CHƯƠNG II: ĐƯỜNG TRÒN

I. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. Đường tròn

Đường tròn tâm O bán kính R (R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và điểm M.

- *M nằm trên đường tròn (O; R)* $\Leftrightarrow OM = R$.
- *M nằm trong đường tròn (O; R)* $\Leftrightarrow OM < R$.
- *M nằm ngoài đường tròn (O; R)* $\Leftrightarrow OM > R$.

3. Cách xác định đường tròn

Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

4. Tính chất đối xứng của đường tròn

- *Đường tròn là hình có **tâm đối xứng**. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.*
- *Đường tròn là hình có **trục đối xứng**. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.*

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $\hat{C} + \hat{D} = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 2. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

HD: Chứng minh EFGH là hình chữ nhật, ΔOBE là tam giác đều.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD. Đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F. Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD.

HD: Chứng minh E, F là giao điểm của các đường trung trực tương ứng.

Bài 4. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (I) đường kính OA. Bán kính OC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại D. Vẽ CH ⊥ AB. Chứng minh tứ giác ACDH là hình thang cân.

HD: Chứng minh ΔADO = ΔCHO ⇒ OD = OH, AD = CH. Chứng minh HD // AC.

Bài 5. Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD) có $\hat{C} = \hat{D} = 60^0$, CD = 2AD. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

HD: Chứng minh $IA = IB = IC = ID$*, với I là trung điểm của CD.*

Bài 6. Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

HD:

$\Delta AOB=\Delta COB$ *nên* $S_{AOB} = S_{COB}$ *hay* $\frac{OM.AB}{2} = \frac{ON.CB}{2}$ *mà AB=BC nên OM=ON.*

Chứng minh tương tự ta được: MO=ON=OR=OS nên M,N,R,S cùng thuộc một đường tròn.

Bài 7. Cho hai đường thẳng xy và $x'y'$ vuông góc nhau tại O. Một đoạn thẳng AB = 6cm chuyển động sao cho A luôn nằm trên xy và B trên $x'y'$. Hỏi trung điểm M của AB chuyển động trên đường nào?

HD:

ΔAOB vuông tại O nên gọi I là trung điểm AB thì OI là trung tuyến => OI=3cm,

Khi A,B thay đổi thì OI=3cm nên trung điểm I của AB luôn chạy trên đường tròn (O;3cm)

Bài 8. Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK.

a) Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó.

b) So sánh KH và BC.

HD:

a, Gọi I là trung điểm BC, vì ΔCHB và ΔCKB vuông nên HI=KI=IC=IB nên B,C,H,K cùng nằm trên đường tròn tâm I.

b, Vì BC là đường kính nên KH<BC.

II. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

1. So sánh độ dài của đường kính và dây

Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.

2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây

- *Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.*
- *Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.*

3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây

• Trong một đường tròn:

– Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.

– Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

• Trong hai dây của một đường tròn:

– Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.

– Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác:

Đi qua 3 đỉnh của tam giác và có tâm là giao 3 đường trung trực của 3 cạnh. Với tam giác vuông, tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền.

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho đường tròn (O; R) và ba dây AB, AC, AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng MN ≤ 2R.

HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB $\Rightarrow MN \le AB$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng: $S_{ABCD} \le 2R^2$.

HD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB.CD$.

Bài 3. Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua tâm. Gọi M là trung điểm của AB. Qua M vẽ dây CD không trùng với AB. Chứng minh rằng điểm M không là trung điểm của CD.

HD: Dùng phương pháp phản chứng. Giả sử M là trung điểm của CD $\Rightarrow$ *vô lý.*

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M.

a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao?

b) Giả sử $R = 6,5cm$, $MA = 4cm$. Tính CD.

c)* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh:

$MH.MK = \dfrac{MC^3}{2R}$.

HD: a) ACED là hình thoi *b)* $CD = 12cm$

c) $MH = \dfrac{MA.MC}{AC}, MK = \dfrac{MB.MC}{BC}$

Vì Với $MA.MB = MC^2$; $AC.BC = AM.AB$.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử $IA = 2cm, IB = 4cm$. Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

HD: $OH = OK = 1cm$.

Bài 6. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N). a) Chứng minh CM = DN.

b) Giả sử $\widehat{AOB} = 90^0$. Tính OM theo R sao cho $CM = MN = ND$.

HD:

a) Vẽ $OH \perp CD \Rightarrow$ *H là trung điểm của CD và MN.*

b) Đặt OH = x. C. minh ΔHOM vuông cân $\Rightarrow HM = x$. *Do* $CM = MN = ND \Rightarrow HC = 3x$

$\Rightarrow OM = \dfrac{R}{\sqrt{5}}$.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB).

a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật.

b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn 30^0. Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

HD: a) Vẽ $OH \perp CD$. Đường thẳng OH cắt EF tại K $\Rightarrow OH = OK \Rightarrow CD = EF$.

b) $OH = \frac{R}{4} \Rightarrow HK = \frac{R}{2}$. *Vì* $\hat{E} = 90^0$ *nên CF là đường kính.* $EF^2 = \frac{15R^2}{4}$.

$S = \frac{\sqrt{15}R^2}{4}$

Bài 8. Cho đường tròn (O) và một dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: CD = 16cm và MH = 4cm.

HD:

OM=R-4 và MD=8cm.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác OMD:

$MO^2+MD^2=OD^2 \Rightarrow (R-4)^2+64=R^2 \Rightarrow R=10cm.$

Bài 9. Cho đường tròn (O; 12cm) có đường kính CD. Vẽ dây MN qua trung điểm I của OC sao cho góc NID bằng 30^0. Tính MN.

HD:

Gọi H là trung điểm MN suy ra OH vuông góc MN.

$OH=IO.\sin 30^0=3$ cm

$HO^2+HM^2=R^2$ *để tính HM và MN=2HM.*

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng Δ. Đặt $d = d(O,\Delta)$.

VTTĐ của đường thẳng và đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa *d* và R
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	2	$d < R$
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	1	$d = R$
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	0	$d > R$

Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng là tiếp tuyến **của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn là** tiếp điểm**.**

2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn

• Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

• Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.

3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

• Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.

• Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.

• Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác

*• Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác là **đường tròn nội tiếp** tam giác, còn tam giác là **ngoại tiếp** đường tròn.*

• Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.

5. Đường tròn bàng tiếp tam giác

*• Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia là **đường tròn bàng tiếp** tam giác.*

• Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.

• Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).

b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

HD:

a) D, E nằm trên đường tròn đường kính AH.

b) Chứng minh $\widehat{OEA} = \widehat{OAE} = \widehat{ECM} = \widehat{OEM}$ => $\widehat{MEO} = \widehat{CEM} + \widehat{CEO} = \widehat{OEA} + \widehat{CEO} = 90^0$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho $\widehat{CAB} = 30^0$. Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho BM = R. Chứng minh rằng:

a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O). b) $MC^2 = 3R^2$.

HD: a) Chứng minh ΔCOM vuông tại C. *b)* $MC^2 = OM^2 - OC^2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A có AB = 8, AC = 15. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD, cắt AC ở E.

a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn. b) Tính độ dài HE.

HD: a) Gọi O và F là lần lượt là trung điểm của CD và AE. Chứng minh DE // AB, $HF \perp AE$ => $\widehat{HEO} = 90^0$. *b)* $HE = AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{120}{17}$.

Bài 4. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên tia OB lấy điểm C sao cho BC = BO. Chứng minh rằng $\widehat{BMC} = \frac{1}{2}.\widehat{BMA}$.

HD: Chú ý ΔOMC cân tại M.

Bài 5. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 60^0$ khi và chỉ khi $OA = 2R$.

HD: Chú ý ΔABO vuông tại B.

Bài 6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M.

a) Chứng minh rằng tứ giác AMON là hình thoi.

b) Điểm A phải cách điểm O một khoảng bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O).

HD: a) Chứng minh ON // AB, OM // AC. *b)* $OA = 2R$.

Bài 7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn vẽ từ A và C cắt nhau tại M. Trên tia AM lấy điểm D sao cho AD = BC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành. b) Ba đường thẳng AC, BD, OM đồng quy.

HD: a) Chứng minh AD // BC (cùng vuông góc với OA).

b) Gọi E là giao điểm của OM và AC $\Rightarrow$ *E là trung điểm của AC.*

Bài 8. Cho đường tròn (O; *r*) nội tiếp tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng $r = p - a$, trong đó *p* là nửa chu vi tam giác, *a* là độ dài cạnh huyền.

HD: Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (O) với các cạnh tam giác $\Rightarrow$ *AEOF là hình vuông.*

Bài 9. Chứng minh rằng diện tích tam giác ngoại tiếp một đường tròn được tính theo công thức: $S = pr$, trong đó *p* là nửa chu vi tam giác, *r* là bán kính đường tròn nội tiếp.

HD: Diện tích tam giác bằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ.

Bài 10. Cho đường tròn (O), dây cung CD. Qua O vẽ OH ⊥ CD tại H, cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại M. Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O).

HD:

Xét ΔMCO *và* ΔMDO*: MO chung, OC=OD=R;* $\widehat{COH} = \widehat{DOH}$

nên $\Delta MCO = \Delta MDO$ *(c.g.c) nên* $\widehat{MDO} = \widehat{MCO} = 90^0$ *nên MD là tiếp tuyến (O).*

Bài 11. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tia Ax ⊥ AB và By ⊥ AB ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại I cắt Ax tại C và By tại D. Chứng minh rằng AC + BD = CD.

HD:

Ta có: CI=AC; ID=DB nên AC+BC=CD

Bài 12. Cho đường tròn (O; 5cm). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho MA ⊥ MB tại M.

a) Tính MA và MB.

b) Qua trung điểm I của cung nhỏ AB, vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB tại C và D. Tính CD.

HD:

a, OAMB là hình vuông

b, $\widehat{IOA} = 45^0$ *mà MO vuông góc DC nên* ΔOIC *vuông cân tại C suy ra IC=IO=R hay CD=2R=10cm.*

Bài 13. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc $\widehat{AMB} = 60^0$. Biết chu vi tam giác MAB là 18cm, tính độ dài dây AB.

HD: $AB = 6(cm)$.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

1. Tính chất đường nối tâm

• *Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.*

• *Nếu hai đường tròn cắt nhau thì hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.*

• *Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.*

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; r). Đặt $OO' = d$.

VTTĐ của hai đường tròn	Số điểm chung	Hệ thức giữa d với R và r
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc nhau: – Tiếp xúc ngoài – Tiếp xúc trong	1	 $d = R + r$ $d = R - r$
Hai đường tròn không giao nhau: – Ở ngoài nhau – (O) đựng (O′)	0	 $d > R + r$ $d < R - r$

3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn

Tiếp tuyến chung *của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.*

Tiếp tuyến chung ngoài *là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.*

Tiếp tuyến chung trong *là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.*

BÀI TẬP:

Bài 1. Cho hai đường tròn (A; R_1), (B; R_2) và (C; R_3) đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính R_1, R_2 và R_3 biết AB = 5cm, AC = 6cm và BC =7cm.

HD: $R_1 = 2(cm)$, $R_2 = 3(cm)$, $R_3 = 4(cm)$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O; 5cm) và (O′; 5cm) cắt nhau tại A và B. Tính độ dài dây cung chung AB biết OO′ = 8cm.

HD: $AB = 6(cm)$.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) cắt nhau tại A và B với R > R′. Vẽ các đường kính AOC và AO′D. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

HD: Chứng minh BC, BD cùng song song với OO′ hoặc chứng minh $\widehat{CBD} = 180^0$.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O′) cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến chung MAN sao cho MA = AN. Đường vuông góc với MN tại A cắt OO′ tại I. Chứng minh I là trung điểm của OO′.

HD: Kẻ OH và O'P vuông góc với NM, suy ra MH=HA=AP=PN suy ra AI là đường trung bình của hình thang HPO'O nên I là trung điểm OO'.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Gọi M là giao điểm một trong hai tiếp tuyến chung ngoài BC và tiếp tuyến chung trong. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO′ tại M.

HD: Ta có AM=MB=MC nên M là trung điểm BC, Từ M kẻ vuông góc với BC cắt OO' tại I thì I là trung điểm OO' (tính chất đường trung bình của hình thang)

Ta có: $\widehat{BOM} = \widehat{AMO}$; $\widehat{AMO'} = \widehat{CMO'}$ *nên* $\widehat{OMO'} = 90^0$ *nên MI là đường trung tuyến của tam giác vuông OMO' suy ra MI=IO=IO'. Vậy IM vuông BC và IM=OO':2 nên BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO' tại M.*

Bài 6. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R) tiếp xúc ngoài nhau tại M. Hai đường tròn (O) và (O′) cùng tiếp xúc trong với đường tròn lớn (O″; R″) lần lượt tại E và F. Tính bán kính R″ biết chu vi tam giác OO′O″ là 20cm.

HD:

Vì (O) và (O') tiếp xúc ngoài nên OO'=R+R'.(1)

Vì (O) và (O'') tiếp xúc trong nên OO''=R''-R. (2)

Vì (O') và (O'') tiếp xúc trong nên O'O''=R''-R' (3).

Từ (1)(2)(3) suy ra Chu vi tam giác OO'O''=2R''=20cm nên R''=10cm.

Bài 7. Cho đường tròn (O; 9cm). Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính R đều tiếp xúc trong với (O) và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường khác bên cạnh nó. Tính bán kính R.

HD:

Gọi tâm của sáu đường tròn nhỏ là A,B,C,D,E,F. Suy ra ABCDEF là lục giác đều và ΔABO là tam giác đều nên AB=OB=9-R hay 2R=9-R (vì AB=2R) suy ra R=3cm.

Bài 8. Cho hai đường tròn đồng tâm. Trong đường tròn lớn vẽ hai dây bằng nhau AB = CD và cùng tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại M và N sao cho AB ⊥ CD tại I. Tính bán kính đường tròn nhỏ biết IA = 3cm và IB = 9cm.

HD: Từ O kẻ OH vuông góc AB, OP vuông góc CD, suy ra HB=HA=6cm, mà IA=3cm nên IH=3cm.

Kẻ OP vuông góc với CD thì IPOH là hình vuông, suy ra OP=R=IH=3cm. Vậy R=3cm.

Bài 9. Cho ba đường tròn $(O_1),(O_2),(O_3)$ cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

HD: Tam giác đều cạnh R $\Rightarrow S=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) tại B và cắt đường tròn (O′) tại C. Từ B vẽ tiếp tuyến *xy* với đường tròn (O). Từ C vẽ đường thẳng *uv* song song với *xy*. Chứng minh rằng *uv* là tiếp tuyến của đường tròn (O′).

HD: Xét hai trường hợp tiếp xúc ngoài và trong. Chứng minh OB // O'C ⇒ O'C ⊥ uv.

Bài 11. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (D; DC) và đường tròn (O) đường kính BC, chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng: a) N là trung điểm của AD. b) M là trung điểm của AB.

HD:

a) $\Delta ABN = \Delta CDO \Rightarrow AN = CO$ b) $\Delta BCM = \Delta CDO \Rightarrow BM = CO$.

Bài 12. Cho góc vuông xOy. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia Ox và Oy. Vẽ đường tròn (I; OK) cắt tia Ox tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn (K; OI) cắt tia Oy tại N (K nằm giữa O và N).

a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau.

b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác OMCN là hình vuông.

c) Gọi giao điểm của hai đường tròn (I), (K) là A và B. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia Ox và Oy sao cho OI + OK = a (không đổi). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

HD: a) Xét $\Delta OIK \Rightarrow R - r < d < R + r$ b) $\hat{O} = \hat{M} = \hat{N} = 90^0$; $OM = ON$.

c) Gọi $L = KB \cap MC, P = AB \cap MC$. OKBI là hình chữ nhật, BLMI là hình vuông.

$\Delta BLP = \Delta KOI \Rightarrow LP = OI \Rightarrow MP = OM = MC \Rightarrow P \equiv C$.

d) OM = a. Hình vuông OMCN cạnh a, cố định ⇒ AB đi qua điểm C cố định.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ đường phân giác BI.

a) Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với BC.

b) Cho biết AB = a. Chứng minh rằng $AI = (\sqrt{2}-1)a$. Từ đó suy ra $\tan 22^0 30' = \sqrt{2}-1$.

HD: a) Vẽ $ID \perp BC \Rightarrow IA = ID$

b) Xét $\Delta ABI \Rightarrow AI = a.\tan 22^0 30'$. ΔDIC vuông cân $\Rightarrow AI = DC = (\sqrt{2}-1)a$.

Bài 2. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A vẽ tiếp tuyến xy. Từ một điểm M trên xy vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đường cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng tứ giác AOBH là hình thoi.

c) Khi điểm M di động trên xy thì điểm H di động trên đường nào?

HD: a) Chứng minh ΔMAB cân, MH, MO là các tia phân giác của $\widehat{AMB}$.

b) Chứng minh AOBH là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.

c) H di động trên đường tròn (A; R).

Bài 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến xy. Vẽ AD và BC vuông góc với xy.

a) Chứng minh rằng MC = MD.

b) Chứng minh rằng AD + BC có giá trị không đổi khi điểm M di động trên nửa đường tròn.

c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB.

d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

HD: a) OM là đường trung bình của hình thang ABCD.

b) $AD + BC = 2R$ c) Vẽ $ME \perp AB$. $\Delta BME = \Delta BMC \Rightarrow ME = MC = MD$

d) $S = 2R.ME \le 2R.MO \Rightarrow S$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là đầu mút của bán kính $OM \perp AB$.

Bài 4. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động D, E sao cho $\widehat{DOE} = 60^0$.

a) Chứng minh rằng tích BD.CE không đổi.

b) Chứng minh $\Delta BOD \backsim \Delta OED$. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE. c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

HD: a) $\Delta BOD \backsim \Delta CEO \Rightarrow BD.CE = \dfrac{BC^2}{4}$ b) $\dfrac{BD}{OD} = \dfrac{OB}{OE} \Rightarrow \Delta BOD \backsim \Delta OED$

c) Vẽ $OK \perp DE$. Gọi H là tiếp điểm của (O) với cạnh AB. Chứng minh OK = OH.

Bài 5. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm E di động trên nửa đường tròn đó (E không trùng với A và B). Vẽ các tia tiếp tuyến A*x*, B*y* với nửa đường tròn. Tia AE cắt B*y* tại C, tia BE cắt A*x* tại D.

a) Chứng minh rằng tích AD.BC không đổi.

b) Tiếp tuyến tại E của nửa đường tròn cắt A*x*, B*y* theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AB, CD đồng quy hoặc song song với nhau.

c) Xác định vị trí của điểm E trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác ABCD nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

HD: a) $\Delta ABD \backsim \Delta BCA \Rightarrow AD.BC = AB^2$

b) ΔMAE cân $\Rightarrow \Delta MDE$ cân $\Rightarrow MD = ME = MA$. Tương tự $NC = NB = NE$. Sử dụng bổ đề hình thang $\Rightarrow$ đpcm.

c) $S = 2R.MN \Rightarrow S$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN \perp AD \Leftrightarrow OE \perp AB$.

$S_{\min} = 4R^2$.

Bài 6. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, đường tròn (O′) tiếp xúc với AB tại B. Hai đường tròn này luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Hỏi tiếp điểm M của hai đường tròn di động trên đường nào?

HD: Từ M vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, cắt AB tại I. Chứng minh IA = IB = IM. Từ đó suy ra M di động trên đường tròn tâm I đường kính AB.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) nội tiếp ΔABC. Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của AB, AC, BC với (O). Chứng minh rằng: $P_{\Delta ABC} = 2(AM + BP + NC)$.

HD:

$P_{\Delta ABC} = (AM + MB) + (BP + PC) + (NC + AN) = (AM + AN) + (BM + BP) + (PC + CN) = 2(AM + BP + NC)$ *(Chú ý: ΔAMO=ΔANO (ch-gn) nên AM=AN)*

Bài 8. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh CH = DK.

HD: Vẽ $EH \perp CD$. Chứng minh $EH = EK \Rightarrow CH = DK$.

Bài 9. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc $\widehat{AMB} = 40^0$.

a) Tính góc $\widehat{AOB}$.

b) Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

HD: a) $\widehat{AOB} = 140^0$ *b) Chứng minh* $\widehat{NOM} = \widehat{NMO}$

Bài 10. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: MC.MD = OM^2.

c) Cho biết OC = BA = 2R, tính AC và BD theo R.

HD: a) OC ⊥ OD c) $AC = R\sqrt{3}$, $BD = MD = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Bài 11. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O′). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N.

a) Đường thẳng CM cắt (O′) tại P. Chứng minh: OM // BP.

b) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh tam giác OCD là tam giác cân.

HD: a) OM ⊥ MC, BP ⊥ MC b) CD // OM; ΔOCD cân tại D.

Bài 12. Cho hai đường tròn (O; R) và (O′; R′) cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O′; R′). Biết R = 12cm, R′ = 5cm.

a) Chứng minh: O′A là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

b) Tính độ dài các đoạn thẳng OO′, AB.

HD: a) O′A ⊥ OA b) $OO' = 13(cm)$; $AB = \frac{120}{13}(cm)$.

Bài 13. Cho đường tròn tâm O bán kính R = 6cm và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

a) Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.

b) Vẽ cát tuyến ACD, gọi I là trung điểm của đoạn CD. Hỏi khi C chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

HD:

a, $AB^2 = OA^2 - OB^2$

b, Vì O, A cố định mà $\widehat{OIA} = 90^0$ *nên khi C thay đổi thì I chạy trên đường tròn đường kính AO.*

Bài 14. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r). Dây AB của (O; R) tiếp xúc với (O; r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O; r) cắt (O; R) tại C và D (D ở giữa E và C).

a) Chứng minh: EA = EC.

b) Chứng minh: EO vuông góc với BD.

c) Điểm E chạy trên đường nào khi dây AB của (O; R) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (O; r)?

HD:

a, Gọi hai tiếp điểm là M và N (M thuộc AB). Ta có: ME=EN (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); MA=MB; NC=ND; MB=ND nên AE=EC.

b, Vì ΔEMN cân mà MB=ND nên DB//NM. Ta có EO vuông góc NM nên EO vuông góc DB.

c, Đặt AB=x, suy ra ME=$\frac{3}{4}x$*. suy ra OE=*$\sqrt{OM^2+ME^2}=\sqrt{r^2+\frac{9}{16}x^2}$*. không đổi.*

Vậy khi dây AB thay đổi thì E chạy trên đường tròn tâm O đường kính OE.

Bài 15. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

a) Khi AH = 2cm, MH = 4cm, hãy tính độ dài các đoạn thẳng AB, MA, MB.

b) Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O). Hãy xác định vị trí của M để biểu thức: $\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MB^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

c) Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến của (O) tại A ở D, OD cắt AM tại I. Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

HD:

a, ΔAHM vuông tại H, Pytago tính được AM=$2\sqrt{5}$ *cm, ΔAMB vuông tại M nên* $AM^2=AH.AB$

suy ra AB=10cm, MB= $\sqrt{AB^2-AM^2}=4\sqrt{5}$ *CM,* *b,* $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{MB^2}=\frac{1}{MH^2}$ *nhỏ nhất khi MH lớn nhất => M nằm ở trung điểm cung AB.*

c, Vì $\widehat{AIO}=90^0$ *nên I chạy trên nửa đường tròn đường kính AO.*

Bài 16. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Tính số đo góc $\widehat{ABD}$?

b) Tứ giác BHCD là hình gì? Vì sao?

c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh 2OM = AH.

HD: a) $\widehat{ABD}=90^0$ *b) BHCD là hình bình hành.*

Bài 17. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) ở D.

a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không ? Vì sao?

b) Chứng minh: $BC^2 = 4AH.DH$.

c) Cho BC = 24cm, AB = 20cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

HD:

a, Có vì AH vuông BC tại trung điểm H, OH vuông BC nên A,O, H thẳng hàng.

b, ΔABD vuông tại B nên $AH.BD=BH^2$ *hay* $4AH.BD=4BH^2=BC^2$ *đpcm.*

c, Ta có: $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BD^2}$*. Từ đó tính được BD.*

Mà $AD^2=DB^2+AB^2$ *suy ra AD và R=AD:2.*

Bài 18. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

a) Tứ giác ACOD là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.

c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D,O, M thẳng hàng.

d) Chứng minh: $CD^2 = 4$ AH. HB.

HD: a) ACOD là hình thoi.

Bài 19. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.

c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo góc CAB (làm tròn đến độ).

d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

HD:

a, R=5cm>d=3cm nên đường thẳng d cắt (O).

b, Kẻ OH vuông AB, OH=3cm, $AO^2+OH^2=AH^2$ *=> AH=4cm => AB=8cm.*

c, ΔACB có OH là đường trung bình nên BC=2OH=6cm.

$sin\widehat{ACB}=CB:AC$ *suy ra* $\widehat{ACB}$.

d, $CB^2=AB.BM$

Bài 20. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

a) Tính số đo các góc BMC và BNC.

b) Chứng minh AH vuông góc BC.

c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

HD: a) $\widehat{BMC}=\widehat{BNC}=90^0$ *b) H là trực tâm ΔABC*

c) NK ⊥ NO (K là trung điểm của AH).

Bài 21. Cho đường tròn tâm (O; R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho góc $\widehat{MAB}=60^0$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM).

b) Chứng minh $MN^2 = 4AH.HB$.

c) Chứng minh ΔBMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.

d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

HD:

a, AM vuông BM và AN vuông BN.

b, 4AH.BH=4MH^2=NM^2.

c, ΔBMN cân có $\widehat{MBN} = 60^0$ *nên ΔBMN đều.*

d, OH là đường trung bình của ΔMEN nên OH//EN.

BO là đường trung bình của ΔMFE nên BO//FE. Suy ra F,E,N thẳng hàng.

Bài 22. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

a) Tính số đo các góc của tam giác OAB.

b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

HD: a) $\widehat{OBA} = 90^0$, $\widehat{OAB} = 30^0$, $\widehat{AOB} = 60^0$.

Bài 23. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh OA ⊥ BC và tính tích OH.OA theo R

b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD // OA.

c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

HD:

a, ΔABO vuông tại B nên OA.OH=OB^2=R^2.

b, OH là đường trung bình của ΔBDC nên OH//DC hay OA//DC.

c, HK//BE mà H là trung điểm BC nên K là trung điểm EC.

Bài 24. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE ⊥ AC và CF ⊥ AB ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H. a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.

b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.

c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

HD: a) BOCH là hình bình hành và OB = OC

b) H là trực tâm ΔABC c) OA = 2R

Bài 25. Cho đường tròn (O; 3cm) và điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Tính độ dài OH.

b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác ADE.

c) Tính số đo góc $\widehat{DOE}$.

HD: a) $OH = 1,5(cm)$ *b)* $AB = 3\sqrt{3}9cm)$, $P_{ADE} = 2AB = 6\sqrt{3}(cm)$

c) $\widehat{DOE} = \frac{1}{2}.\widehat{BOC} = 60^0$.

Bài 26. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi A*x* , B*y* là các tia vuông góc với AB (A*x*, B*y* và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia A*x* kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt B*y* ở N.

a) Tính số đo góc MON.

b) Chứng minh MN = AM + BN.

c) Tính tích AM. BN theo R.

HD:

a, Gọi E là tiếp điểm tiếp tuyến kẻ từ M. Ta có: MO vuông AE; ON vuông EB; $\widehat{AEB} = 90^0$ *nên* $\widehat{MON} = 90^0$

b, Ta có: ME=MA; EN=NB nên NM=MA+NB.

c, AM.BN=ME.EN=OE²=R²

Bài 27. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

a) Chứng minh AD.AB = AE.AC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).

c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm,AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

HD:

Bài 28. Cho hai đường tròn (O) và (O′) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O′). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO′, Q là điểm đối xứng với N qua OO′. Chứng minh rằng:

a) MNQP là hình thang cân.

b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O′).

c) MN + PQ = MP + NQ.

HD: