

Hướng dẫn:

Với $a = -m, b = 1, c = -2m - 1$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $-m.1 < 0 \Rightarrow m > 0$

$$b^3 - 8a - 8abc = 0 \Leftrightarrow 1^3 - 8.(-m) - 8.(-m).1.(-2m-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 16m^2 = 0 \Rightarrow m = 0,25$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Dạng toán 17:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị lập tam giác có cạnh đáy bằng k lần cạnh bên.

Chứng minh:

$$BC = kAB \Leftrightarrow 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} = k\sqrt{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}} \Leftrightarrow \boxed{b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0}$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2017m - 2016$ có 3 cực trị lập tam giác thỏa mãn điều kiện $2AB = 3BC$.

A. $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = -4$ **D.** $m = 4$

Hướng dẫn:

Với $a = 1, b = -2m, k = \frac{2}{3}$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $1.(-2m)<0 \Leftrightarrow m>0$

$$b^3.k^2-8a(k^2-4)=0 \Leftrightarrow (-2m)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2-8.1.\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\right]=0 \Leftrightarrow m^3=8 \Leftrightarrow m=2$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 18:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Chứng minh:

Gọi M,N là giao điểm đồ thị với trục hoành, khi đó $\Delta AOM \sim \Delta AHB$, H là trung điểm $BC \Rightarrow \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}}=\left(\frac{OA}{AH}\right)^2=\frac{1}{2} \Rightarrow AH=\sqrt{2}OA \Leftrightarrow \boxed{b^2=4\sqrt{2}|ac|}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=mx^4+\sqrt[4]{2}x^2+1$ có 3 cực trị sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

A. $m=0,25$ **B.** $m=-0,25$

C. $m=0,25$ hoặc $m=-0,25$ **D.** $m=-4$

Hướng dẫn:

Với $a=m, b=\sqrt[4]{2}, c=1$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có: $m.\sqrt[4]{2}<0 \Rightarrow m<0$

$$b^2=4\sqrt{2}|ac| \Leftrightarrow (\sqrt[4]{2})^2=4\sqrt{2}|m.1| \Leftrightarrow 4|m|=1 \Rightarrow m=-0,25$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Dạng toán 19:

Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có 3 cực trị cách đều trục hoành.

Chứng minh: $d(A,Ox)=d(B;Ox) \Leftrightarrow |y_A|=|y_B| \Leftrightarrow |4ac-b^2|=|4ac| \Leftrightarrow \boxed{b^2-8ac=0}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y=x^4+mx^2-252m$ có 3 cực trị cách đều trục hoành.

A. $m=-252$ **B.** $m=2016$

C. $m=-2016$ **D.** $m=0$ hoặc $m=-2016$

Hướng dẫn:

Với $a=1, b=m, c=-252m$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab<0$, tức là phải có

$1.m < 0 \Rightarrow m < 0$

$b^2 - 8ac = 0 \Leftrightarrow m^2 + 8.1.252m = 0 \Leftrightarrow m(m+2016) = 0 \Rightarrow m = -2016$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

LIÊN QUAN TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, nên $M\left(x_0; y_0 = \dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng: $\Delta_1 : x + \dfrac{d}{c} = 0$,

tiệm cận ngang $\Delta_2 : y - \dfrac{a}{c} = 0$

Khoảng cách từ M đến Δ_1, Δ_2 là: $d_1 = \left|x_0 + \dfrac{d}{c}\right| = \left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|, d_2 = \left|y_0 - \dfrac{a}{c}\right| = \left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|$

Ta có kết quả sau: $d_1.d_2 = \left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|.\left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| = p$, với $p = \left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|$ thì $p = const$

$d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{p} \Rightarrow \min d = 2\sqrt{p}$, xảy ra khi $\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right| = \left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \Leftrightarrow (cx_0+d)^2 = |ad-bc|$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+5}{x+1}$ những điểm M có hoành độ x_0 sao cho M cách đều hai đường tiệm cận.

A. $x_0 = -5$ hoặc $x_0 = -3$ **B.** $x_0 = 5$

C. $x_0 = 3$ **D.** $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = 5$

Hướng dẫn:

$d_1 = d_2 \Leftrightarrow (cx_0+d)^2 = |ad-bc| \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = |-4| \Leftrightarrow x_0 = -5$ hoặc $x_0 = -3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Biết rằng M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{5x+1}{x+1}$, tích khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận bằng:

A. 1 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 3

Hướng dẫn:

$p = \left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right| = \left|\dfrac{5.1-1.1}{1^2}\right| = 4$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của hàm số $y = \dfrac{x-m}{x+1}$ bằng 2 ?.

A. $m = 0$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = -2$ hoặc $m = 0$ **D.** $m = 1$

Hướng dẫn:

$p = \left|\dfrac{ad - bc}{c^2}\right| \Leftrightarrow p = |1 + m|$, $\min d = 2\sqrt{p}$

và $\min d = 2 \Rightarrow \sqrt{p} = 1$ hay $|1 + m| = 1 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = 0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Một số dạng toán cơ bản về liên quan tiệm cận đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

Dạng toán 1:

Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến Δ_1 bằng $k > 0$ lần khoảng cách từ M đến Δ_2.

Chứng minh: $d_1 = kd_2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{cx_0 + d}{c}\right| = k\left|\dfrac{ad - bc}{c(cx_0 + d)}\right| \Rightarrow x_0 = -\dfrac{d}{c} \pm \sqrt{kp}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$ những điểm M có hoành độ x_0 sao cho khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng bằng 4 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

A. $x_0 = -\dfrac{5}{2}$ hoặc $x_0 = \dfrac{3}{2}$ ***B.*** $x_0 = \dfrac{5}{2}$

C. $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ ***D.*** $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ hoặc $x_0 = \dfrac{5}{2}$

Hướng dẫn:

$d_1 = kd_2 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{d}{c} \pm \sqrt{kp} \xrightarrow[k=4]{p=1} x_0 = -\dfrac{1}{2} \pm 2 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{5}{2}$ hoặc $x_0 = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 2:

Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ những điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến I là ngắn nhất, biết I là giao điểm hai đường tiệm cận.

Chứng minh: $M\left(x_0; \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d}\right), I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right) \Rightarrow \min IM = \sqrt{2p}$ khi $x_0 = -\dfrac{d}{c} \pm \sqrt{p}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x + 1}{x - 5}$ những điểm M có hoành độ x_0 sao cho khoảng cách từ điểm M đến điểm I là ngắn nhất, biết I là giao điểm hai đường tiệm cận.

A. $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = 9$ **B.** $x_0 = -1$

C. $x_0 = -9$ **D.** $x_0 = -9$ hoặc $x_0 = -1$

Hướng dẫn:

$\min IM = \sqrt{2p}, p = 16$ khi $x_0 = -\dfrac{d}{c} \pm \sqrt{p} \Rightarrow x_0 = 5 \pm 4 \Rightarrow x_0 = 9$ hoặc $x_0 = 1$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 3:

Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ những điểm M sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M vuông góc với đường thẳng IM, I là giao điểm hai đường tiệm cận.

Chứng minh: Hệ số góc đường thẳng IM là $k = \dfrac{y_0 - y_I}{x_0 - x_I} = -\dfrac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}$; tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hệ số góc: $y'(x_0) = \dfrac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}$

Theo bài toán, ta phải có: $y'(x_0).k = -1 \Rightarrow (cx_0+d)^2 = |ad-bc|$

Ví dụ minh họa

Ví dụ: Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ những điểm M có hoành độ x_0 sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M vuông góc với đường thẳng IM, I là giao điểm hai đường tiệm cận.

A. $x_0 = -3$ hoặc $x_0 = 5$ ***B.*** $x_0 = -5$

C. $x_0 = 3$ ***D.*** $x_0 = -5$ hoặc $x_0 = 3$

Hướng dẫn:

$(cx_0+d)^2 = |ad-bc| \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = |-4| \Leftrightarrow x_0 = 5$ hoặc $x_0 = -3$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Dạng toán 4:

Biết rằng M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; tiếp tuyến (t) của đồ thị hàm số tại M cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B và diện tích ΔAIB luôn là hằng số không đổi, I là giao điểm hai đường tiệm cận.

Chứng minh: $(t): y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

$$(t) \cap \Delta_1 \Rightarrow A\left(-\frac{d}{c}; \frac{2bc - ad + acx_0}{c(cx_0+d)}\right) \Rightarrow IA = \left|-\frac{2(ad-bc)}{c(cx_0+d)}\right|$$

$(t) \cap \Delta_2 \Rightarrow B\left(\dfrac{d+2acx_0}{c}; \dfrac{a}{c}\right) \Rightarrow IB = \left|\dfrac{2(cx_0+d)}{c}\right|$, *$M$ luôn luôn là trung điểm AB*

ΔAIB vuông tại I nên: $S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}.IA.IB = 2p$ *và* $S_{\Delta AIB} = \frac{IA.IB.AB}{4R}$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔAIB nên $minR = 8\sqrt{p}; \min AB^2 = 8\sqrt{\frac{ad-bc}{c}}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Biết rằng M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$; tiếp tuyến (t) của đồ thị hàm số tại M cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó diện tích tam giác AIB bằng bao nhiêu, biết I là giao điểm hai đường tiệm cận?.

A. $0,5$ **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Hướng dẫn:

$S_{\Delta AIB} = 2p, p = \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right| = \left|\frac{1.(-2)-1.(-1)}{1^2}\right| = 1 \Rightarrow S_{\Delta AIB} = 2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 2: Biết rằng M là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x-8}{x+1}$, I là giao điểm hai đường tiệm cận và d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

Có các phát biểu sau:

(1). Khoảng cách IM ngắn nhất khi M có hoành độ $x_0 = -4$ hoặc $x_0 = 2$

(2). $d_1 = 4d_2$ khi M có hoành độ $x_0 = -7$ hoặc $x_0 = 5$

(3). Tích $d_1.d_2$ bằng 6 và tổng $d_1 + d_2$ ngắn nhất bằng 9

(4). Tiếp tuyến (t) của đồ thị hàm số cắt hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B thì diện tích tam giác AIB khi đó bằng 18 và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB nhỏ nhất bằng 24

Số phát biểu đúng là:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn:

$\min IM = \sqrt{2p}$ khi $x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{p} = -1 \pm 3 \Rightarrow (1)$ đúng.

$d_1 = kd_2 \Rightarrow x_0 = -\frac{d}{c} \pm \sqrt{kp} \xrightarrow[k=4]{p=9} x_0 = -1 \pm 6 \Rightarrow (2)$ đúng.

$d_1.d_2 = p = 9, d_1 + d_2 = 2\sqrt{p} = 6 \Rightarrow (3)$ sai.

$S_{\Delta AIB} = \frac{1}{2}.IA.IB = 2p = 18; minR = 8\sqrt{p} = 24 \Rightarrow (4)$ đúng.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

LIÊN QUAN TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến cấp số

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) , đặt $t = x^2 \ge 0$, thì có : $at^2 + bt + c = 0$ (2)

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là: $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1.t_2 > 0 \end{cases}$

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt lần lượt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi: $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$. Theo định lý Vi – et $t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a}$ suy ra $t_1 = -\dfrac{b}{10a}; t_2 = -\dfrac{9b}{10a}$, kết hợp $t_1.t_2 = \dfrac{c}{a}$ nên có: $9ab^2 = 100a^2c$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập *thành cấp số cộng, thì điều kiện cần và đủ là:* $\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm công sai d để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2mx - 4m + 16$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập cấp số cộng.

A. $d = 2\sqrt{2}$ **B.** $d = -2\sqrt{2}$ **C.** $d = -2$ **D.** $d = -\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

$a = 1, b = -3m \Rightarrow x_2 = -\dfrac{b}{3a} = m$

$x_2 = m$ thì có: $m^3 - 3m.m^2 + 2m.m - 4m + 16 = 0 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + 2m - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (m-2)(m^2 - m + 4) = 0 \Rightarrow m = 2$

Với $m = 2$ thì $x^3 - 6x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Vậy, $x \in \{2 - 2\sqrt{2}; 2; 2 + 2\sqrt{2}\}$ lập cấp số cộng có công sai $d = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị thực m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (3m+1)x^2 + (5m+4)x - 8$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập cấp số nhân.

A. $m = -2$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 1$ **D.** không có m

Hướng dẫn:

$a = 1, d = -8 \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}} = 2$

$x_2 = 2$ thì có: $2^3 - (3m+1)2^2 + (5m+4)2 - 8 = 0 \Rightarrow m = 2$

Với $m = 2$ thì $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 1, x = 4$

Vậy, $x \in \{1; 2; 4\}$ lập cấp số nhân

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Tìm tất cả giá trị thực m để đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập cấp số nhân.

A. $m = -13$ **B.** $m = 9$ **C.** $m = 3$ **D.** $m \neq -1$

Hướng dẫn:

$a = -1; b = 2(m+2); c = -2m - 3$

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ -\dfrac{b}{a}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ 9ab^2=100a^2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [2(m+2)]^2-4(-1)(-2m-3)>0 \\ -\dfrac{2(m+2)}{-1}>0 \\ \dfrac{-2m-3}{-1}>0 \\ 9.(-1)[2(m+2)]^2=100.(-1)^2(-2m-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2}<m\neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{13}{9} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-\dfrac{13}{9} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Một số công thức tính nhanh " thường gặp " liên quan đến tương giao giữa đường thẳng $y=kx+p$ và đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Giả sử $d: y=kx+p$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M,N.

Với $kx+p=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2+Bx+C=0$ thỏa điều kiện $cx+d\neq 0$, có $\Delta=B^2-4AC$. Khi đó:

1). $M(x_1;kx_1+p),N(x_2;kx_2+p)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(x_2-x_1;k(x_2-x_1))\Rightarrow MN=\sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}$

Chú ý: khi $\min MN$ *thì tồn tại* $\min \Delta, k=const$

2). $OM^2+ON^2=(k^2+1)(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)2kp+2p^2$

3). $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=(x_1.x_2)(1+k^2)+(x_1+x_2)kp+p^2$

4). $OM=ON\Leftrightarrow (x_1+x_2)(1+k^2)+2kp=0$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm tất cả giá trị thực m để đường thẳng $d: y=2x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho $MN=\sqrt{5}$.

A. $m=-2$ hoặc $m=10$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** không có m

Hướng dẫn:

$2x+m=\dfrac{2x-2}{x+1}\Leftrightarrow 2x^2+mx+m+2=0, x\neq -1$ có $\Delta=m^2-8m-16$

Với $k=2, A=2$ thì $MN=\sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}=\sqrt{\dfrac{5}{4}(m^2-8m-16)}$

Ta có: $\sqrt{\dfrac{5}{4}(m^2-8m-16)}=\sqrt{5}\Leftrightarrow m^2-8m-20=0\Leftrightarrow m=-2$ hoặc $m=10$ thỏa $\Delta>0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị thực m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$ tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho MN ngắn nhất.

A. $m=-2$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Hướng dẫn:

$-x+m=\dfrac{2x+1}{x+2} \Leftrightarrow x^2-(m-4)x-2m+1=0, x\neq -2$ có $\Delta=m^2+12$

Với $k=-1, A=1$ thì $MN=\sqrt{(k^2+1)\dfrac{\Delta}{A^2}}=\sqrt{2.\Delta}$, MN ngắn nhất khi tồn tại $\min\Delta$

Ta có: $\Delta=m^2+12\geq 12 \Rightarrow \min\Delta=12$ khi $m=0, MN=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 3: Tìm tất cả giá trị thực m để đường thẳng $d: y=mx-m+2$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho $MN=4$

A. $m=-2$ **B.** $m=0$ **C.** $m=1$ **D.** $m=2$

Hướng dẫn:

$mx-m+2=\dfrac{2x}{x-1} \Leftrightarrow mx^2-2mx+m-2=0, x\neq 1$ có $\Delta=8m>0 \Rightarrow m>0$

Với $k=m, A=m$ thì

$$MN=\sqrt{(m^2+1)\frac{8m}{m^2}}=\sqrt{8\left(m+\frac{1}{m}\right)} \text{ và } MN=4 \Leftrightarrow m+\frac{1}{m}=2 \ \ (m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Chú ý:

Do $m>0$ *nên* $m+\dfrac{1}{m}\geq 2 \Rightarrow MN\geq 4 \Rightarrow \min MN=4$ *khi* $m=\dfrac{1}{m} \Rightarrow m=1$ *do* $m>0$

Ví dụ 4: Tìm tất cả giá trị thực m để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-2}$ tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho ΔOMN vuông tại O.

A. $m=-1$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

Hướng dẫn:

$x+m=\dfrac{x+2}{2x-2} \Leftrightarrow 2x^2+(2m-3)x-2m-2=0, x\neq 1$ có $\Delta=4m^2+4m+25$

ΔOMN vuông tại O khi $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=0 \Leftrightarrow (x_1.x_2)(1+k^2)+(x_1+x_2)kp+p^2=0$

Với $k=1, A=2, p=m$ thì có: $(-m-1)(1+1^2)+(-\dfrac{2m-3}{2})1.m+m^2=0 \Leftrightarrow m=-4$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 5: Tìm tất cả giá trị thực m để đường thẳng $d: y=-x+m$ cắt đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x}$ tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho ΔOMN cân tại O.

A. $m=0,25$ **B.** $m=1$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

Hướng dẫn:

$-x+m=\dfrac{x-1}{2x} \Leftrightarrow 2x^2-(2m-1)x-1=0, x\neq 0$ có $\Delta=4m^2-4m+9$

ΔOMN cân tại O nên có $OM=ON \Leftrightarrow (x_1+x_2)(1+k^2)+2kp=0$

Với $k=-1; A=2, p=m$ thì có: $\left(\dfrac{2m-1}{2}\right)(1+1^2)+2.1.m=0 \Leftrightarrow 4m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 6: Tìm tất cả giá trị thực $m \neq 0$ để đường thẳng $d: y = 2x - 2m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x - m}{mx + 1}$ tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = -\dfrac{5}{2}$.

A. $m = -2,5$ **B.** $m = -2$ **C.** $\forall m \in \mathbb{R}$ **D.** $\forall m \neq 0$

Hướng dẫn:

$$2x - 2m = \frac{2x - m}{mx + 1} \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - 1 = 0, m \neq 0, x \neq -\frac{1}{m}$$

Với $k = 2, A = 2, p = -2m$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + 2^2) + (m).2.(-2m) + (-2m)^2 = -\frac{5}{2}, \forall m \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***