

CHƯƠNG 1: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.

• Định lí Pi-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

• $AB^2 = BC.BH$; $AC^2 = BC.CH$

• $AH^2 = BH.CH$

• $AB.AC = BC.AH$

• $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$. AH là đường cao.
Tính BH, CH, AC và AH.

HD:

$BH = 1,8\text{cm}$, $CH = 3,2\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, $AH = 2,4\text{cm}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 10\text{cm}$, $AB = 8\text{cm}$. AH là đường cao.
Tính BC, BH, CH, AH.

HD:

$BC = 2\sqrt{41}$; $BH = 32\sqrt{41}/41$; $CH = 50\sqrt{41}/41$; $AH = 40\sqrt{41}/41$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 12\text{cm}$. Tính chiều dài hai cạnh góc vuông biết $AB = \frac{2}{3}AC$.

HD: $AB = \frac{24\sqrt{13}}{13}(\text{cm})$, $AC = \frac{36\sqrt{13}}{13}(\text{cm})$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết $BH = 10\text{cm}$, $CH = 42\text{cm}$. Tính BC, AH, AB và AC.

HD:

$$BC = 52 \text{ cm}, AH = 2\sqrt{105} \text{ cm}, AB = 2\sqrt{130} \text{ cm}, AC = 2\sqrt{546} \text{ cm}.$$

Bài 5. Hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10cm và góc A là 60°

a) Tính cạnh BC. b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

HD:

a, Gọi P và Q là chân đường cao kẻ từ D và C xuống AB: $AP=QB$ mà $PQ=DC=10\text{cm}$ nên $AP=QB=(30-10):2=10\text{cm}$.

b, $NM=DP=AP.\tan \hat{A}=10\sqrt{3}\text{cm}$.

Bài 6. Cho tứ giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng 60° và góc A là 90°

a) Tính đường chéo BD. b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC. c) Tính HK. d) Vẽ $BE \perp DC$ kéo dài. Tính BE, CE và DC.

HD:

a, $BD^2=AB^2+AD^2 \Rightarrow BD=10\sqrt{2}\text{cm}$.

b, ΔABC đều ($AB=AC$ mà $\hat{B} = 60^\circ$) nên $BH=5\sqrt{3}\text{cm}$,

ΔADK có $\widehat{KAD} = 30^\circ$ nên $KD=1/2AD=5\text{cm}$,

c, ΔABH có $\widehat{ABH} = 30^\circ$ nên $AH=1/2AB=5\text{cm}$, mà $AK^2=AD^2-DK^2=75$ nên $AK=5\sqrt{3}\text{cm}$ suy ra $HK=5\sqrt{3}-5\text{ cm}$.

d, ΔADC cân có $\widehat{CAD} = 30^\circ$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{DCA} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{BCE} = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$

nên ΔBEC vuông cân tại E nên $BE=EC$ mà $BE^2+EC^2=BC^2 \Rightarrow BE=EC=5\sqrt{3}\text{cm}$.

Trong ΔKDC có $KD=5\text{cm}$, $KC=AC-AK=10-5\sqrt{3}\text{ cm}$ Dùng pytago tính DC.

Bài 7. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Từ trung điểm O của AB vẽ tia $Ox \perp AB$. Trên Ox , lấy điểm D sao cho $OD = \frac{a}{2}$. Từ B kẻ BC vuông góc với đường thẳng AD .

a) Tính AD , AC và BC theo a .

b) Kéo dài DO một đoạn $OE = a$. Chứng minh bốn điểm A , B , C và E cùng nằm trên một đường tròn.

HD:

a, $AD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $\triangle ADO \sim \triangle ABC$ nên $AD.AC = AB.AO \Rightarrow AC = \frac{4\sqrt{5}a}{5}$; Dùng pytago cho tam

giác ABC để tính $BC = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

b, Chỉ ra $OA = OB = OC = OE$.

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H . Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M , N sao cho góc $AMC =$ góc $ANB = 90^\circ$. Chứng minh: $AM = AN$.

HD: $\triangle ABD \sim \triangle ACE \Rightarrow AM^2 = AC.AD = AB.AE = AN^2$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$ và $AH = 420$.

Tính chu vi tam giác ABC .

HD:

Đặt $AB = 20k, AC = 21k \Rightarrow BC = 29k$. Từ $AH.BC = AB.AC \Rightarrow k = 29$. *HD:* $P_{ABC} = 2030$

Bài 10. Cho hình thang $ABCD$ vuông góc tại A và D . Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O . Biết $AB = 2\sqrt{13}, OA = 6$, tính diện tích hình thang $ABCD$.

Tính được: $OB = 4, OD = 9, OC = 13,5$. *HD:* $S = 126,75$.

II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

1. Định nghĩa: Cho tam giác vuông có góc nhọn α .

$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}; \quad \tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}; \quad \cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

Chú ý:

• Cho góc nhọn α . Ta có: $0 < \sin \alpha < 1$; $0 < \cos \alpha < 1$.

• Cho 2 góc nhọn α, β . Nếu $\sin \alpha = \sin \beta$ (hoặc $\cos \alpha = \cos \beta$, hoặc $\tan \alpha = \tan \beta$, hoặc $\cot \alpha = \cot \beta$) thì $\alpha = \beta$.

2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau:

Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cosin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$$

Ví dụ: $\sin 25^\circ = \cos 65^\circ$; $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$

3. Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:

Tỉ số LG α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Một số hệ thức lượng giác

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha};$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

5. Công thức tính diện tích tam giác:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = P \cdot r = \frac{abc}{4R}$$

R: Bán kính đường tròn ngoại tiếp, r: Bán kính đường tròn nội tiếp.

(Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

Trong tam giác bất kì:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = 2R$$

Với a là cạnh đối diện góc A, b là cạnh đối diện góc B, c là cạnh đối diện góc C.

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH = 64cm và CH = 81cm. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

HD: $AB^2 = BH \cdot BC$ nên $AB = 96,3\text{cm}$; $AC^2 = HC \cdot BC$ nên $AC = 108,4\text{cm}$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{108,4}{145} = 0,75 \text{ nên } \hat{C} = 41^\circ; \hat{B} = 49^\circ.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi:

a) BC = 5cm, AB = 3cm. b) BC = 13 cm, AC = 12 cm. c) AC = 4cm, AB = 3cm.

HD:

a) $\sin B = 0,8$; $\cos B = 0,6$

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 10cm và AC = 15cm.

a) Tính góc B.

b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI.

c) Vẽ AH \perp BI tại H. Tính AH.

HD:

a, $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{10}$ nên $\hat{B} = 56^\circ$.

b, $\tan \widehat{ABI} = \frac{AI}{AB}$ nên $AI = AB \cdot \tan \widehat{ABI} = 10 \cdot \tan 28^\circ = 5,3 \text{ cm}$

c, $\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$ nên $AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = 10 \cdot \sin 28^\circ = 4,7 \text{ cm}$.

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 35^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 55^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$. b)

$\sin^2 10^\circ - \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ - \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$. c)

$\sin 15^\circ + \sin 75^\circ - \cos 15^\circ - \cos 75^\circ + \sin 30^\circ$ d) $\sin 35^\circ + \sin 67^\circ - \cos 23^\circ - \cos 55^\circ$

e) $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ$ f) $\sin 20^\circ - \tan 40^\circ + \cot 50^\circ - \cos 70^\circ$

HD: Dùng công thức: $\sin(90^\circ - a) = \cos a$; $\tan(90^\circ - a) = \cot a$.

a) $(\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ) + (\cos^2 25^\circ + \cos^2 65^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \cos^2 55^\circ) + \cos^2 45^\circ = (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3,5$

b) $-\frac{3}{4}$ c) 0,5 d) 0 e) 2 f) 0.

Bài 5. Cho biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn α , tính các tỉ số lượng giác còn lại

của α : a) $\sin \alpha = 0,8$ b) $\cos \alpha = 0,6$ c) $\tan \alpha = 3$ d)

$\cot \alpha = 2$

HD: Dùng các công thức trong mục 4 (một số hệ thức lượng) để tính. Chú ý góc α nhọn thì $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$.

a) $\cos \alpha = 0,6$ b) $\sin \alpha = 0,8$

Bài 6. a. Cho góc nhọn α . Biết $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $\cot \alpha$.

b. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $A = (\sin \alpha - 3 \cos \alpha) / (3 \sin \alpha + 7 \cos \alpha)$

HD:

$$a, \cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{5} \quad (1) \text{ nên } (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = \frac{1}{25} \text{ hay } \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos\alpha.\sin\alpha = \frac{1}{25} \text{ hay}$$

$$\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{12}{25}$$

$$\text{Ta có: } (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\cos\alpha.\sin\alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \text{ nên } \cos\alpha + \sin\alpha = \frac{7}{5}$$

(2) Từ (1)(2) tính được $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$, từ đó tính $\cot\alpha$. (HD: $\cot\alpha = \frac{4}{3}$)

$$b, \text{ Chia cả tử số và mẫu số cho } \cos\alpha \text{ ta được: } A = \frac{\tan\alpha - 3}{3\tan\alpha + 7} = -\frac{1}{13}.$$

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết $\cos A = \frac{5}{13}$. Tính $\tan B$.

$$\text{HD: } \tan B = \frac{5}{12}.$$

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$

b) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

c) $\sin\alpha - \sin\alpha \cos^2\alpha$

d) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cos^2\alpha$

e) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha \tan^2\alpha$

f) $\cos^2\alpha + \tan^2\alpha \cos^2\alpha$

HD:

a) $\sin^2\alpha$

b) 2

c) $\sin^3\alpha$

d) 1

e) $\sin^2\alpha$

f) 1.

Bài 9. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$

b) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 4$

HD:

a, Biến đổi tương đương hai vế

b, Biến đổi vế trái.

Bài 10. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C.

a) Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

b) Có thể xảy ra đẳng thức $\sin A = \sin B + \sin C$ không?

c) Chứng minh: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B$ (Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

HD: a) Vẽ đường cao AH. Xét ΔAHB và ΔAHC có:

$$\sin C = \frac{AH}{AC}; \sin B = \frac{AH}{AB} \text{ nên } \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AB}{AC} \text{ hay } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

Tương tự ta cũng chứng minh: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$

b) không. Vì $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$. (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Nếu $\sin B + \sin C = \sin A$ thì $a=b+c$: Vô lí.

c) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$ mà $\sin C = \frac{AH}{AC}$ nên $AH = AC \cdot \sin C$

Suy ra:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C. \text{ Các công thức khác chứng minh tương tự.}$$

III. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = a, AC = b, AB = c$.

$$b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C; \quad c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B$$

$$b = c \cdot \tan B = c \cdot \cot C; \quad c = b \cdot \tan C = b \cdot \cot B$$

BÀI TẬP:

Bài 1. Giải tam giác vuông ABC, biết góc $A=90^\circ$ và:

a) $a = 15\text{cm}; b = 10\text{cm}$

b) $b = 12\text{cm}; c = 7\text{cm}$

HD:

a) $B=42^\circ, C=48^\circ, c=11,18\text{cm}$

b) $B=60^\circ, C=30^\circ, a=14\text{cm}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có góc $B=60^0$, $C=50^0$, $AC=35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

HD: $S \approx 509\text{cm}^2$. Vẽ đường cao AH. Tính AH, HB, HC.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD có góc $A=D=90^0$, $C=40^0$, $AB=4\text{cm}$, $AD=3\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác.

HD: $S = 17\text{cm}^2$. Vẽ $BH \perp CD$. Tính DH, BH, CH.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC = 4\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$, góc $AOB = 50^0$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

HD: $S \approx 8\text{cm}^2$. Vẽ $AH \perp BD$, $CK \perp BD$. Chú ý: $AH = OA \cdot \sin 50^0$, $CK = OC \cdot \sin 50^0$.

Bài 5. Chứng minh rằng:

- Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.
- Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

HD: a) Gọi α là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC. Vẽ đường cao CH.

$$CH = AC \cdot \sin \alpha$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 21\text{m}$, $AC = 28\text{m}$, $BC = 35\text{m}$.

- Chứng minh tam giác ABC vuông.
- Tính $\sin B, \sin C$.

HD:

a, Dùng Pytago

$$b, \sin B = \frac{4}{5}; \sin C = \frac{3}{5}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Cho biết $HB = 112$, $HC = 63$. a) Tính độ dài AH. b) Tính độ dài AD.

HD: a) $AH = 84$ b) $AD = 60\sqrt{2}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 5$, $CH = 6$. a) Tính AB, AC, BC, BH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

HD: a) $AB = \frac{5\sqrt{61}}{6}$, $AC = \sqrt{61}$, $BH = \frac{25}{6}$ b) $S = \frac{305}{12}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 16$, $BH = 25$. a) Tính AB, AC, BC, CH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

HD:

a, Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông AHB để tính AB.

Dùng công thức: $AB^2 = BH \cdot BC$ để tính BC và suy ra HC.

$AH \cdot BC = AC \cdot AB$ để tính AC.

b, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB$.

Bài 5. Cho hình thang ABCD có góc $A = D = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O.

a) Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy.

b) Cho $AB = 9$, $CD = 16$. Tính diện tích hình thang ABCD.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

HD: a) Vẽ $AE \parallel BD \Rightarrow AB = ED$ và $AE \perp AC$. b) $S = 150$

c) $OA = 7,2$; $OB = 5,4$; $OC = 12,8$; $OD = 9,6$.

Bài 6. Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 10$, $CD = 27$, $AC = 12$, $BD = 35$.

HD: $S = 210$. Vẽ $BE \parallel AC$ ($E \in CD$) $\Rightarrow DE^2 = BD^2 + BE^2$.

Bài 7. Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.

b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

HD: a) Tính được $AB = 24\text{cm}$, $AC = 45\text{cm}$, $BC = 51\text{cm} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

b) Gọi O là giao điểm ba đường phân giác. $S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}$.

Với $S_{OBC} = \frac{r \cdot BC}{2}$; $S_{OCA} = \frac{r \cdot AC}{2}$; $S_{OAB} = \frac{r \cdot AB}{2}$; $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$ ta được $r = 9\text{cm}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết góc A=48°, AH=13cm. Tính chu vi ΔABC

HD: $BC \approx 11,6\text{cm}$; $AB = AC \approx 14,2\text{cm}$.

Bài 9. Cho ΔABC vuông tại A, $AB = a$, $AC = 3a$. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $AD = DE = EC$.

a) Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$.

b) Chứng minh ΔBDE đồng dạng ΔCDB .

c) Tính tổng góc (AEB+BCD).

HD: a) $DB^2 = 2a^2 = DE \cdot DC$ c) Góc(AEB+BCD)=ADB=45°.

Bài 10. Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết $AD = 5a$, $AC = 12a$.

a) Tính $\frac{\sin B + \cos B}{\sin B - \cos B}$.

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

HD: a) $\frac{17}{7}$

b) TH1: ABCD là hình thang cân, kẻ CH và DM cùng vuông góc với AB,

- Tính CH rồi suy ra HB, mà $AM = HB$ nên $DC = HM$. $\Rightarrow S_{ABCD}$

TH2: Nếu ABCD là hình bình hành thì $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC \cdot CB$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HE = 2HA$. Gọi I là hình

chiều của D trên HE.

a) Tính AB, AC, HC, biết AH = 4cm, HB = 3cm.

b) Tính $\tan \widehat{IED}$; $\tan \widehat{HEC}$ c) Chứng minh $\widehat{IED} = \widehat{HEC}$

d) Chứng minh: $DE \perp EC$.

HD: a) $AB = 5\text{ cm}$, $AC = \frac{20}{3}\text{ cm}$, $HC = \frac{16}{3}\text{ cm}$ b) $\tan \widehat{IED}$; $\tan \widehat{HEC} = 3/2$

d) góc $\widehat{DEC} = \widehat{IED} + \widehat{HEC} = 90^\circ$.

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AH = h$. Chứng minh rằng tam giác có các cạnh $a-h$; $b-c$; h là một tam giác vuông.

HD: Chứng minh $(b-c)^2 + h^2 = (a-h)^2$.

Bài 13. Cho tam giác nhọn ABC, diện tích bằng 1. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF.

Chứng minh rằng:

a) $S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$. b) $S_{DEF} = \sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$.

HD: a) Chứng minh $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$ b) $S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{AEF} + S_{BFD} + S_{CDE})$

Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A có $\sin C = \frac{1}{4 \cos B}$. Tính các tỉ số lượng giác của góc B

và C.

HD: $\cos B = \frac{1}{2}$; $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin C = \frac{1}{2}$; $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CL. Chứng minh:

a) $\Delta ANL \sim \Delta ABC$

b) $AN \cdot BL \cdot CM = AB \cdot BC \cdot CA \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

HD:

a, Xét ΔALC và ΔANB có $\widehat{ALC} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ nên $\Delta ALC \sim \Delta ANB$ (g.g) nên

$$\frac{AL}{AN} = \frac{AC}{AB}.$$

Xét ΔANL và ΔABC có \hat{A} chung $\frac{AL}{AN} = \frac{AC}{AB}$ nên $\Delta ANL \sim \Delta ABC$ (c.g.c)

b, $AN=AB.\cos A$; $BL=BC.\cos B$; $CM=AC.\cos C$.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} = 15^\circ$, $BC = 4\text{cm}$.

a) Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Tính \widehat{AMH} , AH, AM, HM, HC.

b) Chứng minh rằng: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

HD: a) $\widehat{AMH} = 30^\circ$; $AH = 1\text{cm}$; $AM = 2\text{cm}$; $HM = \sqrt{3}\text{cm}$; $HC = 2 + \sqrt{3}\text{cm}$

b) $\cos 15^\circ = \cos C = \frac{CH}{AC}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A, có $\hat{A} = 36^\circ$, $BC = 1\text{cm}$. Kẻ phân giác CD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC.

a) Tính AD, DC.

b) Kẻ $CK \perp BD$. Giải tam giác BKC.

c) Chứng minh rằng $\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

HD:

a, ΔBCD cân tại C, ΔCDA cân tại A (Hai góc ở đáy bằng nhau)

Nên $DC=DA=BC=1\text{cm}$

b, ΔBKC có: $\hat{B} = 72^\circ$; $\hat{C} = 18^\circ$

$\sin B = \frac{CK}{BC}$ nên $CK=BC.\sin B=1.\sin 72^\circ$

$\cos B = \frac{BK}{BC}$ Nên $BK=BC.\cos B=1.\cos 72^\circ$

c, $\cos 36^\circ = \cos A = \frac{AH}{AD}$; đặt $AB=AC=2x$, suy ra $DB=AB-AD=2x-1$, theo tính chất phân

giác ta có:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$ suy ra $\frac{1}{2x-1} = \frac{2x}{1}$. Tìm được $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (vì $x > 0$) hay $AH = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Thay AD, AH vào $\cos 36^\circ = \cos A = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \text{đpcm}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$ (D thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt BC tại F. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC.

- Chứng minh rằng tam giác ABE đều. Tính AH.
- Chứng minh góc $\widehat{EAD} = \widehat{EAF} = 45^\circ$.
- Tính các tỉ số lượng giác của góc AED và góc AEF.
- Chứng minh $\triangle AED = \triangle AEF$. Từ đó suy ra $AD = AF$.
- Chứng minh rằng: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{4}{3}$.

HD:

a, $\triangle BEA$ có $AB = BE = 1 \text{ cm}$ và $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\triangle BEA$ đều. $AH = AB \cdot \cos B = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b, $\widehat{EAD} = \widehat{CAB} - \widehat{EAB} = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$

Vì $\widehat{CAF} = 90^\circ$ mà $\widehat{EAC} = 45^\circ$ nên $\widehat{EAF} = 45^\circ$.

c, Ta có: $\widehat{AED} = \widehat{EAB} = 60^\circ$ (sole trong), từ đó tính $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ \dots$

d, $\triangle AED$ và $\triangle AEF$ có: AE chung, $\widehat{EAD} = \widehat{EAF} = 45^\circ$; $\widehat{DEA} = \widehat{AEF} = 60^\circ$ nên $\triangle AED = \triangle AEF$ (g.c.g) và $AD = AF$ (hai cạnh tương ứng).

e, Ta có:

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{4}{3}.$$

Bài 19. Giải tam giác ABC, biết:

- $\widehat{A} = 90^\circ$; $BC = 10 \text{ cm}$; $\widehat{B} = 75^\circ$
- $\widehat{A} = 120^\circ$; $AB = AC = 6 \text{ cm}$.
- Trung tuyến ứng với cạnh huyền $m_a = 5$, đường cao $AH = 4$.
- Trung tuyến ứng với cạnh huyền $m_a = 5$, một góc nhọn bằng 47° .

HD:

a, $\hat{C} = 15^\circ$; $AB=BC.\cos B=10.\cos 75^\circ=2,59\text{cm}$; $AC=9,66\text{cm}$

b, $\hat{C} = \hat{B} = 30^\circ$; Kẻ AH vuông góc BC thì $BH=HC$.

Ta có: $BH=AB.\cos B=6.\cos 30^\circ=3\sqrt{3}\text{ cm}$ nên $BC=6\sqrt{3}\text{ cm}$.

c, $BC=2m_a=10\text{ cm}$ (tính chất trung tuyến tam giác vuông).

$AM=BM=5\text{cm}$ mà $AH=4\text{cm}$ nên $HM=3\text{cm}$ (dùng Pytago) hay $BH=2\text{cm}$.

Mà $BH^2+AH^2=AB^2$. Từ đó tính AB và AC (Dùng Pytago).

d, $\hat{B} = 47^\circ$ nên $\hat{C} = 43^\circ$; $BC=2m_a=10\text{ cm}$ (tính chất trung tuyến tam giác vuông)

$AB=BC.\cos B=10.\cos 47^\circ=6,8\text{cm}$; $AC=7,33\text{cm}$.

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 3cm, BC = 6cm. Gọi E,

F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC.

a) Giải tam giác vuông ABC.

b) Tính độ dài AH và chứng minh: $EF =$

AH. c) Tính: $EA.EB + AF.FC$.

HD: a) $AC = 3\sqrt{3}\text{ (cm)}$, $B=60^\circ$, $C=30^\circ$ b) $AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ (cm)}$

c) $AE.EB = EH^2$; $AF.FC = HF^2$; nên $AE.EB+AF.FC=EH^2+HF^2=EF^2=AH^2 = \frac{27}{4}$.