**ĐỀ SỐ 2**

**Câu 1:** a) Tìm các số hữu tỉ x, y thỏa mãn đẳng thức:

x (

b) Tìm tất cả các số nguyên x > y > z > 0 thoả mãn:

xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2011.

**Câu 2:** a) Giải phương trình: 2(x2 + 2) = 5.

b) Cho a, b, c  [0; 2] và a + b + c = 3. Chứng minh a2 + b2 + c2 < 5.

**Câu 3:** Tìm tất cả các số hữu tỉ x sao cho giá trị của biểu thức x2 + x + 6 là một số chính phương.

**Câu 4:** Cho đường tròn (O) ngoại tiếp  ABC có H là trực tâm. Trên cung nhỏ BC lấy điểm M.

Gọi N, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh:

a) Ba điểm K, N, I thẳng hàng.

b) .

c) NK đi qua trung điểm của HM.

**Câu 5:** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: P = 2x2 - xy - y2 với x, y thoả mãn điều kiện sau:

x2 + 2xy + 3y2 = 4.

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1:**

a) Theo bài ra ta có:



+ Nếu x + y - 2011 = 0 thì y - x + 2010 = 0 

+ Nếu y - x + 2010 = 0 thì x + y - 2011 = 0, ta cũng được kết quả như trên.

+ Nếu x + y - 2011 0 thì  vô lý (vì VP là số hữu tỉ, VT là số vô tỉ)

Vậy x = 2010,5 và y = 0,5 là cặp số duy nhất thoả mãn đề bài.

b) Ta có xy (z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + (z + 1) = 2012

<=> (z + 1)(xy + y + x + 1) = 2012

<=> (z + 1)[x(y + 1)+(y + 1)] = 2012

<=> (x + 1)(y + 1)(z + 1) = 1.2.2.503 = 503.4.1 . Chỉ có 3 bộ sau thoả mãn:

x = 502, y = 1, z = 1 hoặc x = 1005, y = 1, z = 0 hoặc x = 2011, y = 0, z = 0.

**Câu 2:**

a) Điều kiện: x > -1

Đặt a =  ; b = 

Ta có: 2(a2 + b2) = 5ab <=> (2a - b)(2b - a) = 0 <=> b = 2a ; a = 2b

Do đó: 1) 2 =  <=> 4(x + 1) = x2 - x + 1

<=> x2 - 5x - 3 = 0 <=> x1 =  (loại); x2 = 

2)  = 2  vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: x = 

b) Vì a, b, c  [0; 2] nên: (2 - a)(2 - b)(2 - c) > 0

<=> 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc > 0

<=> 2(ab + bc + ca) > 4(a + b + c) - 8 + abc

nên 2(ab + bc + ca) > 4 (vì a + b + c = 3 và abc  0)

Suy ra (a + b + c)2 - (a2 + b2 + c2) > 4

<=> a2 + b2 + c2  (vì (a + b + c)2 = 9)

Dấu “=” xẩy ra khi một trong 3 số a, b, c có một số bằng 2, một số bằng 0 và một số bằng 1.

**Câu 3:**

Giả sử x = (p, q  Z, q > 0) và (p, q) = 1

Ta có (n N) <=> p2 = q(-P - 6q + n2q)

=> q là ước của p2 nhưng (p, q) = 1 => q = 1 lúc đó x = p

=> p2 + p + 6 = n2 (p, n  Z)

<=> (2p + 1)2 + 23 = 4n2 <=> (2n)2 - (2p + 1)2 = 23

<=> (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1) = 23

Do đó 2n - 2p - 1 = 1 và 2n + 2p + 1 = 23 ; 2n - 2p - 1 = 23 và 2n + 2p + 1 = 1

(vì 23  P và 2n + 2p + 1 > 0 và 2n - 2p - 1 > 0) <=> p = 5 (t/m) ; p = - 6 (t/m)

Vậy số hữu tỉ x cần tìm là 5 hoặc – 6

**Câu 4:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Tứ giác MNKB nội tiếp được (vì  = 1800). Tứ giác MNCI cũng nội tiếp được (vì MNC = 900)  => ,  (1)  (vì 2 góc nội tiếp cùng chắn một cung).  Mặt khác  (2)  (vì  do cùng bù với góc A của tam giác ABC)  Từ (1), (2) suy ra =  nên 3 điểm  K, N, I thẳng hàng. |  |

b) Vì  (vì 2 góc nội tiếpcùng chắn cung BM)

=>  hay  (1)

Tương tự có:  hay  (2)

Mà  ( = ) (3)

Từ (1), (2), (3) =>  (đpcm)

c) Gọi giao của AH, MN với đường tròn (O) thứ tự là Q, S => AQMS là hình thang cân (vì AQ // MS => AS = QM). Vẽ HP // AS (P MS)

=> HQMP là hình thang cân, có BN là trục đối xứng (vì Q và H đối xứng qua BC)

=> N là trung điểm của PM mà HP // KN (vì KN // AS do  vì cùng bằng ) => KN đi qua trung điểm của HM (đpcm).

**Câu 5:**

Đưa về bài toán tìm P để hệ phương trình:  có nghiệm.

Hệ trên . Lấy (1) - (2), ta có:

(8 - p)x2 - 2y(2 + p)x - (4 + 3p)y2 = 0 (3)

- Nếu y = 0 => (8 - p)x2 = 0 <=> x = 0 hoặc p = 8 

- Nếu y  0 chia 2 vế pt (3) cho y2 ta có :

(8 - p)t2 - 2(2 + p)t - (4 + 3p) = 0 (4) với t = .

+ Nếu p = 8 thì t = - .

+ Nếu p  8: Phương trình (2) có nghiệm <=>  = (2 + p)2 + (8 - p)(4 + 3p) > 0

<=> p2 - 12p - 18 < 0 <=> 6 - 3. Dấu “=” có xảy ra.

Vậy min P = 6 - 3 , max P = 6 +3 .