**ĐỀ SỐ 4**

**Câu 1:**

a) Cho x và y là 2 số thực thoả mãn x2 + y2 = 4. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : A = .

b) Cho x, y, z là 3 số thực dương thoả mãn x2 + y2 + z2 = 2. Chứng minh:

 .

**Câu 2:**

a) Giải phương trình: x2 + 9x + 20 = 2.

b) Tìm x, y thoả mãn: .

**Câu 3:**

a) Chứng minh rằng nếu: thì .

b) Chứng minh rằng nếu phương trình x4 + ax3 + bx2 + ax +1 = 0 có nghiệm thì 5(a2 + b2) ≥ 4.

**Câu 4:**

Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB = 2R và bán kính OC vuông góc với AB. Tìm điểm M trên nửa đường tròn sao cho 2MA2 = 15MK2, trong đó K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống OC.

**Câu 5:**

Cho hình thang ABCD (AB//CD). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BD và AC. Gọi G là giao điểm của đường thẳng đi qua F vuông góc với AD với đường thẳng đi qua E vuông góc với BC. So sánh GD và GC.

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1:**

a) Từ x2 + y2 = 4  2xy = (x + y)2 - 4 = (x + y + 2) (x + y - 2)

 Vì x + y + 2 ≠ 0 nên (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski, ta có:

 x + y ≤  x + y ≤  (2)

Từ (1), (2) ta được: . Dấu "=" .

Vậy maxA = .

b) Vì x2 + y2 + z2 = 2 nên:



= 

Ta có x2 + y2 ≥ 2xy ,

Tương tự , 

Vậy + +  +  +  + 3

 , đpcm.

**Câu 2:**

a) x2 + 9x + 20 =  (1) .Điều kiện:  (2)

(1)  (3x + 10 -  + 1) + (x2 + 6x + 9) = 0

 (- 1)2 + (x + 3)2 = 0

 (thỏa mãn đk (2).

Vậy phương trình (1) có nghiệm x = -3.

b) 

Ta có: 

Mặt khác: - 2 (x - 1)2 - 1 ≤ - 1  y3 ≤ - 1  y ≤ - 1 (2)

Từ (1) và (2)  y = - 1 nên x = 1. Thay vào hệ đã cho thử lại thì thỏa mãn.

Vậy x = 1 và y = -1 là các số cần tìm.

**Câu 3:**

a) Đặt  và ta có x2 = b3 và y2 = c3

Thay vào gt ta được 

 a2 = b3 + b2c + c3 + bc2 + 

a2 = (b + c)3  hay , đpcm.

b) Giả sử x0 là một nghiệm của phương trình, dễ thấy .

Suy ra  + ax­0 + b + 

Đặt x0 +  

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

  (1)

Ta chứng minh  (2)

Thực vậy: (2) 

 đúng với  nên (1) đúng

Từ (1), (2) suy ra , đpcm.

**Câu 4:**

Đặt AH = x

Ta có 

Trong ∆ vuông AMB ta có MA2 = AH . AB = 2Rx

(H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC)

Mặt khác: MK2 = OH2 = (R - x)2 (vì MKOH là hình chữ nhật).

Theo bài ra ta có: 4Rx = 15(R - x)2.

Do H  AB  O ≤ x ≤ 2R

Phương trình trở thành: 15x2 - 34Rx + 15R2 = 0

 (5x - 3R) (3x - 5R) = 0 .

Cả 2 giá trị này đều thoả mãn

Vậy ta tìm được 2 điểm H và H’  2 điểm M và M’ là giao điểm của nửa đường tròn với các đường vuông góc với AB dựng từ H và H’.

**Câu 5:**

Gọi I là trung điểm của CD.

Nối EF, EI, IF, ta có IE là đường trung bình của ∆BDC  IE // BC

Mà GF ⊥BC  IE⊥ GF (1)

Chứng minh tương tự EG ⊥IF (2)

Từ (1) và (2)  G là trực tâm của ∆EIF

 IG EF (3)

Dễ chứng minh EF // DC (4)

Từ (3) và (4)  IG  DC

Vậy ∆ DGC cân tại G  DG = GC