Đáp án

1-B	2-A	3-C	4-B	5-D	6-C	7-A	8-B	9-C	10-B
11-C	12-B	13-A	14-C	15-B	16-D	17-C	18-A	19-B	20-C
21-D	22-A	23-B	24-C	25-D	26-A	27-B	28-A	29-A	30-B
31-A	32-C	33-D	34-B	35-C	36-A	37-D	38-B	39-C	40-B
41-D	42-B	43-C	44-D	45-D	46-B	47-C	48-A	49-D	50-B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án B

Xếp ngẫu nhiên 7 tấm bìa có $7! = 5040$ (cách xếp) $\Rightarrow n(\Omega) = 5040$

Đặt A là biến cố "xếp được chữ HIỀN TÀI LÀ NGUYÊN KHÍ QUỐC GIA". Ta có $n(A = 1)$

Vậy $P(A) = \dfrac{1}{5040}$

Câu 2: Đáp án A

Phương trình tương đương với: $-2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \dfrac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + 8\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - 3 = 0$, nên nếu đặt $t = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$ phương trình trở thành

$-4t^2 + 8t - 3 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 8t + 3 = 0$

Câu 3: Đáp án C

Với $y = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$ ta có $y' = \dfrac{2x}{\left(x^2 + 1\right)^2}$

$y' > 0$ khi $x > 0$ và $y' < 0$ khi $x < 0$. Nên hàm số không nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Câu 4: Đáp án B

Ta có $\dfrac{\log_3 5 \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3 a}{\log_3 6} - \log_6 b = 2 \Leftrightarrow \log_6 a - \log_6 b = 2$

$\Leftrightarrow \log_6 \dfrac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 36 \Leftrightarrow a = 36b$

Câu 5: Đáp án

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là 68.5(cm), nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có: $2\pi R = 68.5 \Rightarrow R = \dfrac{68.5}{2\pi}$

Diện tích mặt cầu $S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{68.5}{2\pi}\right)^2 \approx 1493.59\left(cm^2\right)$

Vì mỗi miếng da có diện tích $49.83\left(cm^2\right)$ nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\frac{1493.59}{49.83}\approx 29.97$. Vậy phải cần ≈ 30 (miếng da).

Câu 6: Đáp án C

Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases}\frac{a}{1}=-1\\ -a+b>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1<0\\ -b<-1=a\end{cases}\Rightarrow b<a<0$

Câu 7: Đáp án A

Các mệnh đề đúng là:

(I). Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$

(IV). Hai hàm số đều đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 8: Đáp án B

Ta có $S_1=6.40^2=9600$

Bán kính đường tròn nội tiếp hai mặt đối diện của hình lập phương là: $r=20cm$; hình trụ có đường sinh $h=40cm$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_2=2.\pi.20^2+2\pi.20.40=2400\pi$

Vậy $S=S_1+S_2=9600+2400\pi=2400\left(4+\pi\right)$

Câu 9: Đáp án C

Ta có $z^2+2z+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-1-3i\\ z=-1-3i\end{array}\right.$. Suy ra $z_0=-1+3i$

$w=i^{2017}x_0=i\left(-1+3i\right)=-3-i$

Suy ra điểm $M\left(-3;-1\right)$ biểu diễn số phức w

Câu 10: Đáp án B

$\left(2\cos 2x+5\right)\left(\sin^4-\cos^4 x\right)+3=0\Leftrightarrow\left(2\cos 2x+5\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+3=0$

$\Leftrightarrow-\left(2\cos 2x+5\right)\cos 2x+3=0\Leftrightarrow-2\cos^2\left(2x\right)-5\cos 2x+3=0\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}$

$\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$

Do đó $S=\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}+\frac{11\pi}{6}=4\pi$

Câu 11: Đáp án C

Ta có $A\left(2;2;2\right)$ và $PA=PB=PC=\frac{3\sqrt{21}}{4}$

Câu 12: Đáp án B

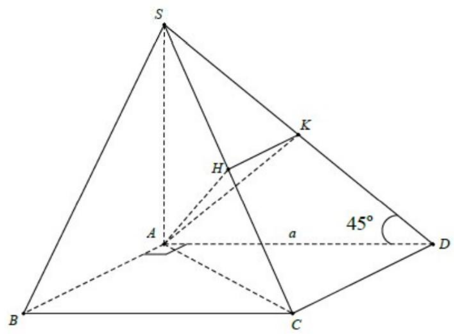
Ta có $y'=3x^2-6x+2a$. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A\left(2;-2\right)$ nên ta có:

$y'\left(2\right)=0\Leftrightarrow 2a=0\Leftrightarrow a=0$

Do đồ thị qua $A(2;-2) \Rightarrow -2 = 8 - 12 + b \Leftrightarrow b = 2$

Vậy $a + b = 2$

Câu 13: Đáp án A



Do (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy nên $SA \perp (ABCD)$

Dễ thấy góc giữa hai mặt phẳng $(SCD) \& (ABCD)$ là $SDA = 45^0$

Ta có tam giác SAD là tam giác vuông cân đỉnh A. Vậy $h = SA = a$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích có $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{SH}{SC}.\dfrac{SK}{SD} = \dfrac{1}{4}$

Câu 14: Đáp án C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{4x-4}{x^2-2x+4}\ln\left(x^2-2x+4\right)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (4x-4)\ln\left(x^2-2x+4\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>0 \\ \ln\left(x^2-2x+4\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1<0 \\ \ln\left(x^2-2x+4\right)<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x+4>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x^2-2x+4<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x^2-2x+3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x^2-2x+3<0 \end{cases} (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x>1$$

Câu 15: Đáp án B

Tập xác đinh: $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}.a = a$$

$f(0) = \dfrac{1}{2}$ hàm số liên tục tại $x_0 = 0$ khi và chỉ chi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

Câu 16: Đáp án

Để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Qua bảng biến thiên ta thấy, đường thẳng $y=m$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt khi $m>\dfrac{27}{4}$

Câu 17: Đáp án C

Vì $N=\Delta\cap d$ nên $N\in d$, do đó $N\left(-2+2t;1+t;1-t\right)$

Mà $A\left(1;3;2\right)$ là trung điểm MN nên $\begin{cases} x_M=2x_A-x_N \\ y_M=2y_A-y_N \\ z_M=2z_A-z_N \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_M=4-2t \\ y_M=5-t \\ z_M=3+t \end{cases}$

Vì $M=\Delta\cap\left(P\right)$ nên $M\in\left(P\right)$, do đó $2\left(4-2t\right)-\left(5-t\right)+\left(3+t\right)-10=0\Leftrightarrow t=-2$

Suy ra $M\left(8;7;1\right)$ và $N\left(-6;-1;3\right)$

Vậy $M=2\sqrt{66}=4\sqrt{16,5}$

Câu 18: Đáp án A

Ta có $C_n^2-C_n^1=44\Leftrightarrow\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}-n=44\Leftrightarrow n=11$ hoặc $n=-8$ (loại)

Với $n=11$, số hạng thứ $k+1$ trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{11}$ là

$C_{11}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)^k=C_{11}^k x^{\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k}$

Theo giả thiết, ta có $\dfrac{32}{3}-\dfrac{11k}{2}=0$ hay $k=3$

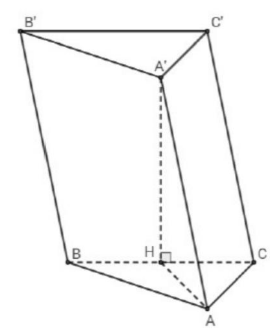
Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là $C_{11}^3=165$

Câu 19: Đáp án B

Ta có $F'\left(x\right)=\left(-x^2+\left(2-a\right)x+a-b\right)e^{-x}=f\left(x\right)$ nên $2-a=3$ và $a-b=6$

Vậy $a=-1$ và $b=-7$

Câu 20: Đáp án C



Gọi H là trung điểm BC

Theo giả thiết, A’H là đường cao hình lăng trụ và $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=S_{\Delta ABC}.A'H=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Câu 21: Đáp án D

$\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3-x^2}{2}=1$ và $\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1$. Do đó hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x^2}{2\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1+x}{-2}=-1$ và

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x}=-1$. Do đó hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$

Câu 22: Đáp án A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$-\frac{9}{4}x-\frac{1}{24}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\Leftrightarrow\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Do đó $y_0=y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{12}$

Câu 23: Đáp án B

Ta có $\begin{cases}S_7=77\\S_{12}=192\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7u_1+\dfrac{7.6.d}{2}=77\\12u_1+\dfrac{12.11.d}{2}=192\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7u_1+21d=77\\12u_1+66d=192\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=5\\d=2\end{cases}$

Khi đó $u_n=u_1+(n-1)d=5+2(n-1)=3+2n$

Câu 24: Đáp án C

Gọi tâm mặt cầu là $I(x;y;0)$

$$\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2+1^2}\\\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+3^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-2)^2+4^2=(y+3)^2+1^2\\x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}10y=10\\2x=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}\Rightarrow l=2R=2\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+4^2}=2\sqrt{26}$$

Câu 25: Đáp án D

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x^2-4x\ge 0\\x^2-3x\ge 0\\\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\vee x\ge 4\\x\le 0\vee x\ge 3\\x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x<0\ \vee\ x\ge 4$

Nên tập xác định: $D=(-\infty;0)\cup[4;+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}+x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-1}=-2\Rightarrow y=-2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}}-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{4}{x}} - x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{-1} = -2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

Câu 26: Đáp án A

Điều kiện để (C') là đường tròn $(m-2)^2 + 9 - 12 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -4m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$. Khi đó

Đường tròn (C') có tâm là $I(3;2;-m)$, bán kính $R' = \sqrt{-4m+1}$

Đường tròn (C) có tâm là $I(-m;2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

Phép tịnh tiến theo vecto $\vec{v}$ biến (C) thành (C') khi và chỉ khi $\begin{cases} R' = R \\ \overrightarrow{II'} = \vec{v} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-4m+1} = \sqrt{5} \\ \vec{v} = \overrightarrow{II'} = (3+m;-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ \vec{v} = (2;1) \end{cases}$$

Câu 27: Đáp án

Đổi $60cm = 6dm$.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $l = 6dm$.

Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành bằng $2\pi.r = \frac{2\pi.6}{3} = 4\pi$ dm

Suy ra bán kính đáy của hình nón tạo thành bằng $r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ dm

Đường cao của khối nón tạo thành là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$

Thể tích của mỗi cái phễu là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.2^2.4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3} dm^3 = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít

Câu 28: Đáp án A

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9;\ f''(x) = 6x - 12$

$2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(3x^2 - 12x + 9) - x(6x - 12) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Khi $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0;\ f(1) = 5$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y = 5$

Câu 29: Đáp án A

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là a, 2a, c.

Ta có diện tích cách mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$

Thể tích bể $V = a.2a.c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$

Vậy $S = 2a^2 + 6a.\frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3.\sqrt[3]{2a^2.\frac{432}{a}.\frac{432}{a}} = 216$

Vậy $S_{min} = 216\,cm^2 = 2,16\,m^2$

Chi phí thấp nhất là $2,16 \times 500000 = 108$ triệu đồng

Câu 30: Đáp án B

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \;(t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

$H \in d \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t)$

Độ dài $AH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$

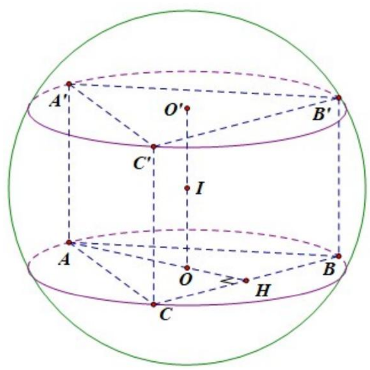
Độ dài AH nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $t = 1 \Rightarrow H(2;3;3)$

Vậy $a = 2,\ b = 3,\ c = 3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 62$

Câu 31: Đáp án A

Ta có $x\log_2 5 + 2x^3 \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 5^x + \log_2 2^{2x^3} \leq 0 \Leftrightarrow \log_2\left(5x.2^{2x^3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 5x.2^{2x^3} \leq 1$

Câu 32: Đáp án C



Gọi mặt cầu đi qua 6 đỉnh của lăng trụ là (S) tâm I , bán kính R

Do $IA = IB = IC = IA' = IB' = IC' = R \Rightarrow$ hình chiếu của I trên các mặt $(ABC), (A'B'C')$ lần lượt là tâm O của ΔABC và tâm O' của $\Delta A'B'C'$

Mà ABC.A'B'C' là lăng trụ đều $\Rightarrow$ I là trung điểm của OO' $\Rightarrow OI = \dfrac{OO'}{2} = \dfrac{AA'}{2} = \dfrac{a}{2}$

Do O là tâm tam giác đều ABC cạnh a $\Rightarrow AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông OAI có $R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Diện tích của mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\dfrac{21a^2}{36} = \dfrac{7\pi a^2}{3}$

Câu 33: Đáp án D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2);\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0\Rightarrow y_1=1-m\\x_2=2\Rightarrow y_1=-m-7\end{array}\right.$

Lập bbt ta thấy hàm số có hai giá trị cực trị là $y_1,\ y_2$

Để hai giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2<0\Leftrightarrow(1-m)(-m-7)<0\Leftrightarrow -7<m<1$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$

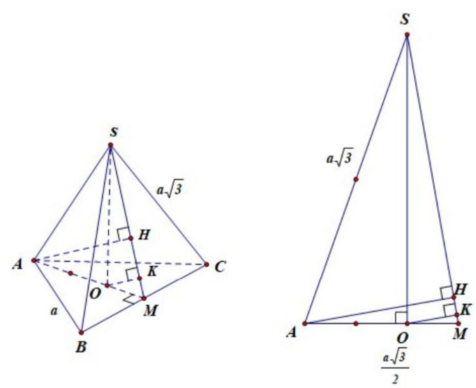
Câu 34: Đáp án B

Có $I=\int_{-1}^{1}f(|2x-1|)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)dx$

$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{\frac{1}{2}}f(1-2x)d(1-2x)\Big|_{t=1-2x}+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(2x-1)d(2x-1)\Big|_{t=2x-1}$

$=-\frac{1}{2}\int_{3}^{0}f(t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(t)dt=-\frac{1}{2}\int_{3}^{0}f(x)dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}.6+\frac{1}{2}.2=4$

Câu 35: Đáp án C



Do tam giác ABC đều tâm O suy ra $AO\perp BC$ tại M là trung điểm của BC

Ta có $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ MO=\frac{1}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{6},\ OA=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Từ giả thiết hình chóp đều suy ra $SO\perp(ABC),\ SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{3a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$

Dựng $OK\perp SM,\ AH\perp SM\Rightarrow AH//OK;\ \frac{OK}{AH}=\frac{OM}{AM}=\frac{1}{3}$

Có $\begin{cases}BC\perp SO\\BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp OK$

Có $\begin{cases}OK\perp SM\\OK\perp BC\end{cases}\Rightarrow OK\perp(SBC),\ AH\perp(SBC)(\text{do } AH//OK)$

Từ đó có $d_1=d(A,(SBC))=AH=3OK;\ d_2=d(O,(SBC))=OK$

Trong tam giác vuông OSM có đường cao OK nên

$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{SO^2}=\frac{36}{3a^2}+\frac{9}{24a^2}=\frac{99}{8a^2}\Rightarrow OK=\frac{2a\sqrt{2}}{33}$$

Vậy $d=d_1+d_2=4OK=\dfrac{8a\sqrt{2}}{33}$

Câu 36: Đáp án A

Đặt $\log_9 x=t$

Theo đề ra ta có $\begin{cases}\log_9 x=\log_6 y=t\\ \log_9 x=\log_4(x+y)=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9^t & (1)\\ y'=6^t & (2)\\ x+y=4^t & (3)\\ \dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t & (4)\end{cases}$

Từ (1), (2) và (3) ta có $9^t+6^t=4^t\Leftrightarrow\left(3^t\right)^2+(3.2)^t-4^t=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-1=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=-\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(TM)\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(L)\end{array}\right.$$

Thế vào (4) ta được $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}\Rightarrow a=1;\ b=5$

Câu 37: Đáp án D

Hoành độ giao điểm của hai đường cong là nghiệm của phương trình;

$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow -x^3+12x+x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-3\\ x=0\end{array}\right.$$

Ta có $S=\displaystyle\int_{-3}^{0}\left|-x^3+12x+x^2\right|dx+\int_0^4\left|-x^3+12x+x^2\right|dx$

$$=\int_{-3}^{0}\left(x^3-12x-x^2\right)dx+\int_0^4\left(-x^3+12x+x^2\right)dx=\frac{99}{4}+\frac{160}{3}=\frac{937}{12}$$

Câu 38: Đáp án B

Đặt $\sin x=t,\ x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t^2-mt-4$

Ta có $f'(t)=3t^2+6t-m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$ cần: $f'(t)\ge 0,\ \forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow 3t^2+6t-m\ge 0\ \ \forall t\in[0;1]\Leftrightarrow 3t^2+6t\ge m\ \ \forall t\in[0;1]$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t;\ g'(t) = 6t + 6;\ g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(t)$		-	0	+					
$g(t)$	$+\infty$		-3		0		9		$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \le 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Câu 39: Đáp án C

Tập xác định $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\setminus\{2\}$

$$y' = \frac{\frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-1}(x-2)^2};\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		-1	$\frac{1}{2}$	1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		+					
$f(x)$	-1		0		0		$-\sqrt{5}$

Vậy $M.m = 0$

Câu 40: Đáp án B

Đặt $AB = x$

Khối cầu $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi lA^3 = \frac{4}{3}\pi\left(x\tan 30^0\right)$

Khối nón $V_2 = \frac{1}{3}\pi AB^2 SA = \frac{1}{3}\pi x^2.\left(x\tan 60^0\right)$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$

Câu 41: Đáp án D

Ta có $\int_1^k (2x-1)dx = \frac{1}{2}\int_1^k (2x-1)d(2x-1) = \left.\frac{(2x-1)^2}{4}\right|_1^k = \frac{(2k-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$

Mà $4\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=2$

Khi đó $\int\limits_1^k(2x-1)dx=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{(2k-1)^2-1}{4}=2\Leftrightarrow(2k-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\k=-1\end{array}\right.$

Câu 42: Đáp án B

Áp dụng công thức giải nhanh cực trị, ta có:

$$\begin{cases}ab<0\\R=\dfrac{b^3-8a}{8|a|b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2m<0\\1=\dfrac{-8m^3-8}{8.(-2m)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\-8m^3+16m-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy có 2 giá trị thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 43: Đáp án C

Dễ thấy $S_1=a^2;\ S_2=\dfrac{a^2}{2};\ S_3=\dfrac{a^2}{4};...;S_{100}=\dfrac{a^2}{2^{99}}$

Như vậy $S_1,S_2,S_3,...,S_{100}$ là cấp số nhân với công bội $q=\dfrac{1}{2}$

$$S=S_1+S_2+...+S_{100}=a^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{99}}\right)=\frac{a^2\left(2^{100}-1\right)}{2^{99}}$$

Câu 44: Đáp án D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

ĐK tham số m: $m<0$

Ta có $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m\Leftrightarrow\log_2\left(3^x+1\right)<m$

Xét hàm số $f(x)=\log_2\left(3^x+1\right),\ \forall x\in(-\infty;0)$ có $f'=\dfrac{3^x.\ln 3}{\left(3^x+1\right)\ln 2}>0,\ \forall x\in(-\infty;0)$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	$-\infty$		0
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m\geq 1$

Câu 45: Đáp án D

Gọi $A(a;0;0);\ B(0;b;0);\ C(0;0;c)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\ (a.b.c\neq 0)$

Vì (P) qua M nên $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1\quad(1)$

Ta có $\overrightarrow{MA}=(a-3;-2;-1);\ \overrightarrow{MB}=(-3;b-2;-1);\ \overrightarrow{BC}=(0;-b;c);\ \overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Vì M là trực tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=c \\ 3a=c \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=\dfrac{14}{3}; b=\dfrac{14}{2}; c=14$. Khi đó phương trình $(P): 3x+2y+z-14=0$

Vậy mặt phẳng song song với (P) là: $3x+2y+z+14=0$

Câu 46: Đáp án B

Ta có phương trình đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-3)^2=9$

Do điểm A nằm trên đường tròn (C) nên ta có $(a-4)^2+(b-3)^2=9$

Mặt khác $F=4a+3b-1=4(a-4)+3(b-3)+24$

$F-24=4(a-4)+3(b-3)$

Ta có $\left[4(a-4)+3(b-3)\right]^2 \le (4^2+3^2)\left[(a-4)^2+(b-3)^2\right]=25.9=255$

$\Rightarrow -15 \le 4(a-4)+3(b-3) \le 15 \Leftrightarrow -15 \le F-24 \le 15 \Leftrightarrow 9 \le F \le 39$

Khi đó $M=39,\ m=9$

Vậy $M+m=48$

Cách 2:

Ta có $F=4a+3b-1 \Rightarrow a=\dfrac{F+1-3b}{4}$

$(a-4)^2+(b-3)^2=9 \Rightarrow \left(\dfrac{F+1-3b}{4}-4\right)^2+b^2-6b+9=9$

$\Leftrightarrow 25b^2-2(3F+3)b+F^2+225=0$

$\Delta'=(3F+3)^2-25F^2-5625$

$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -16F^2+18F-5625 \ge 0 \Leftrightarrow 9 \le F \le 39$

Câu 47: Đáp án C

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x \ne \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$

$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x \quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình (1) có dạng $f\left(\left(2x-t\right)^2\right)=f\left(2x\right)\Leftrightarrow\left(2x-1\right)^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}\\x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{l}\dfrac{9-\sqrt{5}}{4}(l)\\\dfrac{9+\sqrt{5}}{4}(tm)\end{array}\right.\Rightarrow a=9;b=5\Rightarrow a+b=9+5=14$

Cách 2: Bấm Casio

Câu 48: Đáp án A

Ta có $I\in d\Rightarrow I\left(5+t;2-4t;-1-4t\right)$

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d\left(I;\left(P\right)\right)=R=\sqrt{19}\Leftrightarrow\left|19+19t\right|=19\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.$

Mặt khác $\left(S\right)$ có tâm $I\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{b}{2};-\dfrac{c}{2}\right)$; bán kính $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d}=\sqrt{19}$

Xét khi $t=0\Rightarrow I\left(5;-2;-1\right)\Rightarrow\left\{a;b;c;d\right\}=\left\{-10;4;2;47\right\}$

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d\ne19$ nên ta loại trường hợp này

Xét khi $t=2\Rightarrow\left\{a;b;c;d\right\}=\left\{-6;-12;-14;75\right\}$

Do $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}-d=19$ nên thỏa

Câu 49: Đáp án D

Xét $g\left(n\right)=\dfrac{f\left(2n-1\right)}{f\left(2n\right)}\Leftarrow g\left(n\right)=\dfrac{\left(4n^2-2n+1\right)^2+1}{\left(4n^2+2n+1\right)^2+1}$

Đặt $\left.\begin{array}{l}a=4n^2+1\\b=2n\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a\pm2b=\left(2n\pm1\right)^2\\a=b^2+1\end{array}\right.$

$$\Rightarrow g\left(n\right)=\frac{\left(a-b\right)^2+1}{\left(a+b\right)^2+1}=\frac{a^2-2ab+b^2+1}{a^2+2ab+b^2+1}=\frac{a^2-2ab+a}{a^2+2ab+a}=\frac{a-2b+1}{a+2b+1}=\frac{\left(2n-1\right)^2+1}{\left(2n+1\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow u_n=\prod_{i=1}^{n}g\left(i\right)=\frac{2}{10}.\frac{10}{26}...\frac{\left(2n-1\right)^2+1}{\left(2n+1\right)^2+1}=\frac{2}{\left(2n+1\right)^2+1}$$

$$\Rightarrow\lim n\sqrt{u_n}=\lim\sqrt{\frac{2n^2}{4n^2+4n+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Câu 50: Đáp án B

Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a;\ x=a\Rightarrow t=0$

Lúc đó $I=\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}=\int_a^0 \frac{-dt}{1+f(a-t)}=\int_0^a \frac{dx}{1+f(a-x)}=\int_0^a \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}+\int_0^a \frac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int_0^a 1dx=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a \Rightarrow b=1;\ c=2 \Rightarrow b+c=3$

Cách 2: Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được

$I=\frac{1}{2}a \Rightarrow b=1;\ c=2 \Rightarrow b+c=3$