

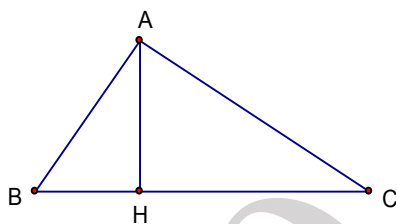
**PHẦN HÌNH HỌC**  
**HỆ THỐNG LÝ THUYẾT – HỆ THỐNG BÀI TẬP**  
**1.HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**  
**TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN**

**A.KIẾN THỨC CƠ BẢN**

**1.Định lý Pitago**

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

**2.Hệ thức lượng trong tam giác vuông**



1)  $AB^2 = BH \cdot BC$ ;  $AC^2 = CH \cdot BC$

2)  $AB \cdot AC = AH \cdot BC$

3)  $AH^2 = BH \cdot HC$

4)  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Kết quả:

-Với tam giác đều cạnh là a, ta có:  $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

**3.Tỉ số lượng giác của góc nhọn**

Đặt  $\angle ACB = \alpha$ ;  $\angle ABC = \beta$  khi đó:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC}; \quad \cot \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{AH}$$

$$b = a \sin B = a \cos C = ctg B = c \cot g C$$

$$c = a \cos B = a \sin C = b \operatorname{ctg} B = b \operatorname{tg} C$$

Kết quả suy ra:

1)  $\sin \alpha = \cos \beta$ ;  $\cos \alpha = \sin \beta$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \cot \beta$ ;  $\cot \alpha = \operatorname{tg} \beta$

$$2) 0 < \sin \alpha < 1; \quad 0 < \cos \alpha < 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cot} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cot} \alpha = 1; \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{cot}^2 \alpha; \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

4) Cho  $\Delta ABC$  nhọn,  $BC = a$ ;  $AC = b$ ;  $AB = c$  khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

## 2. CHỨNG MINH

### BẰNG NHAU – SONG SONG, VUÔNG GÓC - ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

#### A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

##### *1. Tam giác bằng nhau*

a) Khái niệm:  $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$  khi  $\begin{cases} \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'; \angle C = \angle C' \\ AB = A'B'; BC = B'C'; AC = A'C' \end{cases}$

b) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác: c.c.c; c.g.c; g.c.g.

c) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông: hai cạnh góc vuông; cạnh huyền và một cạnh góc vuông; cạnh huyền và một góc nhọn.

d) Hệ quả: Hai tam giác bằng nhau thì có đường cao; các đường phân giác; các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.

##### *2. Chứng minh hai góc bằng nhau*

-Dựng hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng, hai góc của tam giác cân, đều; hai góc của hình thang cân, hình bình hành, ...

-Dựng quan hệ giữa góc trung gian với góc cần chứng minh.

-Dựng quan hệ góc tạo bởi các đường thẳng song song, đối đỉnh.

-Dựng mối quan hệ của góc với đường tròn. (Chứng minh 2 góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau của một đường tròn, ...)

##### *3. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau*

-Dùng đoạn thẳng trung gian.

-Dựng hai tam giác bằng nhau.

-Ứng dụng tính chất đặc biệt của tam giác cân, tam giác đều, trung tuyến ứng với cạnh huyền

của tam giác vuông, hõnh thang cõn, hõnh chữ nhật, ...

-Sử dụng cõc yếu tố của đường trũn: hai dõy cung của hai cung bằng nhau, hai đường kớnh của một đường trũn, ...

-Dụng tónh chất đường trung bõnh của tam giõc, hõnh thang, ...

#### **4.Chứng minh hai đường thẳng, hai đoạn thẳng song song**

-Dụng mối quan hệ giữa cõc gúc: So le bằng nhau, đồng vị bằng nhau, trong cựng phõa bự nhau, ...

-Dụng mối quan hệ cựng song song, vuõng gúc với đường thẳng thứ ba.

-Áp dụng định lý đảo của định lý Talet.

-Áp dụng tónh chất của cõc tứ giác đặc biệt, đường trung bõnh của tam giõc.

-Dụng tónh chất hai dõy chẵn giữa hai cung bằng nhau của một đường trũn.

#### **5.Chứng minh hai đường thẳng vuõng gúc**

-Chứng minh chýng song song với hai đường vuõng gúc khõc.

-Dụng tónh chất: đường thẳng vuõng gúc với một trong hai đường thẳng song song thõ vuõng gúc với đường thẳng cũn lại.

-Dụng tónh chất của đường cao và cạnh đối diện trong một tam giõc.

-Đường kính đi qua trung điểm của dõy.

-Phõn giõc của hai gúc kề bự nhau.

#### **6.Chứng minh ba điểm thẳng hàng**

-Dùng tiên đề Oclit: Nếu  $AB//d$ ;  $BC//d$  thõ A, B, C thẳng hàng.

-Áp dụng tónh chất các điểm đặc biệt trong tam giõc: trọng tõm, trục tâm, tâm đường trũn ngoại tiếp, ...

-Chứng minh 2 tia tạo bởi ba điểm tạo thành gúc bẹt: Nếu gúc ABC bằng  $180^0$  thõ A, B, C thẳng hàng.

-Áp dụng tónh chất: Hai gúc bằng nhau cú hai cạnh nằm tròn một đường thẳng và hai cạnh kia nằm tròn hai nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng tròn.

-Chứng minh AC là đường kớnh của đường trũn tõm B.

#### **7.Chứng minh các đường thẳng đồng quy**

-Áp dụng tónh chất các đường đồng quy trong tam giõc.

-Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng cũn lại đi qua điểm đó.

-Dùng định lý đảo của định lý Talet.

### 3.CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG HỆ THỨC HÌNH HỌC

#### A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

##### 1.Tam giác đồng dạng

-Khái niệm:  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$  khi 
$$\begin{cases} \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'; \angle C = \angle C' \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

-Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác: c – c – c; c – g – c; g – g.

-Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông: góc nhọn; hai cạnh góc vuông; cạnh huyền - cạnh góc vuông...

\*Tính chất: Hai tam giác đồng dạng thì tỉ số hai đường cao, hai đường phân giác, hai đường trung tuyến tương ứng, hai chu vi bằng tỉ số đồng dạng; tỉ số hai diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

##### 2.Phương pháp chứng minh hệ thức hình học

-Dùng định lý Talet, tính chất đường phân giác, tam giác đồng dạng, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, ...

Giả sử cần chứng minh  $MA.MB = MC.MD$

-Chứng minh hai tam giác MAC và MDB đồng dạng hoặc hai tam giác MAD và MCB.

-Trong trường hợp 5 điểm đó cùng nằm trên một đường thẳng thì cần chứng minh các tích tròn cụt bằng tích thứ ba.

Nếu cần chứng minh  $MT^2 = MA.MB$  thì chứng minh hai tam giác MTA và MBT đồng dạng hoặc so sánh với tích thứ ba.

Ngoài ra cần chú ý đến việc sử dụng các hệ thức trong tam giác vuông; phương tích của một điểm với đường tròn.

### 4.CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

#### A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

***Phương pháp chứng minh***

- Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.
- Chứng minh tứ giác có hai góc đối diện bù nhau.
- Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng tạo bởi hai điểm cũn lại hai góc bằng nhau.
- Chứng minh tổng của góc ngoài tại một đỉnh với góc trong đối diện bù nhau.
- Nếu  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$  hoặc  $NA \cdot ND = NC \cdot NB$  thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó

$M = AB \cap CD$ ;  $N = AD \cap BC$  )

-Nếu  $PA \cdot PC = PB \cdot PD$  thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó  $P = AC \cap BD$  )

-Chứng minh tứ giác đó là hình thang cân; hình chữ nhật; hình vuông; ...

***Nếu cần chứng minh cho nhiều điểm cùng thuộc một đường tròn ta có thể chứng minh lần lượt 4 điểm một lúc. Song cần chú ý tính chất “Qua 3 điểm không thẳng hàng xác định duy nhất một đường tròn”***

**B. BÀI TẬP TỔNG HỢP:**

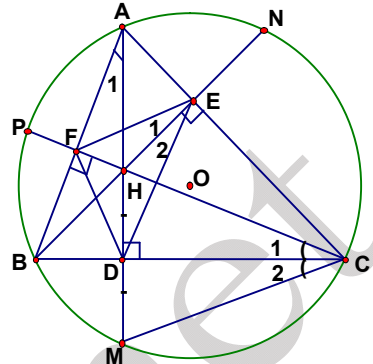
**Bài 1.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại

H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P.

$$\Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^\circ$$

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3.  $AE.AC = AH.AD$ ;  $AD.BC = BE.AC$ .
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



**Lời giải:**

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$$\angle CEH = 90^\circ \text{ ( Vì BE là đường cao)}$$

$$\angle CDH = 90^\circ \text{ ( Vì AD là đường cao)}$$

Mà  $\angle CEH$  và  $\angle CDH$  là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao  $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$ .

$$CF \text{ là đường cao } \Rightarrow CF \perp AB \Rightarrow \angle BFC = 90^\circ.$$

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc  $90^\circ \Rightarrow E$  và  $F$  cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có:  $\angle AEH = \angle ADC = 90^\circ$  ;  $\hat{A}$  là góc chung

$$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE.AC = AH.AD.$$

\* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có:  $\angle BEC = \angle ADC = 90^\circ$  ;  $\hat{C}$  là góc chung

$$\Rightarrow \Delta BEC \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AD.BC = BE.AC.$$

4. Ta có  $\angle C_1 = \angle A_1$  ( vì cùng phụ với góc ABC)

$$\angle C_2 = \angle A_1 \text{ ( vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)}$$

$$\Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \Rightarrow CB \text{ là tia phân giác của góc HCM; lại có } CB \perp HM \Rightarrow \Delta CHM \text{ cân tại C}$$

$$\Rightarrow CB \text{ cũng là đường trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.}$$

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

$$\Rightarrow \angle C_1 = \angle E_1 \text{ ( vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)}$$

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle C_1 = \angle E_2 \text{ ( vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)}$$

$$\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_2 \Rightarrow EB \text{ là tia phân giác của góc FED.}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

**Bài 2.** Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn

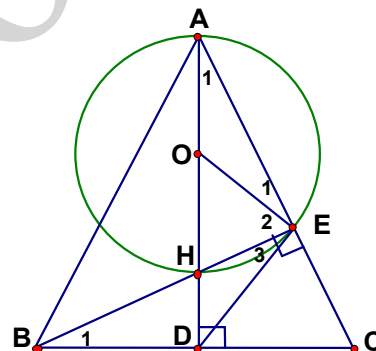
ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh  $ED = \frac{1}{2} BC$ .
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết  $DH = 2 \text{ Cm}$ ,  $AH = 6 \text{ Cm}$ .

**Lời giải:**

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$$\angle CEH = 90^0 \text{ ( Vì BE là đường cao)}$$



$$\angle CDH = 90^0 \text{ ( Vì AD là đường cao)}$$

$$\Rightarrow \angle CEH + \angle CDH = 180^0$$

Mà  $\angle CEH$  và  $\angle CDH$  là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao  $\Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow \angle BEA = 90^0$ .

AD là đường cao  $\Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow \angle BDA = 90^0$ .

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc  $90^0 \Rightarrow E$  và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến  
 $\Rightarrow$  D là trung điểm của BC. Theo trên ta có  $\angle BEC = 90^\circ$ .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến  $\Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$ .

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH  $\Rightarrow OA = OE \Rightarrow$   
 tam giác AOE cân tại O  $\Rightarrow \angle E_1 = \angle A_1$  (1).

Theo trên  $DE = \frac{1}{2} BC \Rightarrow$  tam giác DBE cân tại D  $\Rightarrow \angle E_3 = \angle B_1$  (2)

Mà  $\angle B_1 = \angle A_1$  ( vì cùng phụ với góc ACB)  $\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_3 \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà  $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \angle E_2 + \angle E_3 = 90^\circ = \angle OED \Rightarrow DE \perp OE$  tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm  $\Rightarrow OH = OE = 3$  cm.; DH = 2 Cm  $\Rightarrow OD = 5$  cm. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có  $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4$ cm

**Bài 3** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax, By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh  $AC + BD = CD$ .

2. Chứng minh  $\angle COD = 90^\circ$ .

3. Chứng minh  $AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}$ .

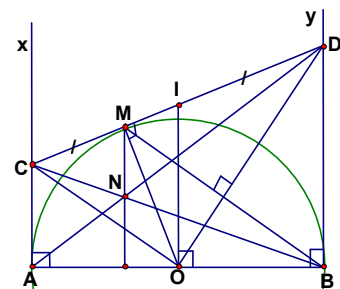
4. Chứng minh  $OC \parallel BM$

5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

5. Chứng minh  $MN \perp AB$ .

6. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải:**



1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:  $CA = CM$ ;  $DB = DM \Rightarrow AC + BD = CM + DM$ .

Mà  $CM + DM = CD \Rightarrow AC + BD = CD$

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà  $\angle AOM$  và  $\angle BOM$  là hai góc kề bù  $\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$ .



3. Theo trên  $\angle COD = 90^\circ$  nên tam giác COD vuông tại O có  $OM \perp CD$  (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có  $OM^2 = CM \cdot DM$ ,

$$\text{Mà } OM = R; CA = CM; DB = DM \Rightarrow AC \cdot BD = R^2 \Rightarrow AC \cdot BD = \frac{AB^2}{4}.$$

4. Theo trên  $\angle COD = 90^\circ$  nên  $OC \perp OD$  .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:  $DB = DM$ ; lại có  $OM = OB = R \Rightarrow OD$  là trung trực của  $BM \Rightarrow BM \perp OD$  .(2). Từ (1) Và (2)  $\Rightarrow OC \parallel BM$  ( Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có  $AC \perp AB$ ;  $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow$  tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB  $\Rightarrow IO$  là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow IO \parallel AC$  , mà  $AC \perp AB \Rightarrow IO \perp AB$  tại O  $\Rightarrow AB$  là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên  $AC \parallel BD \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$  , mà  $CA = CM$ ;  $DB = DM$  nên suy ra  $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

$$\Rightarrow MN \parallel BD \text{ mà } BD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB.$$

7. ( HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà  $AC + BD = CD$  nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó  $CD \parallel AB \Rightarrow M$  phải là trung điểm của cung AB.

**Bài 4** Cho tam giác cân ABC ( $AB = AC$ ), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc

A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết  $AB = AC = 20$  Cm,  $BC = 24$  Cm.

tiếp góc A nên BI và BK

là hai tia phân giác của

hai góc kề bù đỉnh B

Do đó  $BI \perp BK$  hay  $\angle IBK = 90^\circ$  .

**Lời giải:** (HD)

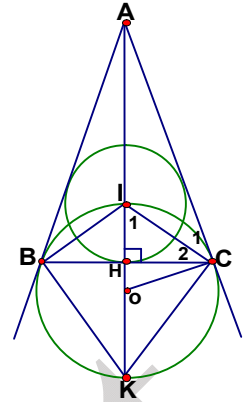
Tương tự ta cũng

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng có  $\angle ICK = 90^\circ$  như vậy B

và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có  $\angle C_1 = \angle C_2$  (1) ( vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^\circ$  (2) ( vì  $\angle IHC = 90^\circ$  ).



$\angle I_1 = \angle ICO$  (3) ( vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3)  $\Rightarrow \angle C_1 + \angle ICO = 90^\circ$  hay  $AC \perp OC$ . Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết  $AB = AC = 20$  Cm,  $BC = 24$  Cm  $\Rightarrow CH = 12$  cm.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$

$$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9 \text{ (cm)}$$

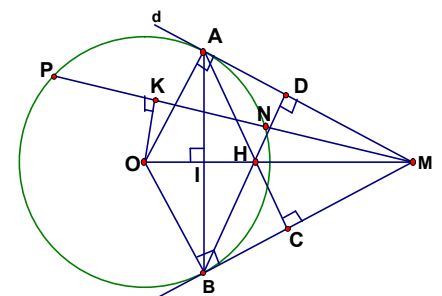
$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)}$$

**Bài 5** Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì ( M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ  $AC \perp MB$ ,  $BD \perp MA$ , gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh  $OI.OH = R^2$ ;  $OI. IM = IA^2$ .
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên  $OK \perp NP$  ( quan hệ đường kính



**Lời giải:**

Và đây cũng  $\Rightarrow \angle OKM = 90^\circ$ . Theo tính chất tiếp tuyến ta có  $\angle OAM = 90^\circ$ ;  $\angle OBM = 90^\circ$ . như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc  $90^\circ$  nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có  $MA = MB$  (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau);  $OA = OB = R$

$\Rightarrow OM$  là trung trực của  $AB \Rightarrow OM \perp AB$  tại I.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có  $\angle OAM = 90^\circ$  nên tam giác  $OAM$  vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao  $\Rightarrow OI \cdot OM = OA^2$  hay  $OI \cdot OM = R^2$ ; và  $OI \cdot IM = IA^2$ .

4. Ta có  $OB \perp MB$  (tính chất tiếp tuyến);  $AC \perp MB$  (gt)  $\Rightarrow OB \parallel AC$  hay  $OB \parallel AH$ .

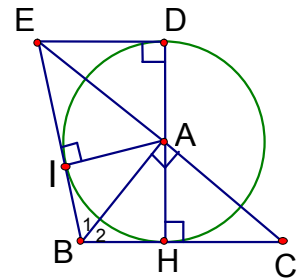
$OA \perp MA$  (tính chất tiếp tuyến);  $BD \perp MA$  (gt)  $\Rightarrow OA \parallel BD$  hay  $OA \parallel BH$ .

$\Rightarrow$  Tứ giác  $OAHB$  là hình bình hành; lại có  $OA = OB (=R) \Rightarrow OAHB$  là hình thoi.

5. Theo trên  $OAHB$  là hình thoi.  $\Rightarrow OH \perp AB$ ; cũng theo trên  $OM \perp AB \Rightarrow O, H, M$  thẳng hàng (Vi qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên  $OAHB$  là hình thoi.  $\Rightarrow AH = AO = R$ . Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính  $AH = R$

**Bài 6** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.



1. Chứng minh tam giác  $BEC$  cân.

2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng  $AI = AH$ .

3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).

4. Chứng minh  $BE = BH + DE$ .

**Lời giải:** (HD)

1.  $\Delta AHC = \Delta ADE$  (g.c.g)  $\Rightarrow ED = HC$  (1) và  $AE = AC$  (2).

Vì  $AB \perp CE$  (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của  $\Delta BEC \Rightarrow BEC$  là tam giác cân.  $\Rightarrow \angle B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung,  $\angle B_1 = \angle B_2 \Rightarrow \Delta AHB = \Delta AIB \Rightarrow$

$$AI = AH.$$

3.  $AI = AH$  và  $BE \perp AI$  tại  $I \Rightarrow BE$  là tiếp tuyến của  $(A; AH)$  tại  $I$ .

4.  $DE = IE$  và  $BI = BH \Rightarrow BE = BI + IE = BH + ED$

**Bài 7** Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ . Kẻ tiếp tuyến  $Ax$  và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm  $P$  sao

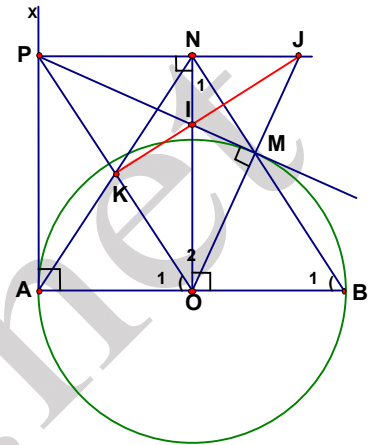
cho  $AP > R$ , từ  $P$  kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với  $(O)$  tại  $M$ .

1. Chứng minh rằng tứ giác  $APMO$  nội tiếp được một đường tròn.

2. Chứng minh  $BM \parallel OP$ .

3. Đường thẳng vuông góc với  $AB$  ở  $O$  cắt tia  $BM$  tại  $N$ . Chứng minh tứ giác  $OBNP$  là hình bình hành.

4. Biết  $AN$  cắt  $OP$  tại  $K$ ,  $PM$  cắt  $ON$  tại  $I$ ;  $PN$  và  $OM$  kéo dài cắt nhau tại  $J$ . Chứng minh  $I, J, K$  thẳng hàng.



**Lời giải:**

1. (HS tự làm).

2. Ta có  $\angle ABM$  nội tiếp chắn cung  $AM$ ;  $\angle AOM$  là góc ở tâm

chắn cung  $AM \Rightarrow \angle ABM = \frac{\angle AOM}{2}$  (1)  $OP$  là tia phân giác  $\angle$

$AOM$  ( t/c hai tiếp tuyến cắt nhau )  $\Rightarrow \angle AOP = \frac{\angle AOM}{2}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \angle ABM = \angle AOP$  (3)

Mà  $\angle ABM$  và  $\angle AOP$  là hai góc đồng vị nên suy ra  $BM \parallel OP$ . (4)

3. Xét hai tam giác  $AOP$  và  $OBN$  ta có :  $\angle PAO = 90^\circ$  (vì  $PA$  là tiếp tuyến );  $\angle NOB = 90^\circ$  (gt  $NO \perp AB$ ).

$\Rightarrow \angle PAO = \angle NOB = 90^\circ$ ;  $OA = OB = R$ ;  $\angle AOP = \angle OBN$  (theo (3))  $\Rightarrow \Delta AOP = \Delta OBN \Rightarrow OP = BN$

(5)

Từ (4) và (5)  $\Rightarrow OBNP$  là hình bình hành ( vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác  $OBNP$  là hình bình hành  $\Rightarrow PN \parallel OB$  hay  $PJ \parallel AB$ , mà  $ON \perp AB \Rightarrow ON \perp PJ$

Ta cũng có  $PM \perp OJ$  (  $PM$  là tiếp tuyến ), mà  $ON$  và  $PM$  cắt nhau tại  $I$  nên  $I$  là trực tâm tam giác  $POJ$ . (6)

(6)

Để thấy tứ giác  $AONP$  là hình chữ nhật vì có  $\angle PAO = \angle AON = \angle ONP = 90^\circ \Rightarrow K$  là trung

điểm của PO ( t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật  $\Rightarrow \angle APO = \angle NOP$  ( so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác  $\angle APM \Rightarrow \angle APO = \angle MPO$  (8).

Từ (7) và (8)  $\Rightarrow \triangle IPO$  cân tại I có IK là trung tuyến đồng thời là đường cao  $\Rightarrow IK \perp PO$ . (9)

Từ (6) và (9)  $\Rightarrow I, J, K$  thẳng hàng.

**Bài 8** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn ( M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

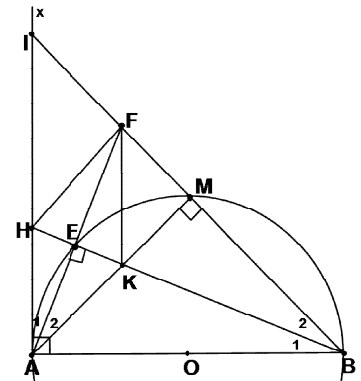
2) Chứng minh rằng:  $AI^2 = IM \cdot IB$ .

3) Chứng minh BAF là tam giác cân.

4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.

5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

$\Rightarrow \angle KMF + \angle KEF = 180^\circ$ . Mà  $\angle KMF$  và  $\angle KEF$  là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.



**Lời giải:**

1. Ta có :  $\angle AMB = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )

$\Rightarrow \angle KMF = 90^\circ$  (vì là hai góc kề bù).

$\angle AEB = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )

$\Rightarrow \angle KEF = 90^\circ$  (vì là hai góc kề bù).

2. Ta có  $\angle IAB = 90^\circ$  ( vì AI là tiếp tuyến )  $\Rightarrow \triangle AIB$  vuông tại A có  $AM \perp IB$  ( theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao  $\Rightarrow AI^2 = IM \cdot IB$ .

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM  $\Rightarrow \angle IAE = \angle MAE \Rightarrow AE = ME$  ( lí do .....)

$\Rightarrow \angle ABE = \angle MBE$  ( hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)  $\Rightarrow BE$  là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có  $\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow BE \perp AF$  hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow BAF$  là tam giác cân. tại B .

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến  $\Rightarrow E$  là

trung điểm của AF. (3)

Từ  $BE \perp AF \Rightarrow AF \perp HK$  (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác  $\angle HAK$  (5)

Từ (4) và (5)  $\Rightarrow HAK$  là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến  $\Rightarrow E$  là trung điểm của HK. (6).

Từ (3), (4) và (6)  $\Rightarrow AKFH$  là hình thoi ( vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên  $AKFH$  là hình thoi  $\Rightarrow HA // FK$  hay  $IA // FK \Rightarrow$  tứ giác AKFI là hình thang. Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB  $\Rightarrow \angle ABM = \angle MAI = 45^\circ$  (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có  $\angle ABI = 45^\circ \Rightarrow \angle AIB = 45^\circ$ . (8)

Từ (7) và (8)  $\Rightarrow \angle IAK = \angle AIF = 45^\circ \Rightarrow AKFI$  là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

**Bài 9** Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh  $\angle ABD = \angle DFB$ .
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

), mà AB là đường kính nên

$AB = 2R$  không đổi do đó

**Lời giải:**

1.C thuộc nửa đường tròn nên  $\angle ACB = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường AC. AE không đổi.

tròn )  $\Rightarrow BC \perp AE$ .

2.  $\Delta ADB$  có  $\angle ADB = 90^\circ$  ( nội

$\angle ABE = 90^\circ$  ( Bx là tiếp tuyến )  $\Rightarrow$  tam giác ABE vuông tại B có tiếp chắn nửa đường tròn ).

BC là đường cao  $\Rightarrow AC. AE = AB^2$  (hệ thức giữa cạnh và đường cao  $\Rightarrow \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$  (vì



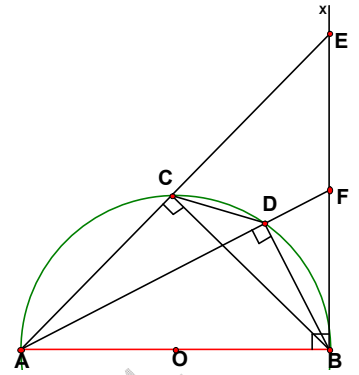
tổng ba góc của một tam giác bằng  $180^0$ )(1)

$\Delta ABF$  có  $\angle ABF = 90^0$  (  $BF$  là tiếp tuyến ).

$\Rightarrow \angle AFB + \angle BAF = 90^0$  (vì tổng ba góc của một tam giác bằng  $180^0$ )

(2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \angle ABD = \angle DFB$  ( cùng phụ với  $\angle BAD$ )



3. Tứ giác ACDB nội tiếp (O)  $\Rightarrow \angle ABD + \angle ACD = 180^0$  .

$\angle ECD + \angle ACD = 180^0$  ( Vì là hai góc kề bù)  $\Rightarrow \angle ECD = \angle ABD$  ( cùng bù với  $\angle ACD$ ).

Theo trên  $\angle ABD = \angle DFB \Rightarrow \angle ECD = \angle DFB$ . Mà  $\angle EFD + \angle DFB = 180^0$  ( Vì là hai góc kề bù) nên suy ra  $\angle ECD + \angle EFD = 180^0$ , mặt khác  $\angle ECD$  và  $\angle EFD$  là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

**Bài 10** Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho  $AM < MB$ . Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường

vuông góc từ S đến AB.

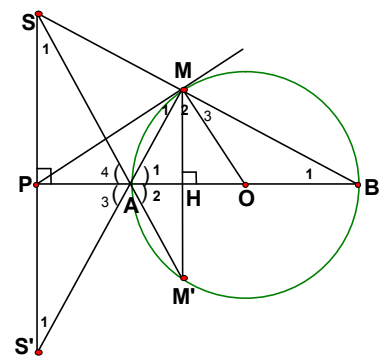
1. Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng  $\Delta PS'M$  cân. 2. Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .

2. Vì M' đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn  $\Rightarrow$  hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau

**Lời giải:**

1. Ta có  $SP \perp AB$  (gt)  $\Rightarrow \angle SPA = 90^0$  ;  $\angle AMB = 90^0$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )  $\Rightarrow \angle AMS = 90^0$  . Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng  $90^0$  nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.



$\Rightarrow \angle AMM' = \angle AM'M$  ( Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Cũng vì M' đối xứng M qua AB nên  $MM' \perp AB$  tại H  $\Rightarrow MM' \parallel SS'$  ( cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \angle AMM' = \angle AS'S$ ;  $\angle AM'M = \angle ASS'$  (vì so le trong) (2).

$\Rightarrow$  Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \angle AS'S = \angle ASS'$ .

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đ/ tròn  $\Rightarrow \angle ASP = \angle AMP$  (nội tiếp cùng chắn AP )

$\Rightarrow \angle AS'P = \angle AMP \Rightarrow$  tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M  $\Rightarrow \angle B_1 = \angle S'_1$  (cùng phụ với  $\angle S$ ).  
(3)

Tam giác PMS' cân tại P  $\Rightarrow \angle S'_1 = \angle M_1$  (4)

Tam giác OBM cân tại O ( vì có  $OM = OB = R$ )  $\Rightarrow \angle B_1 = \angle M_3$  (5).

Từ (3), (4) và (5)  $\Rightarrow \angle M_1 = \angle M_3 \Rightarrow \angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$  mà  $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^\circ$  nên suy ra  $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^\circ \Rightarrow PM \perp OM$  tại M  $\Rightarrow PM$  là tiếp tuyến của đường tròn tại M

**Bài 11.** Cho tam giác ABC ( $AB = AC$ ). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F. BF cắt (O) tại I, DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2.  $DF \parallel BC$ .

3. Tứ giác BDFC nội tiếp.

4.  $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

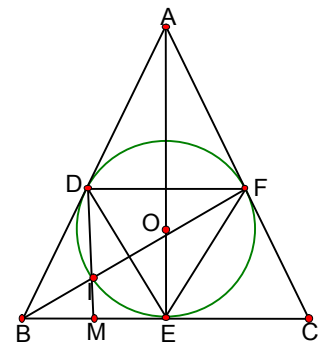
$\Rightarrow$  BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội

**Lời giải:**

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có  $AD = AF \Rightarrow$  tam giác ADF tiếp được một đường cân tại A  $\Rightarrow \angle ADF = \angle AFD < 90^\circ \Rightarrow$  số cung DF  $< 180^\circ \Rightarrow \angle DEF < 90^\circ$  ( vì tròn . góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có  $\angle DFE < 90^\circ$ ;  $\angle EDF < 90^\circ$ . Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. Ta có  $AB = AC$  (gt);  $AD = AF$  (theo trên)  $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow DF \parallel BC$ .



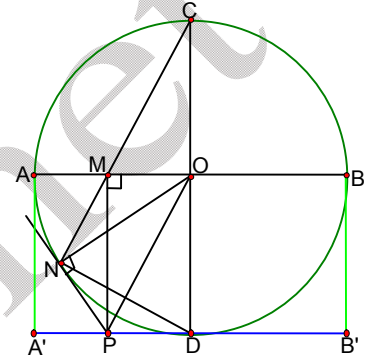
3.  $DF \parallel BC \Rightarrow$  BDFC là hình thang lại có  $\angle B = \angle C$  (vì tam giác ABC cân)



4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có  $\angle DBM = \angle BCF$  ( hai góc đáy của tam giác cân).  
 $\angle BDM = \angle BFD$  (nội tiếp cùng chắn cung DI);  $\angle CBF = \angle BFD$  (vì so le)  $\Rightarrow \angle BDM = \angle CBF$ .  
 $\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle CBF \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

**Bài 12** Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM, CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.



**Lời giải:**

1. Ta có  $\angle OMP = 90^0$  ( vì  $PM \perp AB$  );  $\angle ONP = 90^0$  (vì NP là tiếp tuyến ).

Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng  $90^0 \Rightarrow M$  và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP  $\Rightarrow$  Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp  $\Rightarrow \angle OPM = \angle ONM$  (nội tiếp chắn cung OM) Tam giác ONC cân tại O vì có  $ON = OC = R \Rightarrow \angle ONC = \angle OCN$

$\Rightarrow \angle OPM = \angle OCM$ .

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có  $\angle MOC = \angle OMP = 90^0$ ;  $\angle OPM = \angle OCM$   
 $\Rightarrow \angle CMO = \angle POM$  lại có MO là cạnh chung  $\Rightarrow \triangle OMC = \triangle MOP \Rightarrow OC = MP$ . (1)

Theo giả thiết Ta có  $CD \perp AB$ ;  $PM \perp AB \Rightarrow CO \parallel PM$  (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có  $\angle MOC = 90^0$  ( gt  $CD \perp AB$ );  $\angle DNC = 90^0$  (nội tiếp chắn nửa đường tròn )  $\Rightarrow \angle MOC = \angle DNC = 90^0$  lại có  $\angle C$  là góc chung  $\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle NDC$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = CO \cdot CD \text{ mà } CO = R; CD = 2R \text{ nên } CO \cdot CD = 2R^2 \text{ không đổi} \Rightarrow CM \cdot CN$$

$= 2R^2$  không đổi hay tích  $CM \cdot CN$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$ .

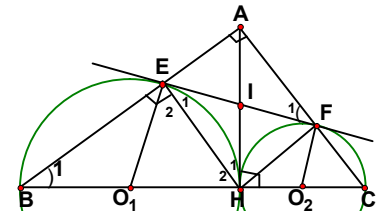
4. (HD) Dễ thấy  $\triangle OMC = \triangle DPO$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle ODP = 90^\circ \Rightarrow P$  chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với  $CD$  tại  $D$ .

Vì  $M$  chỉ chạy trên đoạn thẳng  $AB$  nên  $P$  chỉ chạy trên đoạn thẳng  $A'B'$  song song và bằng  $AB$ .

**Bài 13** Cho tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  ( $AB > AC$ ), đường cao  $AH$ . Trên nửa mặt phẳng bờ  $BC$  chứa điểm  $A$ , Vẽ nửa đường tròn đường kính  $BH$  cắt  $AB$  tại  $E$ , Nửa đường tròn đường kính  $HC$  cắt  $AC$  tại  $F$ .

1. Chứng minh  $AFHE$  là hình chữ nhật.
2.  $BEFC$  là tứ giác nội tiếp.
3.  $AE \cdot AB = AF \cdot AC$ .
4. Chứng minh  $EF$  là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

**Lời giải:**



1. Ta có :  $\angle BEH = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )

$$\Rightarrow \angle AEH = 90^\circ \text{ (vì là hai góc kề bù). (1)}$$

$$\angle CFH = 90^\circ \text{ ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )}$$

$$\Rightarrow \angle AFH = 90^\circ \text{ (vì là hai góc kề bù). (2)}$$

$$\angle EAF = 90^\circ \text{ ( Vì tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \text{) (3)}$$

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow$  tứ giác  $AFHE$  là hình chữ nhật ( vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác  $AFHE$  là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn  $\Rightarrow \angle F_1 = \angle H_1$  (nội tiếp chắn cung  $AE$ ) . Theo giả thiết  $AH \perp BC$  nên  $AH$  là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn  $(O_1)$  và  $(O_2)$

$$\Rightarrow \angle B_1 = \angle H_1 \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle EBC + \angle EFC = \angle AFE + \angle EFC \text{ mà } \angle AFE + \angle EFC = 180^\circ \text{ (vì là hai góc kề bù)} \Rightarrow \angle EBC + \angle EFC = 180^\circ$$

mặt khác  $\angle EBC$  và  $\angle EFC$  là hai góc đối của tứ giác  $BEFC$  do đó  $BEFC$  là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác  $AEF$  và  $ACB$  ta có  $\angle A = 90^\circ$  là góc chung;  $\angle AFE = \angle ABC$  ( theo Chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC.$$

\* **HD cách 2:** Tam giác  $AHB$  vuông tại  $H$  có  $HE \perp AB \Rightarrow AH^2 = AE \cdot AB$  (\*)

Tam giác  $AHC$  vuông tại  $H$  có  $HF \perp AC \Rightarrow AH^2 = AF \cdot AC$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$

4. Tứ giác  $AFHE$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow IE = EH \Rightarrow \triangle IEH$  cân tại  $I \Rightarrow \angle E_1 = \angle H_1$ .

$\triangle O_1EH$  cân tại  $O_1$  (vì có  $O_1E$  và  $O_1H$  cùng là bán kính)  $\Rightarrow \angle E_2 = \angle H_2$ .

$\Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle H_1 + \angle H_2$  mà  $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow \angle E_1 + \angle E_2 = \angle O_1EF = 90^\circ$

$\Rightarrow O_1E \perp EF$ .

Chứng minh tương tự ta cũng có  $O_2F \perp EF$ . Vậy  $EF$  là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

**Bài 14** Cho điểm  $C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $AC = 10$  Cm,  $CB = 40$  Cm. Vẽ về một phía của  $AB$  các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là  $AB, AC, CB$  và có tâm theo thứ tự là  $O, I, K$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt nửa đường tròn  $(O)$  tại  $E$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là giao điểm của  $EA,$

$EB$  với các nửa đường tròn  $(I), (K)$ .

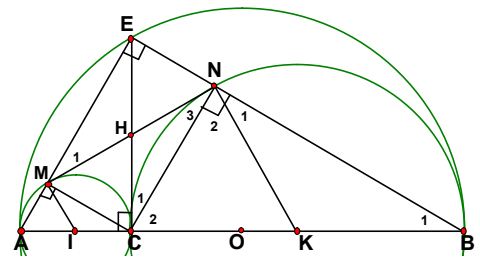
1. Ta có:  $\angle BNC = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm  $K$ )

1. Chứng minh  $EC = MN$ .

2. Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn  $(I), (K)$ .

3. Tính  $MN$ .

4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn



**Lời giải:**

$\Rightarrow \angle ENC = 90^\circ$  (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle AMC = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm  $I$ )  $\Rightarrow \angle EMC = 90^\circ$  (vì là hai góc kề bù). (2)

$\angle AEB = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm  $O$ ) hay  $\angle MEN = 90^\circ$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow$  tứ giác  $CMEN$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow EC = MN$  (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết  $EC \perp AB$  tại  $C$  nên  $EC$  là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn  $(I)$  và  $(K)$

$\Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên  $\Rightarrow \angle C_1 = \angle N_3$

$\Rightarrow \angle B_1 = \angle N_3$ . (4) Lại có  $KB = KN$  (cùng là bán kính)  $\Rightarrow$  tam giác KBN cân tại K  $\Rightarrow \angle B_1 = \angle N_1$   
(5)

Từ (4) và (5)  $\Rightarrow \angle N_1 = \angle N_3$  mà  $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^\circ \Rightarrow \angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^\circ$  hay  $MN \perp KN$  tại N  $\Rightarrow MN$  là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có  $MN$  là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy  $MN$  là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có  $\angle AEB = 90^\circ$  (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O)  $\Rightarrow \triangle AEB$  vuông tại A có  $EC \perp AB$  (gt)  
 $\Rightarrow EC^2 = AC \cdot BC \Leftrightarrow EC^2 = 10 \cdot 40 = 400 \Rightarrow EC = 20$  cm. Theo trên  $EC = MN \Rightarrow MN = 20$  cm.

4. Theo giả thiết  $AC = 10$  Cm,  $CB = 40$  Cm  $\Rightarrow AB = 50$ cm  $\Rightarrow OA = 25$  cm

Ta có  $S_{(O)} = \pi \cdot OA^2 = \pi \cdot 25^2 = 625\pi$ ;  $S_{(I)} = \pi \cdot IA^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ ;  $S_{(K)} = \pi \cdot KB^2 = \pi \cdot 20^2 = 400\pi$

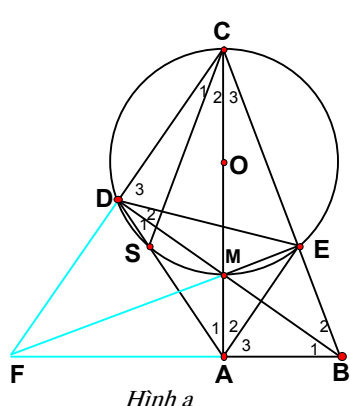
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là  $S = \frac{1}{2} (S_{(O)} - S_{(I)} - S_{(K)})$

$$S = \frac{1}{2} (625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2} \cdot 200\pi = 100\pi \approx 314 \text{ (cm}^2\text{)}$$

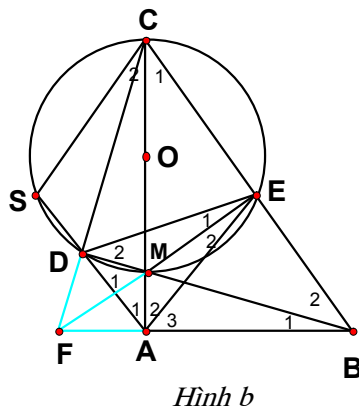
**Bài 15** Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

**Lời giải:**



Hình a



Hình b

1. Ta có  $\angle CAB = 90^\circ$  ( vì tam giác ABC vuông tại A);  $\angle MDC = 90^\circ$  ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn )  $\Rightarrow \angle CDB = 90^\circ$  như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng  $90^\circ$  nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC  $\Rightarrow$  ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \angle D_1 = \angle C_3$  ( nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3 \Rightarrow \widehat{SM} = \widehat{EM} \Rightarrow \angle C_2 = \angle C_3$  (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow$  CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét  $\triangle CMB$  Ta có  $BA \perp CM$ ;  $CD \perp BM$ ;  $ME \perp BC$  như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có  $\widehat{SM} = \widehat{EM} \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2 \Rightarrow$  DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có  $\angle MEC = 90^\circ$  (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))  $\Rightarrow \angle MEB = 90^\circ$ .

Tứ giác AMEB có  $\angle MAB = 90^\circ$ ;  $\angle MEB = 90^\circ \Rightarrow \angle MAB + \angle MEB = 180^\circ$  mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn  $\Rightarrow \angle A_2 = \angle B_2$ .

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \angle A_1 = \angle B_2$  ( nội tiếp cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow$  AM là tia phân giác của góc DAE (2)

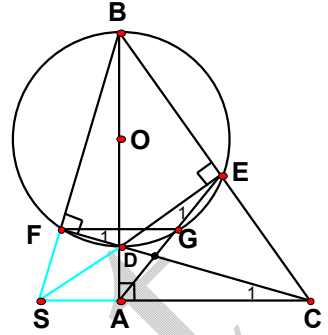
Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

### **TH2(Hình b)**

**Câu 2 :**  $\angle ABC = \angle CME$  (cùng phụ  $\angle ACB$ );  $\angle ABC = \angle CDS$  (cùng bù  $\angle ADC$ )  $\Rightarrow \angle CME = \angle CDS$

$\Rightarrow \widehat{CE} = \widehat{CS} \Rightarrow \widehat{SM} = \widehat{EM} \Rightarrow \angle SCM = \angle ECM \Rightarrow$  CA là tia phân giác của góc SCB.

**Bài 16** Cho tam giác ABC vuông ở A. và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.



Chứng minh :

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3.  $AC \parallel FG$ .
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

**Lời giải:**

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có  $\angle BAC = 90^\circ$  ( vì tam giác ABC vuông tại A);  $\angle DEB = 90^\circ$  ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn )  
 $\Rightarrow \angle DEB = \angle BAC = 90^\circ$  ; lại có  $\angle ABC$  là góc chung  $\Rightarrow \triangle DEB \sim \triangle CAB$  .

2. Theo trên  $\angle DEB = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC = 90^\circ$  (vì hai góc kề bù);  $\angle BAC = 90^\circ$  ( vì  $\triangle ABC$  vuông tại A) hay  $\angle DAC = 90^\circ \Rightarrow \angle DEC + \angle DAC = 180^\circ$  mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .

\*  $\angle BAC = 90^\circ$  ( vì tam giác ABC vuông tại A);  $\angle DFB = 90^\circ$  ( góc nội tiếp chắn nửa đường tròn ) hay  $\angle BFC = 90^\circ$  như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng  $90^\circ$  nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC  $\Rightarrow AFBC$  là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1$  lại có  $\angle E_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle F_1 = \angle C_1$  mà đây là hai góc so le trong nên suy ra  $AC \parallel FG$ .

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

**Bài 17.** Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì ( M không trùng B, C, H ) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

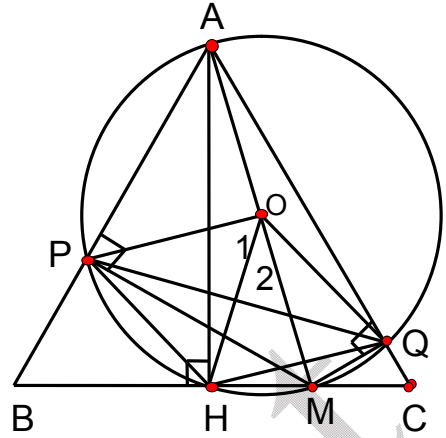
1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng  $MP + MQ = AH$ .
3. Chứng minh  $OH \perp PQ$ .

**Lời giải:**

1. Ta có  $MP \perp AB$  (gt)  $\Rightarrow \angle APM = 90^\circ$ ;  $MQ \perp AC$  (gt)  $\Rightarrow \angle AQM = 90^\circ$  như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng  $90^\circ$  nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM  $\Rightarrow APMQ$  là tứ giác nội tiếp.



\* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.



$$2. \text{ Tam giác } ABC \text{ có } AH \text{ là đường cao} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH.$$

$$\text{ Tam giác } ABM \text{ có } MP \text{ là đường cao} \Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MP$$

$$\text{ Tam giác } ACM \text{ có } MQ \text{ là đường cao} \Rightarrow S_{ACM} = \frac{1}{2} AC \cdot MQ$$

$$\text{ Ta có } S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot MP + \frac{1}{2} AC \cdot MQ = \frac{1}{2} BC \cdot AH \Rightarrow AB \cdot MP + AC \cdot MQ = BC \cdot AH$$

$$\text{ Mà } AB = BC = CA \text{ (vì tam giác } ABC \text{ đều)} \Rightarrow MP + MQ = AH.$$

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác  $\Rightarrow \angle HAP = \angle HAQ \Rightarrow$

$\widehat{HP} = \widehat{HQ}$  ( tính chất góc nội tiếp )  $\Rightarrow \angle HOP = \angle HOQ$  (t/c góc ở tâm)  $\Rightarrow OH$  là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O ( vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao  $\Rightarrow OH \perp PQ$

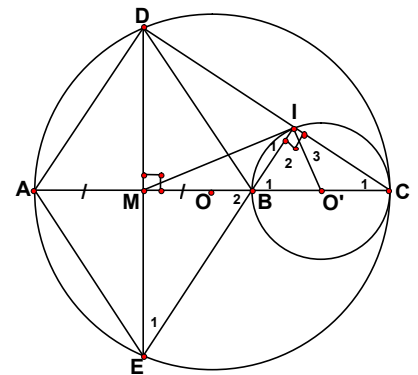
**Bài 18** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì ( H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội

**Lời giải:**

1.  $\angle BIC = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )  $\Rightarrow \angle BID = 90^\circ$  (vì là hai góc kề bù);  $DE \perp AB$  tại M  $\Rightarrow \angle BMD = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \angle BID + \angle BMD = 180^\circ$  mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB;  $DE \perp AB$  tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)



$\Rightarrow$  Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3.  $\angle ADC = 90^\circ$  ( nội tiếp chắn nửa đường tròn )  $\Rightarrow AD \perp DC$ ; theo trên  $BI \perp DC \Rightarrow BI \parallel AD$ . (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi  $\Rightarrow EB \parallel AD$  (2).

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow I, B, E$  thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I  $\Rightarrow IM$  là trung tuyến ( vì M là trung điểm của DE )  $\Rightarrow MI = ME \Rightarrow \triangle MIE$  cân tại M

$\Rightarrow \angle I_1 = \angle E_1$  ;  $\triangle O'IC$  cân tại  $O'$  ( vì  $O'C$  và  $O'I$  cùng là bán kính )

$\Rightarrow \angle I_3 = \angle C_1$  mà  $\angle C_1 = \angle E_1$  ( Cùng phụ với góc EDC )  $\Rightarrow \angle I_1 = \angle I_3$

$\Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$  . Mà  $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^\circ \Rightarrow \angle I_1 + \angle I_2$

$= 90^\circ = \angle MIO'$  hay  $MI \perp O'I$  tại I  $\Rightarrow MI$  là tiếp tuyến của (O)

