BÀI TẬP VÀ ĐÁP ÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

1 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=5\end{cases}$

2 $\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y}=1\\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=1\end{cases}$

3 $\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-1}=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y-1}=1\end{cases}$

4 $\begin{cases}\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{2}{y-1}=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y-1}=1\end{cases}$

5 $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=3\\ \dfrac{2}{x+y}-\dfrac{3}{x-y}=1\end{cases}$

6 $\begin{cases}\dfrac{2}{x-y}+\dfrac{6}{x+y}=1{,}1\\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{9}{x+y}=0{,}1\end{cases}$

7 $\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}=3\\ \dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3y}{y+1}=-1\end{cases}$

8 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{5y}=\dfrac{2}{15}\end{cases}$

9 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y-2}=2\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{y-2}=1\end{cases}$

10 $\begin{cases}\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{3}{x+y}=5\\ \dfrac{2x}{x+y}-\dfrac{1}{x+y}=3\end{cases}$

11 $\begin{cases}\dfrac{-3}{x-y}+\dfrac{2}{2x+y}=-2\\ \dfrac{4}{x-y}-\dfrac{10}{2x+y}=2\end{cases}$

12 $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{y+12}=1\\ \dfrac{x}{x-12}-\dfrac{x}{y}=2\end{cases}$

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}mx+y=1\\ x+my=2\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 2

b) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x; y) thoả mãn x - y = 1

d) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

d) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=1 & (1)\\ x+my=2 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow mx = 1 - y$ $\Rightarrow m = \dfrac{1-y}{x}$

thay $m = \dfrac{1-y}{x}$ vào phương trình (2) ta có phương trình $x + \left(\dfrac{1-y}{x}\right).y = 2$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{y - y^2}{x} = 2$ $\Leftrightarrow x^2 + y - y^2 = 2x$ $\Leftrightarrow x^2 + y - y^2 - 2x = 0$

Vậy $x^2 + y - y^2 - 2x = 0$ là đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Bài 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x + y = m\\ x + (m-1)y = 2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x ; y)

a) Giải hệ phương trình khi m = 3

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

c) Giải và biện luận hệ theo m, trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất tìm giá trị của m thoả mãn: $2x^2 - 7y = 1$

d) Tìm các giá trị của m để biểu thức $\dfrac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị nguyên.

Giải:

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x + y = m & (1)\\ x + (m-1)y = 2 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x + my - y = 2 \Rightarrow my = 2 - x + y \Rightarrow m = \dfrac{2-x+y}{y}$

thay $m = \dfrac{2-x+y}{y}$ vào phương trình (1) ta có phương trình:

$\left(\dfrac{2-x+y}{y} - 1\right)x + y = \dfrac{2-x+y}{y}$ $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2-x+y-y}{y}\right).x + y = \dfrac{2-x+y}{y}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2-x}{y}\right).x + y = \dfrac{2-x+y}{y}$ $\Leftrightarrow \dfrac{2x - x^2 + y^2}{y} = \dfrac{2-x+y}{y}$

$\Leftrightarrow 2x - x^2 + y^2 = 2 - x + y$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 3x + y + 2 = 0$

Vậy $x^2 - y^2 - 3x + y + 2 = 0$ là đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

d) Thay $x = \frac{m+1}{m}$; $y = \frac{1}{m}$ vào biểu thức A = $\frac{2x-3y}{x+y}$ ta được biểu thức

$$A = \frac{2.\left(\frac{m+1}{m}\right) - 3.\frac{1}{m}}{\frac{m+1}{m} + \frac{1}{m}} = \frac{\frac{2m+2-3}{m}}{\frac{m+1+1}{m}} = \frac{2m-1}{m} : \frac{m+2}{m}$$

$$= \frac{2m-1}{m+2} = \frac{2(m+2)-5}{m+2} = \frac{2(m+2)}{m+2} - \frac{5}{m+2} = 2 - \frac{5}{m+2}$$

Để biểu thức A = $\frac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị nguyên

$\Leftrightarrow 2 - \frac{5}{m+2}$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{5}{m+2}$ nhận giá trị nguyên

$\Leftrightarrow 5 \vdots (m+2)$ $\Leftrightarrow$ (m+2) là ớc của 5. Mà Ư(5) = $\{\pm 1; \pm 5\}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=1 \\ m+2=-1 \\ m+2=5 \\ m+2=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1-2 \\ m=-1-2 \\ m=5-2 \\ m=-5-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \\ m=3 \\ m=-7 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$; $m \neq 2$ Vậy với các giá trị $m \in \{-7; -3; -1; 3\}$ thì giá trị của biểu thức $\frac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 4 Tìm giá trị của m và p để hệ phương trình $\begin{cases} x = 7 - y \\ mx = 2y + p \end{cases}$

a) Có một nghiệm duy nhất

b) Có vô số nghiệm

c) Vô nghiệm

Giải:

Bài 6 Cho hệ phương trình $\begin{cases} 5m(m-1)x + \frac{1}{3}my = (1-2m)^2 & (1) \\ 4mx + 2y = m^2 + 3m + 6 & (2) \end{cases}$

Tìm m để hệ có 1 nghiệm duy nhất (x = 1; y = 3).

Bài 16 Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = -8 & (1) \\ -3mx + (m+5)y = (m-1)(m+1) & (2) \end{cases}$ (I)

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thoả mãn :

$$4x - 2y = -6 \quad (3)$$

Bài 7 Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 5 & (1) \\ 2mx + 3y = 6 & (2) \end{cases}$ (I)

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn:

$$(2m - 1)x + (m + 1)y = m \quad (3)$$

Giải:

Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất: $m.3 \neq 2.m \Rightarrow m \neq 0$.

Từ (1) $\Rightarrow$ y = 5 – mx. Thay vào (2) ta có:

$2mx + 3(5 - mx) = 6 \Leftrightarrow x = \frac{9}{m}$ $(m \neq 0)$

Thay $x = \frac{9}{m}$ vào y = 5 – mx ta có: $y = 5 - \frac{9m}{m} = -4$

Vậy với $m \neq 0$ hệ (I) có nghiệm $x = \frac{9}{m}$; y = - 4

Thay $x = \frac{9}{m}$; y = - 4 vào phương trình (3) ta đợc:

$(2m - 1).\frac{9}{m} + (m + 1)(-4) = m$

$\Leftrightarrow 18 - \frac{9}{m} - 4m - 4 = m \Leftrightarrow 5m^2 - 14m + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (m-1).(5m-9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{9}{5} \end{array}\right.$ (thoả mãn $m \neq 0$)

Vậy với m = 1 hoặc $m = \frac{9}{5}$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất thoả mãn $(2m - 1)x + (m + 1)y = m$

Bài 8 Cho hệ pt: $\begin{cases} (m+2)x + 2y = 5 \\ mx - y = 1 \end{cases}$

Tìm $m \in \mathbf{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất là các số nguyên

Giải:

Từ (2) ta có: $y = mx - 1$. Thay vào (1) ta đợc:

$(m + 2)x + 2(mx - 1) = 5 \Leftrightarrow 3mx + 2x = 7$

$\Leftrightarrow x.(3m + 2) = 7 \ \left(m \neq \frac{-2}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{7}{3m+2}$.

Thay vào $y = mx - 1 \Rightarrow y = \frac{7}{3m+2}.m - 1 \Rightarrow y = \frac{4m-2}{3m+2}$

Để $x \in Z \Leftrightarrow \frac{7}{3m+2} \in Z \Leftrightarrow 3m + 2 \in Ư(7) = \{7; -7; 1; -1\}$

+) $3m + 2 = -7 \Leftrightarrow m = -3$

+) $3m + 2 = 7 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3} \notin Z$ (loại)

+) $3m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{3} \notin Z$ (loại)

+) $3m + 2 = -1 \Leftrightarrow m = -1$

Thay $m = -3$ vào $y = \frac{4m-2}{3m+2} \Rightarrow y = 2$ (t/m)

Thay m = - 1 vào y = $\frac{4m-2}{3m+2}$ $\Rightarrow$ y = 6 (t/m)

Kết luận: m$\in$Z để hệ có nghiệm nguyên là m = -3 hoặc m = -1

Bài 9 Cho hệ: $\begin{cases}(m-3)x+y=2\\ mx+2y=8\end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm nguyên.

Giải:

Từ (1) ta có y = 2 – (m – 3).x $\Leftrightarrow$ y = 2 – mx + 3x

Thay vào (2) ta có: mx + 2.(2 – mx + 3x) = 8 $\Leftrightarrow$ - mx + 6x = 4

$\Leftrightarrow$ x.(6- m) = 4 (m $\neq$ 6)

$\Leftrightarrow$ x = $\frac{4}{6-m}$. Thay vào y = 2 – (m – 3).x ta có: y = $\frac{24-6m}{6-m}$

Để x$\in$Z $\Leftrightarrow$ $\frac{4}{6-m}\in$ Z $\Leftrightarrow$ 6 - m $\in$ Ư(4) = $\{1;-1;2;-2;4;-4\}$

+) 6 – m = 1 $\Leftrightarrow$ m = 5

+) 6 – m = -1 $\Leftrightarrow$ m = 7

+) 6 – m = 2 $\Leftrightarrow$ m = 4

+) 6 – m = - 2 $\Leftrightarrow$ m = 8

+) 6 – m = 4 $\Leftrightarrow$ m = 2

+) 6 – m = - 4 $\Leftrightarrow$ m = 10

Thay m = 5 vào y = $\frac{24-6m}{6-m}$ $\Rightarrow$ y = - 6 (t/m)

Thay m = 7 vào y = $\frac{24-6m}{6-m}$ $\Rightarrow$ y = 18 (t/m)

Thay m = 4 vào y = $\frac{24-6m}{6-m}$ $\Rightarrow$ y = 0 (t/m)

Thay m = 8 vào y = $\frac{24-6m}{6-m}$ $\Rightarrow$ y = 17 (t/m)

Thay m = 2 vào $y = \dfrac{24-6m}{6-m} \Rightarrow y = 3$ (t/m)

Thay m = 10 vào $y = \dfrac{24-6m}{6-m} \Rightarrow y = 9$ (t/m)

Kết luận: Để hệ có nghiệm nguyên thì $m \in \{5;7;4;8;2;10\}$

Bài 10 Cho hệ: $\begin{cases} mx - y = m^2 & (1) \\ 2x + my = m^2 + 2m + 2 & (2) \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Tìm m để biểu thức: $x^2 + 3y + 4$ nhận GTNN. Tìm giá trị đó.

Giải:

a) Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: m = 0 => Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là

$$(x\,;\,y) = (1\,;\,0)$$

Trường hợp 2: $m \neq 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

<=> $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ hay $ab' \neq a'b$ <=> $m.m \neq (-1).2$ <=> $m^2 + 2 \neq 0$

Do $m^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow m^2 + 2 > 0$ với mọi m.

Hay $m^2 + 2 \neq 0$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

b) Rút y từ (1) ta có: $y = mx - m^2$ (3)

Thế vào (2) ta đợc

$2x + m(mx - m^2) = m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow 2x + m^2x - m^3 = m^2 + 2m + 2$

$\Leftrightarrow 2x + m^2x = m^3 + m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow x(2 + m^2) = (m^3 + 2m) + (m^2 + 2)$

$\Leftrightarrow x(2 + m^2) = (m + 1)(m^2 + 2)$ do $m^2 + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = m + 1$

Thay vào (3) $\Rightarrow y = m.(m + 1) - m^2 = m$

Thay $x = m + 1$; $y = m$ vào $x^2 + 3y + 4$ ta đợc:

$x^2 + 3y + 4 = (m + 1)^2 + 3m + 4 = m^2 + 5m + 5$

$= (m^2 + 2.\frac{5}{2}m + \frac{25}{4}) - \frac{5}{4}$

$= (m + \frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4} \geq \frac{-5}{4}$ Do $(m + \frac{5}{2})^2 \geq 0$

Vậy Min$(x^2 + 3y + 4) = \frac{-5}{4}$ khi $m = \frac{-5}{2}$

<u>Bài 11</u> Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3mx - y = 6m^2 - m - 2 & (1) \\ 5x + my = m^2 + 12m & (2) \end{cases}$

Tìm m để biểu thức: $A = 2y^2 - x^2$ nhận GTLN. Tìm giá trị đó

Giải:

Từ (1) ta có: $y = 3mx - 6m^2 + m + 2$. Thay vào (2) ta có:

$5x + m.(3mx - 6m^2 + m + 2) = m^2 + 12m$

$\Leftrightarrow x.(5 + 3m^2) = 6m^3 + 10m$ $\quad (5 + 3m^2 \neq 0$ với mọi m)

$\Leftrightarrow x = \frac{6m^3 + 10m}{3m^2 + 5} = 2m$

Thay $x = 2m$ vào $y = 3mx - 6m^2 + m + 2$ ta đợc $y = m + 2$

Thay $x = 2m$; $y = m + 2$ vào A ta đợc:

$A = 2(m + 2)^2 - (2m)^2 = -2(m^2 - 4m - 4)$

$A = -2(m^2 - 4m + 4 - 8)$

$= -2(m^2 - 4m + 4) + 16$

$= -2(m - 2)^2 + 16 \leq 16$ Do $-2(m - 2)^2 \leq 0$ $(\forall m)$

Vậy MaxA = 16 khi m = 2

<u>Bài 12</u> Biết cặp số (x ; y) là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$

Hãy tìm giá trị của tham số m để biểu thức P = xy + 2(x + y) đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Biến đổi hệ phương trình trên trở thành: $\begin{cases} x + y = m \\ xy = m^2 - 3 \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm

<=> $m^2 \geq 4(m^2 - 3) <=> 3m^2 \leq 12 <=> -2 \leq m \leq 2$

Khi đó P = $(m+1)^2 - 4 \geq -4$

Vậy MinP = - 4 <=> m = - 1 (thỏa mãn $-2 \leq m \leq 2$)

Bài 13 Giả sử (x ; y) là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$

Xác định giá trị của tham số a để hệ thỏa mãn tích xy đạt giá trị nhỏ nhất; lớn nhất ?

Hướng dẫn: Biến đổi hệ phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ xy = \dfrac{3a^2 - 6a + 4}{2} \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm <=>

$(2a-1)^2 \geq 4.\dfrac{3a^2 - 6a + 4}{2} <=> 2a^2 - 8a + 7 \leq 0 <=> 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có xy = $\dfrac{3}{2}(a-1)^2 + \dfrac{1}{2}$

Với $a \geq 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} => a - 1 \geq 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} => (a-1)^2 \geq \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$

=> xy $\geq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Với $a \le 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a - 1 \le 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (a-1)^2 \le \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$

=> $xy \le \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Do đó $\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \le xy \le \frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy Min(xy) = $\frac{11}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ <=> $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

và Max(xy) = $\frac{11}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ <=> $a = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Bài 14</u> Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình

$\begin{cases}(m+1)x - y = m+1 \\ x + (m-1)y = 2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn điều kiện x + y đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn: Tìm được với $m \ne 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất là

$$\left(x = \frac{m^2+1}{m^2}; y = \frac{m+1}{m^2}\right)$$

Ta có x + y = $\frac{m^2+1}{m^2} + \frac{m+1}{m^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8} \ge \frac{7}{8}$

Min (x + y) = $\frac{7}{8}$ <=> $\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0$ <=> m = - 4 (thỏa mãn $m \ne 0$)

Cách khác:

$x + y = \frac{m^2+m+2}{m^2} = S \Leftrightarrow (1-S)m^2 + m + 2 = 0$ (*)

Ta cần tìm S để phương trình (*) có nghiệm m

- Xét hai trường hợp

*) Trường hợp 1: S = 1 => m = - 2 (thỏa mãn $m \neq 0$)

*) Trường hợp 2: S $\neq 1$, để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$

<=> $S \geq \frac{7}{8}$

Vậy Min S = $\frac{7}{8}$ khi đó m = $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(1-S)} = \frac{-1}{2(1-\frac{7}{8})} = -4$

Min (x + y) = $\frac{7}{8}$ <=> m = - 4

<u>Bài 15</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi m = 2

b) Giải hệ phương trình theo tham số m

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x; y) thoả mãn x - y = 1

d) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Giải:

a) Thay m = 2 vào hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$ ta có hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2.(1 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2 - 4x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2.0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy với m = 2 thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất là

(x ; y) = (0 ; 1)

b) Giải hệ phương trình theo tham số m

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ x + m.(1 - mx) = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ x + m - m^2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ (1 - m^2)x = 2 - m \end{cases}$ (*)

- Trường hợp 1: $m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

+) Nếu m = 1, thay vào hệ phương trình ta có: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ hệ phương trình này vô nghiệm vì $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2}$

+) Nếu m = -1, thay vào hệ phương trình ta có: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ hệ này cũng vô nghiệm vì $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{2}$

- Trường hợp 2: $m^2 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ phương trình $\begin{cases} y = 1 - mx \\ (1 - m^2)x = 2 - m \end{cases}$ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ x = \dfrac{2 - m}{1 - m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - m.\left(\dfrac{2 - m}{1 - m^2}\right) \\ x = \dfrac{2 - m}{1 - m^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \dfrac{2m - m^2}{1 - m^2} \\ x = \dfrac{2 - m}{1 - m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1 - m^2 - 2m + m^2}{1 - m^2} \\ x = \dfrac{2 - m}{1 - m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1 - 2m}{1 - m^2} \\ x = \dfrac{2 - m}{1 - m^2} \end{cases}$

Vậy với $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{2 - m}{1 - m^2}; \frac{1 - 2m}{1 - m^2}\right)$$

Tóm lại:

Nếu $m = \pm 1$ thì hệ phương trình vô nghiệm

Nếu $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất

$$(x; y) = \left(\frac{2 - m}{1 - m^2}; \frac{1 - 2m}{1 - m^2}\right)$$

c) Để hệ phương trình có nghiệm (x; y) thoả mãn x - y = 1

$\Leftrightarrow \dfrac{2-m}{1-m^2}-\dfrac{1-2m}{1-m^2}=1$ $\Leftrightarrow 2-m-(1-2m)=1-m^2$ $\Leftrightarrow m^2+m=0$ $\Leftrightarrow$ $m.(m+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m+1=0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$

Với m = - 1 (loại) và m = 0 (nhận)

Vậy với m = 0 thì hệ phương trình trên có nghiệm thoả mãn điều kiện:

x - y = 1

d) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=1 & (1) \\ x+my=2 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow mx=1-y$ $\Rightarrow m=\dfrac{1-y}{x}$

Thay $m=\dfrac{1-y}{x}$ vào phương trình (2) ta có phương trình

$x+\left(\dfrac{1-y}{x}\right).y=2$ $\Leftrightarrow x+\dfrac{y-y^2}{x}=2$ $\Leftrightarrow x^2+y-y^2=2x$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y-y^2-2x=0$, đây là đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

<u>Bài 16</u> Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+y=m \\ x+(m-1)y=2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x ; y)

a) Giải hệ phương trình khi m = 3

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

c) Giải và biện luận hệ theo m, trong Trường hợp hệ có nghiệm duy nhất tìm giá trị của m thoả mãn: $2x^2 - 7y = 1$

d) Tìm các giá trị của m để biểu thức $\dfrac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị nguyên.

Giải:

a) Thay m = 3 vào hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=m\\x+(m-1)y=2\end{cases}$ ta có hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}(3-1)x+y=3\\x+(3-1)y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=3\\x+2y=2\end{cases} \Leftrightarrow -\begin{cases}4x+2y=6\\x+2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=4\\x+2y=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\\dfrac{4}{3}+2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\2y=2-\dfrac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\2y=\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy với m = 3 thì hệ phương trình có một nghiệm duy nhất

$$(x\ ;\ y)=\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$$

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=m & (1)\\x+(m-1)y=2 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x+my-y=2 \Rightarrow my=2-x+y$

$\Rightarrow m=\dfrac{2-x+y}{y}$.

Thay $m=\dfrac{2-x+y}{y}$ vào phương trình (1) ta có phương trình:

$$\left(\frac{2-x+y}{y}-1\right)x+y=\frac{2-x+y}{y} \Leftrightarrow \left(\frac{2-x+y-y}{y}\right).x+y=\frac{2-x+y}{y}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-x}{y}\right).x+y=\frac{2-x+y}{y} \Leftrightarrow \frac{2x-x^2+y^2}{y}=\frac{2-x+y}{y}$$

$$\Leftrightarrow 2x-x^2+y^2=2-x+y \Leftrightarrow x^2-y^2-3x+y+2=0$$

Vậy $x^2-y^2-3x+y+2=0$ là đẳng thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}(m-1)x+y=m\\x+(m-1)y=2\end{cases}$ theo tham số m, ta có hpt

$\begin{cases}(m-1)x+y=m\\x+(m-1)y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2x+(m-1)y=m.(m-1)\\x+(m-1)y=2\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(m-1)^2x-x=m.(m-1)-2\\x+(m-1)y=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(m^2-2m+1-1)x=m^2-m-2\\x+(m-1)y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m.(m-2)x=(m+1)(m-2) \quad (*)\\x+(m-1)y=2\end{cases}$

- Xét hai Trường hợp:

*) Trường hợp 1: m $\neq 0$ và m $\neq 2$, hệ phương trình trên

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+1}{m}\\\dfrac{m+1}{m}+(m-1)y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+1}{m}\\(m-1)y=2-\dfrac{m+1}{m}\end{cases}$

` $\Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+1}{m}\\(m-1)y=\dfrac{2m-m-1}{m}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+1}{m}\\(m-1)y=\dfrac{m-1}{m}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{m+1}{m}\\y=\dfrac{1}{m}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất (x; y) = $\left(\dfrac{m+1}{m};\dfrac{1}{m}\right)$ $(m\neq 0, m\neq 2)$

*) Trường hợp 2: m = 0 hoặc m = 2

- Với m = 0 thì phương trình (*) trở thành 0x = -2 , phương trình này vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm

- Với m = 2 thì phương trình (*) trở thành 0x = 0 , phương trình này vô số nghiệm nên hệ đã cho vô số nghiệm, nghiệm tổng quát của hệ là:

$$(x\in R; y=2-x)$$

+) Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) thoả mãn $2x^2$ - $7y = 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 7.\left(\frac{1}{m}\right) = 1$ $\Leftrightarrow \frac{2m^2+4m+2}{m^2} - \frac{7}{m} = 1$ $\Leftrightarrow 2m^2+4m+2-7m = m^2$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (m-2).(m-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=0 \\ m-1=0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \text{ (loại)} \\ m=1 \end{array}\right.$ <=> m = 1

Vậy với m = 1 thì hệ phương trình trên có nghiệm thoả mãn điều kiện:

$$2x^2 - 7y = 1$$

d) Thay $x = \frac{m+1}{m}$; $y = \frac{1}{m}$ vào biểu thức A = $\frac{2x-3y}{x+y}$ ta đọc biểu thức

$$A = \frac{2.\left(\frac{m+1}{m}\right) - 3.\frac{1}{m}}{\frac{m+1}{m} + \frac{1}{m}} = \frac{\frac{2m+2-3}{m}}{\frac{m+1+1}{m}}$$

$$= \frac{2m-1}{m} : \frac{m+2}{m} = \frac{2m-1}{m+2} = \frac{2(m+2)-5}{m+2}$$

$$= \frac{2(m+2)}{m+2} - \frac{5}{m+2} = 2 - \frac{5}{m+2}$$

Để biểu thức A = $\frac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow 2 - \frac{5}{m+2}$ nhận giá trị nguyên

$\Leftrightarrow \frac{5}{m+2}$ nhận giá trị nguyên

$\Leftrightarrow 5 \vdots (m+2)$ $\Leftrightarrow$ (m+2) là ớc của 5. Mà Ư(5) = $\{\pm 1; \pm 5\}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=1 \\ m+2=-1 \\ m+2=5 \\ m+2=-5 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1-2 \\ m=-1-2 \\ m=5-2 \\ m=-5-2 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \\ m=3 \\ m=-7 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$; $m \neq 2$ ta thấy các giá trị m trên đều thỏa mãn

Vậy với m $\in \{-7;-3;-1;3\}$ thì giá trị của biểu thức $\dfrac{2x-3y}{x+y}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 17 Cho hệ phương tính ẩn x, y sau: $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m+1 \end{cases}$

a. Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất
b. Giả sử (x ; y) là nghiệm duy nhất của hệ. Ťm hệ thức liên hệ giữa x, y độc lập với m.
c. Ťm m ∈ Z để x, y ∈ Z
d. Chứng tỏ (x ; y) luôn nằm trên một đường thẳng cố định (với (x ; y) là nghiệm của hệ phương trõnh)

Hướng dẫn:

$$\begin{cases} mx + y = 2m & (1) \\ x + my = m + 1 & (2) \end{cases}$$

$$\to (m^2 - 1)x = 2m^2 - m - 1 \qquad (3)$$

Với m ≠ ± 1 th́ hệ phương trõnh có nghiệm duy nhất

b/ Rút m từ phương trõnh thứ nhất và thế vào phương trõnh thứ hai ta được hệ thức

y(y – 1) = (x – 1)(x – 2), đó là hệ thức độc lập với m

c/ $x = \dfrac{2m+1}{m+1} = 2 - \dfrac{1}{m+1}$ (4) $y = \dfrac{m}{m+1} = 1 - \dfrac{1}{m+1}$ (5) . Vỡ x, y ∈ Z

$\to \dfrac{1}{m+1} \in z$

m = 0 ⇒ (x = 1; y = 0)

m = - 2 ⇒ (x = 3; y = 2)

d/ Từ (4) và (5) suy ra x – y = 1 ⇒ y = x – 1

Vậy (x ; y) luôn nằm trên một đường thẳng cố định y = x – 1

Bài 18 **:** Cho hai hệ phương trình $(I)\begin{cases}x+y=a\\x+y=4\end{cases}$ và $(II)\begin{cases}ax-2y=6\\x-y=1\end{cases}$

a) Với a = 2, chứng tỏ hai hệ phương trình tơng đơng

b) Với a = 5, chứng tỏ hai hệ phương trình không tương đương

Hướng dẫn:

a) Thay a = 2 vào hai hệ ta nhận đợc tập nghiệm của chúng : S = S' = $\varnothing$

=> Hai hệ phương trình tơng đơng

b) Thay a = 5 vào hệ (I) => S = $\varnothing$

Thay a = 5 vào hệ (II), hệ có nghiệm duy nhất => S' = $\left\{\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$

Vậy S ≠ S' , nên hai hệ phương trình trên không tơng đơng

Bài 19: Tìm giá trị của m, n để hai hệ phương trình sau tương đương

$$(I)\begin{cases}x-2y=1\\4x+5y=17\end{cases} \text{ và } (II)\begin{cases}mx+ny=6\\3mx+2ny=10\end{cases}$$

Hướng dẫn:

Trước hết giải hệ (I) được kết quả nghiệm duy nhất (x = 3 ; y = 1)

Hai hệ phương trình trên tương đương khi hệ (II) cũng có nghiệm duy nhất (x = 3 ; y = 1). Để tìm m, n ta thay x = 3 ; y = 1 vào hệ (II)

Kết quả m = $\frac{-2}{3}, n = 8$