Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 49: Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\dfrac{11}{630}$. **B.** $\dfrac{1}{126}$. **C.** $\dfrac{1}{105}$. **D.** $\dfrac{1}{42}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

----------**HẾT**----------

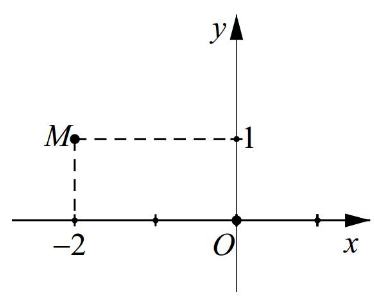
BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	A	A	A	D	C	D	B	A	A	B	B	D	D	B	A	C	D	B	A	C	B	D

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	A	C	A	D	B	D	A	B	A	B	C	D	C	C	A	B	D	A	C	A	B	B	A	A

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z=-2+i$. **B.** $z=1-2i$.

C. $z=2+i$. **D.** $z=1+2i$.

Lời giải

Chọn A.

Điểm $M(-2;1)$ biểu diễn số phức $z=-2+i$.

Câu 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B.

Chia cả tử và mẫu cho x, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Câu 3: Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là:

A. A_{10}^{8}. **B.** A_{10}^{2}. **C.** C_{10}^{2}. **D.** 10^{2}.

Lời giải

Chọn C.

Số tập con gồm 2 phần tử của M là số cách chọn 2 phần tử bất kì trong 10 phần tử của M. Do đó số tập con gồm 2 phần tử của M là C_{10}^{2}.

Câu 4: Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là:

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **C.** $V=Bh$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải

Chọn A.

Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là: $V=\dfrac{1}{3}Bh$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức.

A. $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **B.** $V=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A.

Theo công thức tính thể tích vật tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục hoành ta có

$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=5$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D.

Qua bảng biến thiên ta có hàm số đại cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 8: Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\log(3a)=3\log a$. **B.** $\log a^3=\dfrac{1}{3}\log a$. **C.** $\log a^3=3\log a$. **D.** $\log(3a)=\dfrac{1}{3}\log a$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\log(3a)=\log 3+\log a$ suy ra loại A, D.

$\log a^3=3\log a$ (do $a>0$) nên chọn C.

Câu 9: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C. **B.** $\dfrac{x^3}{3}+x+C$. **C.** $6x+C$. **D.** x^3+x+C.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int(3x^2+1)\mathrm{d}x=3.\dfrac{x^3}{3}+x+C=x^3+x+C$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$. **B.** $N(0;-1;1)$. **C.** $P(0;-1;0)$. **D.** $Q(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz).

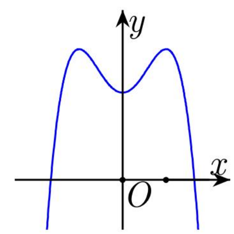
Mặt phẳng $(Oyz): x=0$ có VTPT $\vec{n}=(1;0;0)$.

Đường thẳng AH qua $A(3;-1;1)$ và vuông góc với (Oyz) nên nhận $\vec{n}=(1;0;0)$ làm VTCP.

$$\Rightarrow AH:\begin{cases}x=3+t\\ y=-1\\ z=1\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})\Rightarrow H(3+t;-1;1).$$

Mà $H\in(Oyz)\Rightarrow 3+t=0\Rightarrow H(0;-1;1)$.

Câu 11: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?



A. $y=-x^4+2x^2+2$.

B. $y=x^4-2x^2+2$.

C. $y=x^3-3x^2+2$.

D. $y=-x^3+3x^2+2$.

Lời giải

Chọn A.

Đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c$.

Nhìn dạng đồ thị suy ra: $a<0$.

Đồ thị có ba điểm cực trị nên $a.b<0$ suy ra: $b>0$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vec tơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;1;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-1;2;0)$.

Lời giải

Chọn A.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình: $2^{2x}<2^{x+6}$ là:

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $2^{2x}<2^{x+6}\Leftrightarrow 2x<x+6\Leftrightarrow x<6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(-\infty;6)$.

Câu 14: Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng:

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $3a$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $S_{xq} = \pi rl \Leftrightarrow 3\pi a^2 = \pi al \Leftrightarrow l = \dfrac{3\pi a^2}{\pi a} = 3a$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón đã cho là $l = 3a$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=-1$. **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải

Chọn D.

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn, ta có phương trình của mặt phẳng (MNP) là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Câu 16: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng ?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có một đường tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

A. 0 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f\left(x\right)-2=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=2$.

Do $2\in\left(-2;4\right)$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 18: Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$ bằng

A. 50. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 122.

Lời giải

Chọn A.

Hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^2+5$ xác định và liên tục trên $\left[-2;3\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3-8x$.

Do đó: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Mà: $f\left(0\right)=5$, $f\left(\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2}\right)=1$, $f\left(-2\right)=5$, $f\left(3\right)=50$.

Suy ra: $\max\limits_{[-2;3]}f\left(x\right)=50$.

Câu 19: Tích phân $\int\limits_0^2\frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$. **B.** $\log\frac{5}{3}$. **C.** $\ln\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int\limits_0^2\frac{dx}{x+3}=\ln\left|x+3\right|\Big|_0^2=\ln\left|2+3\right|-\ln\left|0+3\right|=\ln\frac{5}{3}$.

Câu 20: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

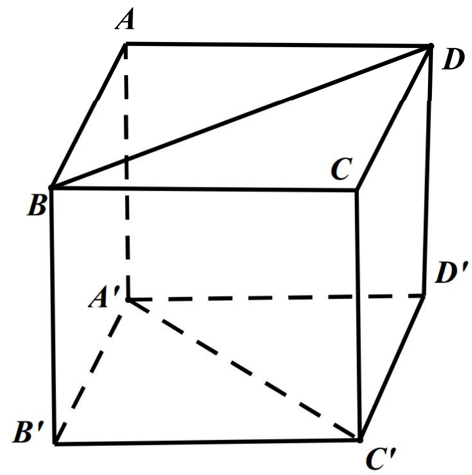
Lời giải

Chọn D.

Ta có: $4z^2-4z+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\\z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{array}\right.$.

Khi đó: $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$. **B.** a . **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $BD \,//\, \left(A'B'C'D'\right)$

$\Rightarrow d\left(BD, A'C'\right) = d\left(BD, \left(A'B'C'D'\right)\right) = d\left(B, \left(A'B'C'D'\right)\right) = BB' = a$.

Câu 22: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lại suất $0,4\%$ /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi ?

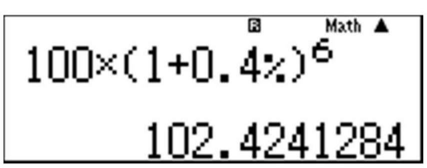
A. $102.424.000$ đồng. **B.** $102.423.000$ đồng. **C.** $102.016.000$ đồng. **D.** $102.017.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức lãi kép ta có sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền

(cả vốn ban đầu và lãi) là $P_6 = P_0\left(1+r\right)^6 = 100\left(1+0,4\%\right)^6 = 102.4241284$ đồng.



Câu 23: Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng

A. $\dfrac{5}{22}$. **B.** $\dfrac{6}{11}$. **C.** $\dfrac{5}{11}$. **D.** $\dfrac{8}{11}$.

Lời giải

Chọn C.

Số cách chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ 11 quả cầu là $C_{11}^2 = 55$.

Số cách chọn ra 2 quả cầu cùng màu là $C_5^2 + C_6^2 = 25$.

Xác suất để chọn ra 2 quả cầu cùng màu bằng $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x - y - z - 6 = 0$. **B.** $3x - y - z + 6 = 0$.

C. $x + 3y + z - 5 = 0$. **D.** $x + 3y + z - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$.

Mặt phẳng cần tìm vuông góc với AB nên nhận $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do đó phương trình của mặt phẳng cần tìm là:

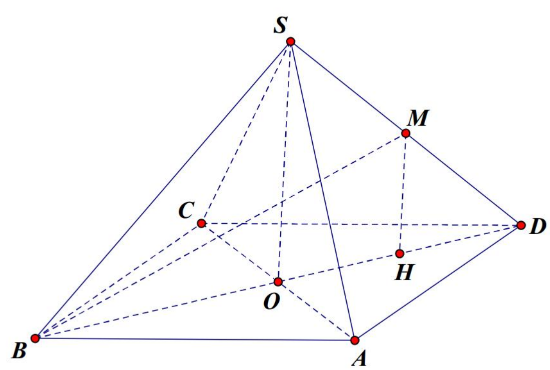
$3(x+1) - (y-2) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z + 6 = 0$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$ và $O = AC \cap BD$.

Ta có MH song song với SO và $MH=\frac{1}{2}SO$.

BM có hình chiếu vuông góc trên $(ABCD)$ là BH

Do đó góc giữa BM và $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $BH=\frac{3}{4}BD=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác MBH vuông tại H nên có: $\tan\widehat{MBH}=\frac{MH}{BH}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{3}$.

Câu 26: Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^2=55$, số hạng không chứa x trong khai triển của thức $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560. **B.** 3360. **C.** 80640. **D.** 13440.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện $n\ge 2$ và $n\in\mathbb{Z}$

Ta có $C_n^1+C_n^2=55\Leftrightarrow\frac{n!}{(n-1)!}+\frac{n!}{(n-2)!2!}=55\Leftrightarrow n^2+n-110=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10\\n=-11(L)\end{array}\right.$

Với $n=10$ ta có khai triển $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}$

Số hạng tổng quát của khai triển $C_{10}^k x^{3(10-k)}.\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=C_{10}^k 2^k x^{30-5k}$, với $0\le k\le 10$.

Số hạng không chứa x ứng với k thỏa $30-5k=0\Leftrightarrow k=6$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_{10}^6 2^6=13440$.

Câu 27: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\frac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$. **B.** $\frac{80}{9}$. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A.

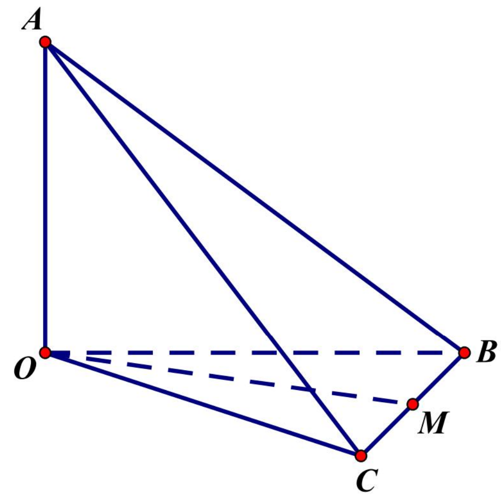
Điều kiện: $x>0$.

Phương trình tương đương: $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\log_3 x.\log_3 x.\log_3 x.\log_3 x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow(\log_3 x)^4=16$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2\\ \log_3 x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 9\\ x = \dfrac{1}{9}\end{array}\right.$.

Vậy tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình là: $9+\dfrac{1}{9}=\dfrac{82}{9}$.

Câu 28: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

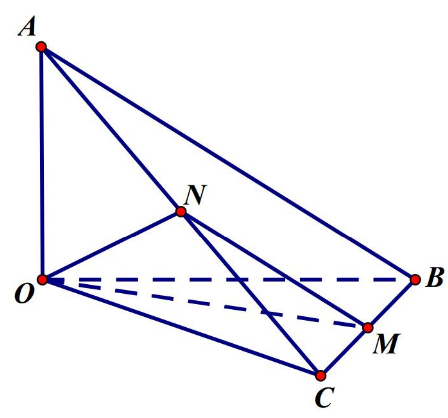


A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1:



Gọi N là trung điểm của CD, ta có $MN // AB \Rightarrow (OM;AB)=(OM;MN)=\widehat{ONM}$.

Do $\Delta OAB=\Delta OCB=\Delta OAC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau nên
$OM=ON=MN=\dfrac{AB}{2} \Rightarrow (OM;AB)=\widehat{ONM}=60°$.

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{OA}^2 = a^2$, $\overrightarrow{OA}^2 = a^2$, $\overrightarrow{OA}^2 = a^2$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 0$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = a\sqrt{2}$,

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do O là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(OM;AB) = \left|\cos\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{AB}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (OM;AB) = 60^\circ.$$

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$; $d_2: \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.
B. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

C. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{3}$.
D. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1:

Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng d cần tìm với d_1 và d_2, khi đó $M(3-t;3-2t;-2+t)$, $N(5-3s;-1+2s;2+s) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2-3s+t;-4+2s+2t;4+s-t)$.

Đường thẳng d vuông góc với (P) suy ra $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P} = (1;2;3)$. Do đó $\dfrac{2-3s+t}{1} = \dfrac{-4+2s+2t}{2} = \dfrac{4+s-t}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ s=1 \end{cases} \Rightarrow M(1;-1;0)$.

Vậy đường thẳng cần tìm qua $\Rightarrow M(1;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;3)$ là $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Cách 2:

Vì đường thẳng d cần tìm ở 4 đáp án đều không cùng phương với cả d_1 và d_2 nên ta chỉ cần kiểm tra tính đồng phẳng của d và d_1, d và d_2.

d_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (-1;-2;1)$ và qua điểm $A(3;3;-2)$.

d_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{b} = (-3;2;1)$ và qua điểm $B(5;-1;2)$.

Đường thẳng d cần tìm có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;3)$ và qua điểm $M(1;-1;0)$.

□Ta có $\overrightarrow{AM}=(-2;-4;2)$; $\overrightarrow{BM}=(-4;0;-2)$. Khi đó

□$\left[\vec{u};\vec{a}\right]=(8;-4;0)\Rightarrow\left[\vec{u};\vec{a}\right].\overrightarrow{AM}=0$ nên d và d_1 đồng phẳng.

□$\left[\vec{u};\vec{b}\right]=(-4;-10;8)\Rightarrow\left[\vec{u};\vec{b}\right].\overrightarrow{BM}=0$ nên d và d_2 đồng phẳng.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6}$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6}\geq 0$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Dấu đẳng thức chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow m\geq -3x^2-\dfrac{1}{x^6}=g(x)$, $\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{x\in(0;+\infty)} g(x)$. Ta có $g'(x)=-6x+\dfrac{6}{x^7}=\dfrac{-6x^8+6}{x^7}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

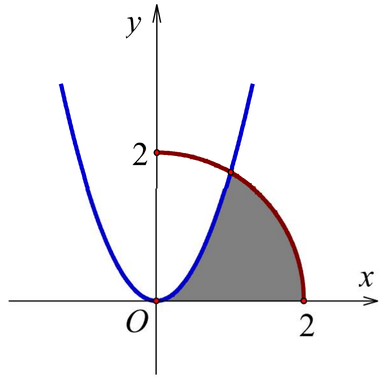
□Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$

□Suy ra $\max\limits_{x\in(0;+\infty)} g(x)=g(1)=-4$ do đó $m\geq -4\Rightarrow m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

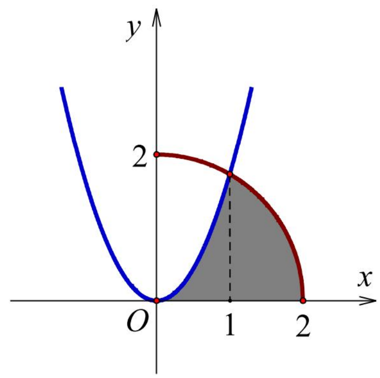
Câu 31: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\leq x\leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.



Lời giải

Chọn B.



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) là:

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2=3x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1 \text{ (vì } 0\le x\le 2\text{)}.$$

□Cách 1: Diện tích của (H) là:

$$S=\int_0^1 \sqrt{3}x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+I \text{ với } I=\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$$

Đặt: $x=2\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$, $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\left(1+\cos 2t\right).\mathrm{d}t=\left(2x+\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S=\frac{\sqrt{3}}{3}+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

Cách 2: Diện tích của (H) bằng diện tích một phần tư hình tròn bán kính 2 trừ diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung tròn, parabol và trục Oy.

Tức là: $S=\pi-\int\limits_0^1\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 32: Biết $I=\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=24$. **B.** $P=12$. **C.** $P=18$. **D.** $P=46$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0$, $\forall x\in[1;2]$ nên:

$$I=\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\int\limits_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}=\int\limits_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$$=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\mathrm{d}x=\left.\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\right|_1^2=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2.$$

Mà $I=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ nên $\begin{cases}a=32\\b=12\\c=2\end{cases}$. Suy ra: $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Câu 33: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $S_{xq}=8\sqrt{2}\pi$. **C.** $S_{xq}=\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A.

Tam giác BCD đều cạnh 4 có diện tích: $S_{BCD}=\frac{4^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$.

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}\Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{16}{3}\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ Độ dài đường cao khối tứ diện: $h=\dfrac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Bán kính đáy đường tròn nội tiếp tam giác BCD: $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{4\sqrt{3}}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x-2.12^x+(m-2)9^x=0$ có nghiệm dương ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $16^x-2.12^x+(m-2)9^x=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x}-2.\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x}+m-2=0$ (1).

Đặt: $t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{x}>0$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow t^2-2t=2-m$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm dương $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t>1$.

Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t)=t^2-2t$, $t\in(1;+\infty)$ và đường thẳng $d: y=2-m$.

Xét hàm số $f(t)=t^2-2t$, $t\in(1;+\infty)$.

$f'(t)=2(t-1)>0$, $\forall t\in(1;+\infty)$.

Suy ra, hàm số f luôn đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, ycbt $\Leftrightarrow 2-m>-1 \Leftrightarrow m<3$.

Vậy có 2 giá trị m dương thoả mãn là $m \in \{1;2\}$.

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$ có nghiệm thực ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin^3 x-m$. (1)

Đặt $\sin x=u$. Điều kiện $-1\le u\le 1$ và $\sqrt[3]{m+3\sin x}=v \Rightarrow m+3u=v^3$. (2)

Khi đó (1) trở thành $u^3=m+3v$ (3)

Từ (3) và (2) suy ra $u^3-3v=v^3-3u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2+uv+v^2+3\right)=0 \Leftrightarrow u=v$.

(Do $u^2+uv+v^2+3=\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3v^2}{4}+3>0$, $\forall u$, $v\in\mathbb{R}$)

Suy ra: $\sqrt[3]{m+3u}=u \Leftrightarrow m=u^3-3u$, với $u\in[-1;1]$.

Xét hàm số $f(u)=u^3-3u$ trên đoạn $[-1;1]$. Ta có $f'(u)=3u^2-3$; $f'(u)=0 \Leftrightarrow u=\pm 1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(u)=2$, $\min\limits_{[-1;1]} f(u)=-2$.

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-2\le m\le 2$, mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;\pm1;\pm2\}$.

Câu 36: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$ là hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (n) \\ x=-1 & (l) \end{array}\right.$

Suy ra GTLN và GTNN của $f(x)$ thuộc $\{f(0);f(1);f(2)\}=\{m;m-2;m+2\}$.

Xét hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ ta được giá trị lớn nhất của y là

$\max\{|m|;|m-2|;|m+2|\}=3$.

TH1: $\max\{1;3;5\}=5$ (loại).

TH2: $|m-2|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=5 \end{array}\right.$

+ Với $m=-1$. Ta có $\max\{1;3\}=3$ (nhận).

+Với $m=5$. Ta có $\max\{3;5;7\}=7$ (loại).

TH3: $|m+2|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$

+ Với $m=1$. Ta có $\max\{1;3\}=3$ (nhận).

+ Với $m=-5$. Ta có $\max\{3;5;7\}=7$ (loại).

Do đó $m \in \{-1;1\}$

Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

Chú ý: Ta có thể giải nhanh như sau:

Sau khi tìm được Suy ra GTLN và GTNN của $f(x)=x^3-3x+m$ thuộc $\{f(0);f(1);f(2)\}=\{m;m-2;m+2\}$.

+ Trường hợp 1: $m \geq 0$ thì $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=m+2=3 \Leftrightarrow m=1$.

+ Trường hợp 2: $m<0$ thì $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=|m-2|=2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$. **B.** $2+\ln 15$. **C.** $3+\ln 15$. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln|2x-1|+C$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

+ Xét trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Ta có $f(0)=1$, suy ra $C=1$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+1$, với mọi $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. Suy ra $f(-1)=1+\ln 3$.

+ Xét trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $f(1)=2$, suy ra $C=2$.

Do đó, $f(x)=\ln|2x-1|+2$, với mọi $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra $f(3)=2+\ln 5$.

Vậy $f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$.

Câu 38: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=3$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D.

$z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow (a+2)+(b+1)i=|z|+i|z|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2=|z| \\ b+1=|z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ b+1=\sqrt{a^2+b^2} & (2) \end{cases}$

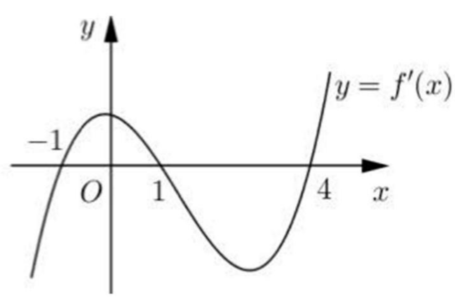
Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thay vào (1) ta được

$a+2=\sqrt{a^2+(a+1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2>1 & (\text{do}\,|z|>1) \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=3$. Suy ra $b=4$.

Do đó $z=3+4i$ có $|z|=5>1$ (thỏa điều kiện $|z|>1$).

Vậy $P=a+b=3+4=7$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$.Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $\left(f(2-x)\right)'>0 \Leftrightarrow f'(2-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến từ (C) đi qua A. Tổng tất cả giá trị của phần tử S bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình đường thẳng d đi qua A và có hệ số góc $k: y=k\left(x-a\right)+1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và $\left(C\right)$:

$k\left(x-a\right)+1=\frac{-x+2}{x-1}\Leftrightarrow\left(kx-ka+1\right)\left(x-1\right)=-x+2\ \ \left(x\neq1\right)$

$\Leftrightarrow kx^2+\left(-k-ka+2\right)x-3+ka=0\ \ \left(x\neq1\right)\ \ (*)$

Với $k=0$, ta có $d: y=1$ là tiệm cận ngang đồ thị hàm số nên không thể tiếp xúc được.

Với $k\neq0$, d và $\left(C\right)$ tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\Delta_x=\left[k\left(1+a\right)-2\right]^2-4k\left(-3+ka\right)=0\Leftrightarrow\Delta_x=k^2\left(1-a\right)^2-4k\left(a-2\right)+4=0$

Coi đây là phương trình bậc 2 ẩn k tham số a

Để qua $A\left(a;1\right)$ vẽ được đúng 1 tiếp tuyến thì phương trình $\Delta_x=0$ có đúng một nghiệm $k\neq0$.

*Xét $1-a=0\Leftrightarrow a=1$, ta có $4k+4=0\Leftrightarrow k=-1$ thỏa.

*Có $f\left(0\right)=4\neq0$ nên loại đi trường hợp có hai nghiệm trong đó có một nghiệm là 0.

*Còn lại là trường hợp $\Delta_x=0$ có nghiệm kép khi

$\Delta'_k=4\left(\left(a-2\right)^2-\left(a-1\right)^2\right)=4\left(2a-3\right)=0\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$

Tổng là $1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;1;2\right)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC\neq0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $A\left(a;0;0\right)$, $B\left(0;b;0\right)$, $C\left(0;0;c\right)$. Từ đó ta có $OA=\left|a\right|$, $OB=\left|b\right|$, $OC=\left|c\right|$

Mặt phẳng đoạn chắn đi qua các điểm A, B, C có dạng: $\left(P\right):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì $M\in\left(P\right)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$.

Vì $OA=OB=OC\Rightarrow\left|a\right|=\left|b\right|=\left|c\right|$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=1 \\ |a|=|b|=|c| \end{cases}$

Xét các trường hợp,phá trị tuyệt đối và giải hệ, ta có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l}(a;b;c)=(4;4;4)\\(a;b;c)=(2;-2;2)\\(a;b;c)=(-2;2;2)\end{array}\right.$ tương ứng với 3

phương trình mặt phẳng $\left[\begin{array}{l}(P): x+y+z-4=0\\(P): x-y+z-2=0\\(P): -x+y+z-2=0\end{array}\right.$.

Câu 42: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất để $u_n>5^{100}$ bằng

A. 247. **B.** 248. **C.** 229. **D.** 290.

Lời giải

Chọn B.

Vì $u_{n+1}=2u_n$ nên dễ thấy dãy số (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=2$.

Ta có: $u_{10}=u_1.q^9=2^9.u_1$

Xét $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$

$\Leftrightarrow \log u_1-2\log\left(2^9.u_1\right)+\sqrt{2+\log u_1-2\log\left(2^9.u_1\right)}=0$

$\Leftrightarrow \log u_1-18\log 2-2\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-18\log 2-2\log u_1}=0$

$\Leftrightarrow -\log u_1-18\log 2+\sqrt{2-\log u_1-18\log 2}=0$

Đặt $\sqrt{2-\log u_1-18\log 2}=t\quad (t\ge 0)$. Phương trình trên trở thành:

$t^2-2+t=0\Leftrightarrow t^2+t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\,(L)\end{array}\right.$

Với $t=1\Leftrightarrow \sqrt{2-\log u_1-18\log 2}=1\Leftrightarrow 2-\log u_1-18\log 2=1\Leftrightarrow u_1=\dfrac{5}{2^{17}}$

Trong trường hợp này ta có: $u_n=\dfrac{5}{2^{17}}.2^{n-1}>5^{100}\Leftrightarrow 2^{n-18}>5^{99}\Leftrightarrow n>99\log_2 5+18$

Mà $n\in\mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất trong trương hợp này là $n=248$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $y=3x^4-4x^3-12x^2+m$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Có $y'=12x^3-12x^2-24x$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số đã cho có 7 cực trị thì $\begin{cases} m-5<0 \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$.

Vì m nguyên nên các giá trị cần tìm của m là $m\in\{1;\,2;\,3;\,4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên cần tìm của m.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;\,2;\,1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{2}$. **B.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z-4}{2}$.

C. $\dfrac{x+\dfrac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\dfrac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\dfrac{11}{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{x+\dfrac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\dfrac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\dfrac{5}{9}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Khi đó $AB.\overrightarrow{IO}+OB.\overrightarrow{IA}+OA.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $(*)$.

Ta có $OA=3$, $OB=4$, $AB=5$;

$\overrightarrow{IO}=(-a;-b;-c)$, $\overrightarrow{IA}=(2-a;2-b;1-c)$, $\overrightarrow{IB}=\left(\dfrac{-8}{3}-a;\dfrac{4}{3}-b;\dfrac{8}{3}-c\right)$.

Từ $(*)$ ta có $\begin{cases}-5a+4(2-a)+3\left(-\dfrac{8}{3}-a\right)=0\\ -5b+4(2-b)+3\left(\dfrac{4}{3}-b\right)=0\\ -5c+4(1-c)+3\left(\dfrac{8}{3}-c\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\\ c=1\end{cases}$.

Do đó $I(0;1;1)$.

Mặt khác, ta có: $\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(4;-8;8)$.

Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u}=(1;-2;2)$.

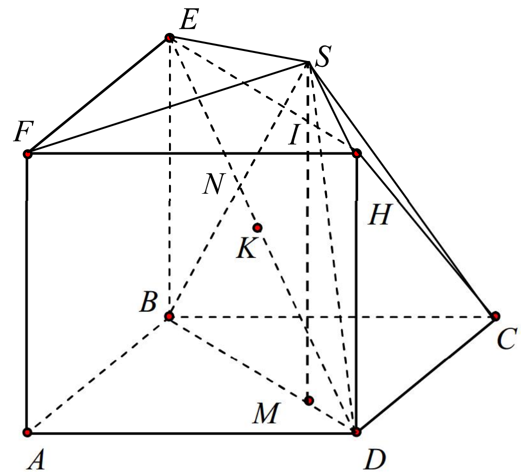
Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$. Đáp án A thỏa bài toán.

Câu 45: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng.

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn C.



Dựng điểm H sao cho $EFH.BAD$ là hình lăng trụ.

Gọi N là hình chiếu của B lên ED, S là điểm đối xứng của N qua B, gọi K là trung điểm của ED.

Gọi M là hình chiếu của S lên BD, $I = SM \cap EH$.

Ta có: $BD = \sqrt{2}; DE = \sqrt{3}$

Xét tam giác vuông BED ta có: $BN = \sqrt{\dfrac{BE^2.BD^2}{BE^2 + BD^2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$;

$DN = \dfrac{DB^2}{ED} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $KN = DN - \dfrac{DE}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SBD ta có: $SM.BD = DN.SB \Rightarrow SM = \dfrac{SB.DN}{BD} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow IS = \dfrac{1}{3}$

Xét tam giác vuông SIH ta có: $IH = \sqrt{SH^2 - SI^2} = \sqrt{(2NK)^2 - SI^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \dfrac{EI}{EH} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{d(I,(ABEF))}{d(H,(ABEF))} = \dfrac{EI}{EH} = \dfrac{2}{3}$

Do $SI // (ABEF) \Rightarrow d(S,(ABEF)) = d(I,(ABEF)) = \dfrac{2}{3}$

$V_{ABCDSEF} = V_{S.ABCD} + V_{S.ABEF} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{3}.1 + \dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{3}.1 = \dfrac{2}{3}$.

Câu 46: Xét các số phức $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 8$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $|z-4-3i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=5 \Leftrightarrow a^2+b^2=8a+6b-20$

Đặt $A=|z+1-3i|+|z-1+i|$ ta có:

$$A=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$$

$$A^2 \le (1^2+1^2)\left((a+1)^2+(b-3)^2+(a-1)^2+(b+1)^2\right)=2\left(2(a^2+b^2)-4b+12\right)$$

$$=2(16a+8b-28)=8(4a+2b-7)\ (1)$$

Mặt khác ta có:

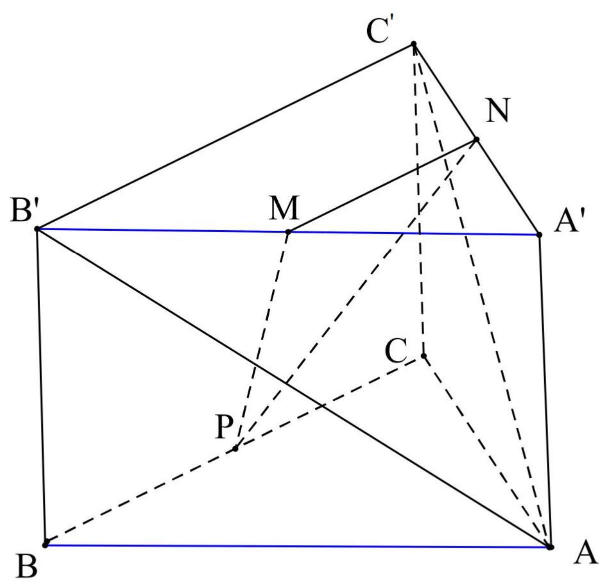
$$4a+2b-7=4(a-4)+2(b-3)+15 \le \sqrt{(4^2+2^2)\left((a-4)^2+(b-3)^2\right)}+15=25\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $A^2 \le 200$

Để $A_{\max}=10\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b-7=25 \\ \dfrac{a-4}{4}=\dfrac{b-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=4 \end{cases}$

Vậy $P=a+b=10$.

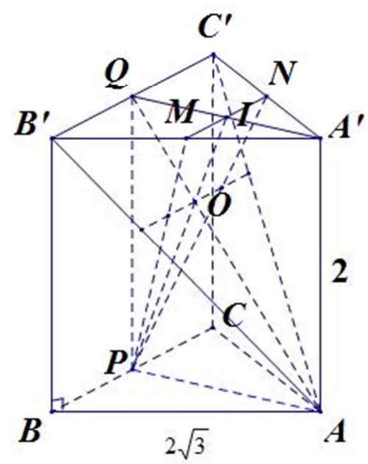
Câu 47: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi I, Q lần lượt là trung điểm của MN, $B'C'$. Gọi $O = PI \cap AQ$.

Khi đó $\begin{cases} O \in (AB'C') \cap (MNP) \\ B'C' \,//\, MN \\ B'C' \subset (AB'C'), MN \subset (MNP) \end{cases}$ nên giao tuyến của $(AB'C')$ và (MNP) là đường thẳng d qua O và song song MN, $B'C'$.

Tam giác $AB'C'$ cân tại A nên $AQ \perp B'C' \Rightarrow AQ \perp d$.

Tam giác PMN cân tại P nên $PI \perp MN \Rightarrow PI \perp d$.

Do đó góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) là góc giữa AQ và PI.

Ta có $AP = 3$, $AQ = \sqrt{13}$, $IP = \dfrac{5}{2}$.

Vì $\Delta OAP \backsim \Delta OQI$ và $\dfrac{AP}{IQ} = 2$ nên $OA = \dfrac{2}{3}AQ = \dfrac{2\sqrt{13}}{3}$; $OP = \dfrac{2}{3}IP = \dfrac{5}{3}$.

$$\cos\left(\widehat{(AB'C'),(MNP)}\right) = \cos\left(\widehat{AQ,PI}\right) = \left|\cos\left(\widehat{AOQ}\right)\right| = \frac{OA^2 + OP^2 - AP^2}{2OA.OP} = \frac{\sqrt{13}}{65}.$$

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3).

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu đã cho có phương trình là:
$ax+by+cz+d=0$ (đk: $a^2+b^2+c^2>0$).

Khi đó ta có hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} d\left(A;(P)\right)=2 \\ d\left(B;(P)\right)=1 \\ d\left(C;(P)\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+2b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2 \\ \dfrac{|3a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \\ \dfrac{|-a-b+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |3a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |-a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}.$$

Khi đó ta có: $|3a-b+c+d|=|-a-b+c+d|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a-b+c+d=-a-b+c+d \\ 3a-b+c+d=a+b-c-d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a-b+c+d=0 \end{array}\right..$$

Với $a=0$ thì ta có

$$\begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ |2b+c+d|=2|-b+c+d| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ \left[\begin{array}{l} 4b-c-d=0 \\ c+d=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c+d=0,\ b=0 \\ c+d=4b,\ c=\pm 2\sqrt{2}b \end{array}\right.$$

Do đó có 3 mặt phẳng thỏa bài toán.

Với $a-b+c+d=0$ thì ta có

$$\begin{cases} |3b|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=4|a| \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=\dfrac{4}{3}|a| \\ |c|=\dfrac{\sqrt{11}}{3}|a| \end{cases}$$

Do đó có 4 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 49: Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp $12A$, 3 học sinh lớp $12B$ và 5 học sinh lớp $12C$ thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\dfrac{11}{630}$. **B.** $\dfrac{1}{126}$. **C.** $\dfrac{1}{105}$. **D.** $\dfrac{1}{42}$.

Lời giải

Chọn A.

Số cách xếp 10 học sinh vào 10 vị trí: $n(\Omega)=10!$ cách.

Gọi A là biến cố: “Trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau”.

Sắp xếp 5 học sinh lơp 12C vào 5 vị trí, có $5!$ cách.

Ứng mỗi cách xếp 5 học sinh lớp 12C sẽ có 6 khoảng trống gồm 4 vị trí ở giữa và hai vị trí hai đầu để xếp các học sinh còn lại.

	C1		C2		C3		C4		C5	

TH1: Xếp 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí trống ở giữa (không xếp vào hai đầu), có A_4^3 cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó, chọn lấy 1 trong 2 học sinh lớp 12A xếp vào vị trí trống thứ 4 (để hai học sinh lớp 12C không được ngồi cạnh nhau), có 2 cách.

Học sinh lớp 12A còn lại có 8 vị trí để xếp, có 8 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.A_4^3.2.8$ cách.

TH2: Xếp 2 trong 3 học sinh lớp 12B vào 4 vị trí trống ở giữa và học sinh còn lại xếp vào hai đầu, có $C_3^1.2.A_4^2$ cách.

Ứng với mỗi cách xếp đó sẽ còn 2 vị trí trống ở giữa, xếp 2 học sinh lớp 12A vào vị trí đó, có 2 cách.

Theo quy tắc nhân, ta có $5!.C_3^1.2.A_4^2.2$ cách.

Do đó số cách xếp không có học sinh cùng lớp ngồi cạnh nhau là:

$n(A)=5!.A_4^3.2.8+5!.C_3^1.2.A_4^2.2=63360$ cách.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{63360}{10!}=\dfrac{11}{630}$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A.

Tính: $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^3 f(x)}{3}\right|_0^1 - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1.f(1)-0.f(1)}{3} - \dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x$.

Mà $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{1}{3}\int\limits_0^1 x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \int\limits_0^1 x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x = -1$.

Ta có $\int\limits_0^1 \left[f(x)'\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ (1).

$\int\limits_0^1 x^6.\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^7}{7}\right|_0^1 = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \int\limits_0^1 49x^6.\mathrm{d}x = \dfrac{1}{7}.49 = 7$ (2).

$\int\limits_0^1 x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x = -1 \Rightarrow \int\limits_0^1 14x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x = -14$ (3).

Cộng hai vế (1) (2) và (3) suy ra $\int\limits_0^1 \left[f(x)'\right]^2 \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 49x^6.\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 14x^3.f(x)'\,\mathrm{d}x = 7+7-14 = 0$.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \left\{\left[f'(x)\right]^2 + 14x^3 f'(x) + 49x^6\right\}\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0$.

Do $\left[f'(x)+7x^3\right]^2 \geq 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x \geq 0$. Mà $\int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$.

$\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-7x^3\right)\mathrm{d}x \Rightarrow f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + C$. Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\dfrac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \dfrac{7}{4}$.

Do đó $f(x) = -\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(-\dfrac{7x^4}{4} + \dfrac{7}{4}\right)\mathrm{d}x = \left.\left(-\dfrac{7x^5}{20} + \dfrac{7}{4}x\right)\right|_0^1 = \dfrac{7}{5}$.

----------**HẾT**----------