ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (vòng 2)
ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2013 - 2014

Câu 1:

1.

Từ ii) suy ra: $(a + b)(b + c)(c + a)(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$.

Kết hợp với i) suy ra: $abc(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} abc = 0 \\ \left(a^2 - ab + b^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right) = a^3b^3c^3 \quad (1) \end{array}\right.$$

Nếu $abc \neq 0$ thì từ các bất đẳng thức $\begin{cases} a^2 - ab + b^2 \geq |ab| \\ b^2 - bc + c^2 \geq |bc| \\ c^2 - ca + a^2 \geq |ca| \end{cases}$

Suy ra: $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq a^2b^2c^2$, kết hợp với (1) suy ra: $a = b = c$.

Do đó: $8a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow abc = 0$ (mẫu thuẫn). Vậy $abc = 0$.

2.

Từ giả thiết suy ra:

$$1 > \frac{2013}{b} + \frac{2014}{a}$$

$$\Rightarrow a + b > \frac{2013}{b}(a + b) + \frac{2014}{a}(a + b)$$

$$= 2013 + \frac{2013a}{b} + \frac{2014}{a} + 2014 \geq 2013 + 2\sqrt{\frac{2013a}{b}.\frac{2014b}{a}} + 2014 = \left(\sqrt{2013} + \sqrt{2014}\right)^2$$

Câu 2:

Nếu $x = 0$ thay vào hệ ta được: $\begin{cases} -2y^3 = 4y \\ 15y^2 = 1 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Nếu $x \neq 0$, đặt $y = tx$, hệ trở thành $\begin{cases} x^3 - 2t^3x^3 = x + 4tx \\ 6x^2 - 19tx^2 + 15t^2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - 2t^3\right) = 1 + 4t \\ x^2\left(15t^2 - 19t + 6\right) = 1 \end{cases}$

Suy ra: $1 - 2t^3 \neq 0; 15t^2 - 19t + 6 \neq 0$ và $\dfrac{1 + 4t}{1 - 2t^3} = \dfrac{1}{15t^2 - 19t + 6} \Leftrightarrow 62t^3 - 61t^2 + 5t + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (2t - 1)\left(31t^2 - 15t - 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\left(\text{Do } t \in Q\right).$$

Suy ra: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 1$

Đáp số: (2; 1), (-2, -1).

Câu 3:

Ký hiệu p_n là số nguyên tố thứ n.

Giả sử tồn tại m mà $S_{m-1} = k^2$; $S_m = l^2$; $k, l \in N^*$.

Vì $S_2 = 5$, $S_3 = 10$, $S_4 = 17 \Rightarrow m > 4$.

Ta có: $p_m = S_m - S_{m-1} = (l - k)(l + k)$.

Vì p_m là số nguyên tố và $k + l > 1$ nên $\begin{cases} l - k = 1 \\ l + k = p_m \end{cases}$

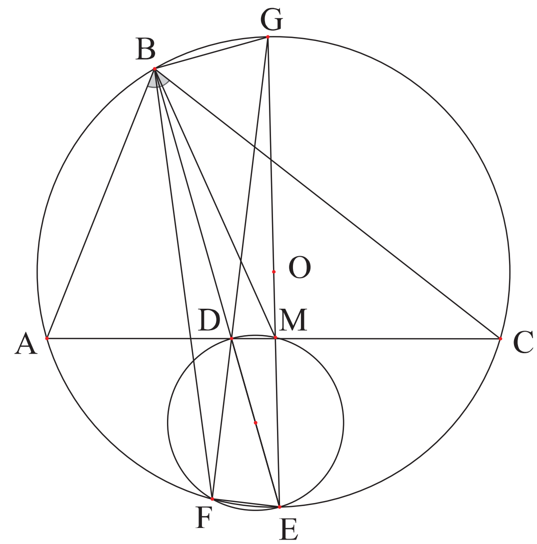
Suy ra: $p_m = 2l - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1 \Rightarrow S_m = \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2$ (1)

Do m > 4 nên

$$S_m \le (1+3+5+7+...+p_m)+2-1-9$$
$$=1^2-0^2+2^2-1^2+3^2-2^2+...+\left[\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_m-1}{2}\right)^2\right]-8=\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2-8<\left(\frac{p_m+1}{2}\right)^2$$

(mâu thuẫn với (1)).

Câu 4:



1.

Gọi M là trung điểm của cạnh AC.

Do E là điểm chính giữa của cung AC nên EM ⊥ AC.

Suy ra: EM đi qua tâm của đường tròn (O).

Dọi G là giao điểm của DF với (O).

Do $\widehat{DFE} = 90^0$. Suy ra: GE là đường kính của (O).

Suy ra: G, M, E thẳng hàng.

Suy ra: $\widehat{GBE} = 90^0$, mà $\widehat{GMD} = 90^0$. Suy ra tứ giác BDMG là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính GD.

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{FBE}$.

Suy ra: BF và BM đối xứng với nhau qua BD.

2.

Từ giả thiết suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AB =R, BC = $R\sqrt{3}$.

Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \sqrt{3}DA$.

Kết hợp với DA = DC = 2R.

Suy ra: $DA = (\sqrt{3}-1)\sqrt{R} \Rightarrow DM = R - DA = (2-\sqrt{3})R \Rightarrow DE = \sqrt{ME^2 + MD^2} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}R}$

Vậy bán kính đường tròn (O_1) bằng $\sqrt{2-\sqrt{3}R}$.

Câu 5:

Giả sử a; b; c là các số nguyên tố và là độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Đặt: P = a + b + c, ký hiệu S là diện tích của tam giác ABC.

Ta có: $16S^2 = P(P - 2a)(P - 2b)(P - 2c)$ (1)

Giả sử S là số tự nhiên. Từ (1) suy ra: P = a + b + c chẵn.

Trường hợp 1: Nếu a; b; c cùng chẵn thì a = b = c, suy ra: S = $\sqrt{3}$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu a; b; c có một số chẵn và hai số lẻ, giả sử a chẵn thì a = 2.

Nếu $b \neq c \Rightarrow |b - c| \geq 2 = a$, vô lý.

Nếu b = c thì $S^2 = b^2 - 1 \Rightarrow (b - S)(b + S) = 1$ (2)

Đẳng thức (2) không xảy ra vì b; S là các số tự nhiện.

Vậy diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Câu 6:

Ta chứng minh không tồn tại n thỏa mãn đề bài.

Giả sử ngược lại, tồn tại n, ta luôn có:

Tổng các số dư trong phép chia n cho $a_1, a_2, ..., a_{11}$ không thể vượt quá 407 - 11 = 396.

Tổng các số dư trong phép chia n cho các số $4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không vượt quá 4.407 - 11 = 1617.

Suy ra: Tổng các số dư trong phép chia n cho các số $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không thể vượt quá 396 + 1617 = 2013.

. Kết hợp với giả thiết tổng các số dư bằng 2012.
Suy ra khi chia n cho 22 số trên thì có 21 phép chia có số dư lớn nhất và một phép chia có số dư nhỏ hơn số chia 2 đơn vị.
Suy ra: Tồn tại k sao cho a_k, $4a_k$ thỏa mãn điều kiện trên.
Khi đó một trong hai số n + 1; n + 2 chia hết cho a_k, số còn lại chia hết cho $4a_k$.
Suy ra: $(n + 1; n + 2) \geq a_k \geq 2$, điều này không đúng.
Vậy không tồn tại n thỏa mãn đề ra.

----- HẾT -----