**ĐỀ SỐ 1**

**Câu 1:** Giải các phương trình:

a) 

b) 

**Câu 2:**

a) Cho 3 số a, b, c khác 0 thỏa mãn: abc = 1 và

.

Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c luôn tồn tại một số là lập phương của một trong hai số còn lại.

b) Cho x = . Chứng minh x có giá trị là một số nguyên.

**Câu 3:** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: x + y + z ≤ 3.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

A = .

**Câu 4:** Cho đường tròn ( O; R ) và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho OA = R. Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Lấy D thuộc AB; E thuộc AC sao cho chu vi của tam giác ADE bằng 2R.

a) Chứng minh tứ giác ABOC là hình vuông.

b) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O; R).

c) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ∆ADE.

**Câu 5:**  Trên mặt phẳng cho 99 điểm phân biệt sao cho từ 3 điểm bất kì trong số chúng đều tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 50 điểm.

**Hướng dẫn giải chi tiết**

**Câu 1:**

a) Đặt  (1), suy ra 

Khi đó phương trình đã cho trở thành: t2 – 4t – 5 = 0 .

Lần lượt thay các giá trị của t vào (1) thì phương trình đã cho có 4 nghiệm:

x1 = 1; x2 = - 2; 

b) Đk: x ≥ - 2 (1)

Đặt  (2)

Ta có: a2 – b2 = 3; 

Thay vào phương trình đã cho ta được:

(a – b)(1 + ab) = a2 – b2 (a – b)(1 – a)(1 – b) = 0

nên 

Đối chiếu với (1) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = - 1.

**Câu 2:**

a) Đặt  , khi đó do abc = 1 nên xyz = 1 (1).

Từ đề bài suy ra x + y + z = yz + xz + xy (2).

Từ (1) và (2) suy ra: xyz + (x + y + z) – (xy + yz + zx) – 1 = 0

 (x – 1)(y – 1)(z – 1) = 0.

Vậy tồn tại x =1 chẳng hạn, suy ra a = b3, đpcm.

b) Đặt   x = a + b; a3 + b3 = 2; ab = .

Ta có: x3 = (a + b)3 = a3 + b3 + 3ab(a + b)

Suy ra: x3 = 2 – x x3 + x – 2 = 0 

x = 1. Vì x2 + x + 2 = . Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 3:**

Áp dụng các BĐT:

; a + b + c 

(được suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacôpski)

Ta có:



Lại có: A = 

+ 



 (do x + y + z  3). Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1.

Vậy maxA = 

**Câu 4:**



a) Ta có: (tính chất tiếp tuyến) (1)

AB = AC = R = OB = OC (2).

Từ (1) và (2) suy ra ABOC là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: AD + DE + AE = 2R (3).

Suy ra: DE = BD + CE (4).

Vẽ OM ⊥ DE (MDE) (5)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho CF = BD; suy ra ∆BDO = ∆COF (c-g-c)

OD = OF; lại có DE = FE nên ∆ODE = ∆OFE (c-c-c)OM = OC = R

(hai đường cao tương ứng) (6). Từ (5) và (6) suy ra DE là tiếp tuyến của đường tròn (O;R).

c) Đặt: AD = x; AE = y  (x, y > 0)

Ta có: DE (định lí Pitago).

Vì AD + DE + AE = 2R = 2R (6)

Áp dụng BĐT – Côsi cho hai số không âm ta có:

 (7).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Từ (6) và (7) suy ra: 

xy  SADE .

Vậy max SADE =  x = y∆ADE cân tại A.

**Câu 5:**

Xét điểm A và hình tròn (C1) có tâm A, bán kính bằng 1.

|  |
| --- |
|  |

- Nếu tất cả 98 điểm còn lại đều nằm trong (C1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

- Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C1).

Ta có: AB > 1 (1)

Vẽ hình tròn (C2) tâm B, bán kính bằng 1.

+ Giả sử C là một điểm bất kì khác A và B. Khi đó điểm C thuộc một trong hai hình tròn

(C1) và (C2). Thật vậy, giả sử C không thuộc hai hình tròn nói trên.

Suy ra: AC > 1 và BC > 1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra bộ 3 điểm A, B, C không có hai điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn 1 (vô lí vì trái với giả thiết).

Chứng tỏ C∈ (C1) hoặc C∈ (C2). Như vậy 99 điểm đã cho đều thuộc (C1) và (C2).

Mặt khác 99 = 49.2 + 1 nên theo nguyên tắc Dirichle ắt phải có một hình tròn chứa không ít hơn 50 điểm.