B. BÀI TẬP TỔNG HỢP:

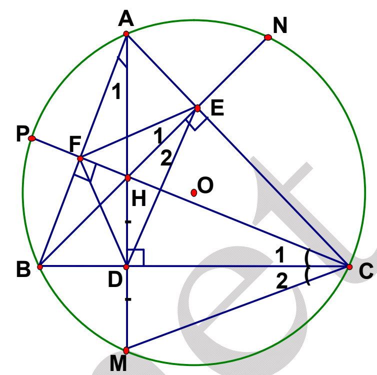
Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại

H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.

=>∠ CEH + ∠ CDH = 180^0

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

∠ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

∠ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

Mà ∠ CEH và ∠ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE ⊥ AC =>∠BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF ⊥ AB =>∠BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: ∠ AEH = ∠ ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=>Δ AEH ~ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: ∠ BEC = ∠ ADC = 90^0 ; ∠C là góc chung

=>Δ BEC ~ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=>$\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB ⊥ HM =>Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

⇨ $\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

⇨ $\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn

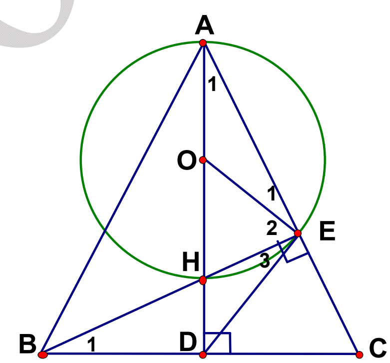
ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)



$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle$BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến => D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle BEC = 90^0$.

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

4.Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O =>$\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D =>$\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) =>$\angle E_1 = \angle E_3$ =>$\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ =>$\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => DE $\perp$ OE tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow$ ED = 4cm

Bài 3 Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1.Chứng minh AC + BD = CD.

2.Chứng minh $\angle COD = 90^0$.

3.Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

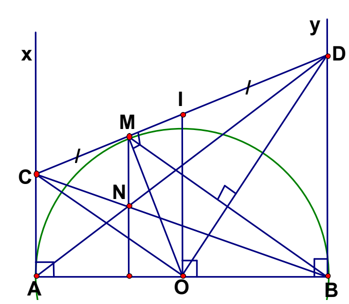
4.Chứng minh OC // BM

5.Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

5.Chứng minh MN $\perp$ AB.

6.Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:



1.Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM. Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2.Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle AOM$ và $\angle BOM$ là hai góc kề bù =>$\angle COD = 90^0$.

3. Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên tam giác COD vuông tại O có OM ⊥ CD (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có $OM^2 = CM. DM$,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4. Theo trên $\angle COD = 90^0$ nên OC ⊥ OD .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

⇒ IO // AC , mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

Bài 4 Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

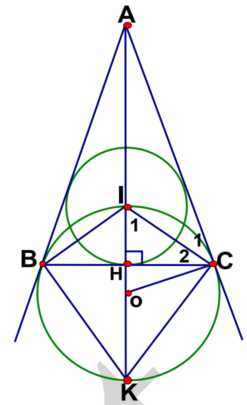
1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.

Lời giải: (HD)

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI ⊥ BK hay $\angle IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.



2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).

$\angle I_1 = \angle ICO$ (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay $AC \perp OC$. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$AH^2 = AC^2 – HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (cm)

$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9$ (cm)

$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ (cm)

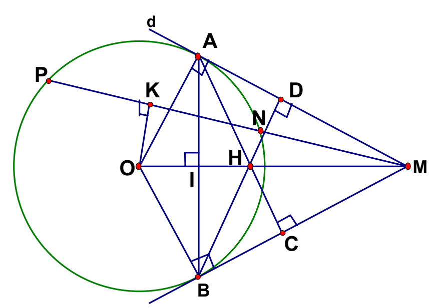
<u>**Bài 5**</u> Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI. IM = IA^2$.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

<u>**Lời giải:**</u>

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính



Và dây cung) =>$\angle OKM = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM $\perp$ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => OI.OM = OA^2 hay OI.OM = R^2; và OI. IM = IA^2.

4. Ta có OB $\perp$ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC $\perp$ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

OA $\perp$ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD $\perp$ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH $\perp$ AB; cũng theo trên OM $\perp$ AB => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R

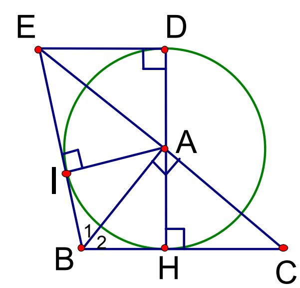
Bài 6 Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1.Chứng minh tam giác BEC cân.

2.Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.

3.Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).

4.Chứng minh BE = BH + DE.



Lời giải: (HD)

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì AB $\perp$CE (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC => BEC là tam giác cân. =>$\angle B_1 = \angle B_2$

2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ =>Δ AHB = ΔAIB =>

AI = AH.

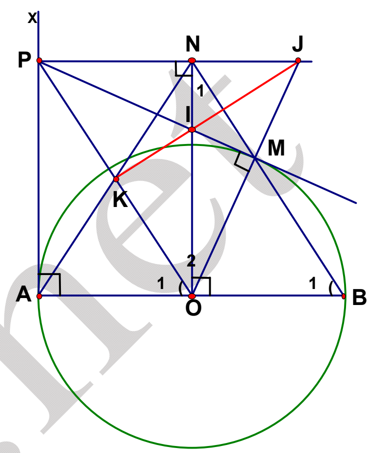
3. AI = AH và BE ⊥ AI tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

Bài 7 Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao

cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



Lời giải:

1. (HS tự làm).

2.Ta có ∠ ABM nội tiếp chắn cung AM; ∠ AOM là góc ở tâm

chắn cung AM =>∠ ABM = $\frac{\angle AOM}{2}$(1) OP là tia phân giác ∠

AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) =>∠ AOP = $\frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) =>∠ ABM = ∠ AOP (3)

Mà ∠ ABM và ∠ AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3.Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : ∠PAO=90^0 (vì PA là tiếp tuyến); ∠NOB = 90^0 (gt NO⊥AB).

=>∠PAO = ∠NOB = 90^0; OA = OB = R; ∠AOP = ∠OBN (theo (3)) =>ΔAOP = ΔOBN => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà ON ⊥ AB => ON ⊥ PJ

Ta cũng có PM ⊥ OJ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có ∠PAO = ∠AON = ∠ONP = 90^0 => K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật =>∠APO = ∠ NOP (so le) (7)

Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM =>∠APO = ∠MPO (8).

Từ (7) và (8) =>ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

__**Bài 8**__ Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng: AI^2 = IM **.** IB.

3) Chứng minh BAF là tam giác cân.

4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.

5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

__**Lời giải:**__

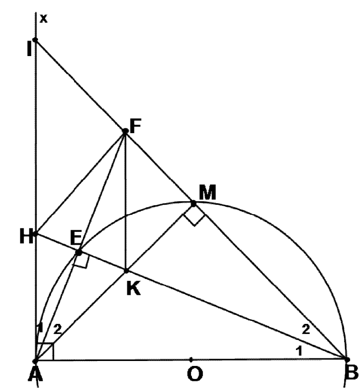
1. Ta có : ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>∠KMF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

∠AEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=>∠KEF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

=>∠KMF + ∠KEF = 180^0 . Mà ∠KMF và ∠KEF là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.



2. Ta có ∠IAB = 90^0 (vì AI là tiếp tuyến) =>ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB (theo trên). Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => AI^2 = IM **.** IB.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM =>∠IAE = ∠MAE => $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$ (*lí do ……)*

=>∠ABE =∠MBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có ∠AEB = 90^0 => BE ⊥ AF hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ BE ⊥ AF => AF ⊥ HK (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác ∠HAK (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FK hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang. Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB =>∠ABM = ∠MAI = 45^0 (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có ∠ABI = 45^0 =>∠AIB = 45^0 .(8)

Từ (7) và (8) =>∠IAK = ∠AIF = 45^0 => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh ∠ ABD = ∠ DFB.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:

1.C thuộc nửa đường tròn nên ∠ACB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BC ⊥ AE.

∠ABE = 90^0 (Bx là tiếp tuyến) => tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao => AC. AE = AB^2 (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC. AE không đổi.

2.Δ ADB có ∠ADB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn).

=>∠ABD + ∠BAD = 90^0 (vì

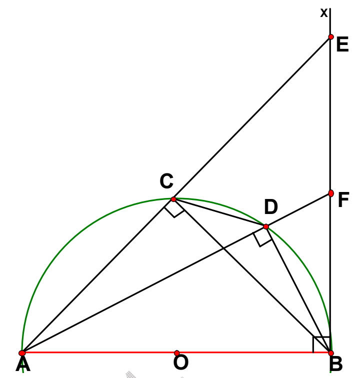
tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0)(1)

Δ ABF có ∠ABF = 90^0 (BF là tiếp tuyến).

=>∠AFB + ∠BAF = 90^0 (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0)

(2)

Từ (1) và (2) =>∠ABD = ∠DFB (cùng phụ với ∠BAD)



3.Tứ giác ACDB nội tiếp (O) =>∠ABD + ∠ACD = 180^0 .

∠ECD + ∠ACD = 180^0 (Vì là hai góc kề bù) =>∠ECD = ∠ABD (cùng bù với ∠ACD).

Theo trên ∠ABD = ∠DFB =>∠ECD = ∠DFB. Mà ∠EFD + ∠DFB = 180^0 (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra ∠ECD + ∠EFD = 180^0, mặt khác ∠ECD và ∠EFD là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

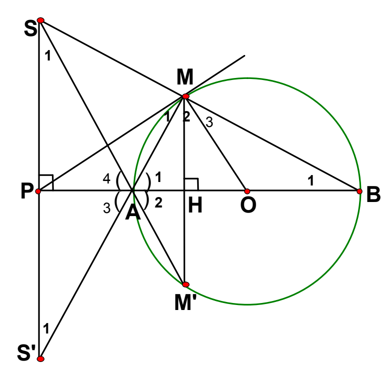
1.Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng Δ PS'M cân. 2.Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .

Lời giải:

1. Ta có SP ⊥ AB (gt) =>∠SPA = 90^0 ; ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) =>∠AMS = 90^0 . Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.

Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

2. Vì M'đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn => hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau



=>∠AMM' = ∠AM'M (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)

Cũng vì M'đối xứng M qua AB nên MM' ⊥ AB tại H => MM'// SS' (cùng vuông góc với AB)

=>∠AMM' = ∠AS'S; ∠AM'M = ∠ASS' (vì so le trong) (2).

=> Từ (1) và (2) =>$\angle$AS'S = $\angle$ASS'.

Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đ/ tròn =>$\angle$ASP=$\angle$AMP (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)

=>$\angle$AS'P = $\angle$AMP => tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M =>$\angle B_1 = \angle S'_1$ (cùng phụ với $\angle$S). (3)

Tam giác PMS' cân tại P =>$\angle S'_1 = \angle M_1$ (4)

Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB =R) =>$\angle B_1 = \angle M_3$ (5).

Từ (3), (4) và (5) =>$\angle M_1 = \angle M_3$ =>$\angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$ mà $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^0$ nên suy ra $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^0$ => PM $\perp$ OM tại M => PM là tiếp tuyến của đường tròn tại M

Bài 11. Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

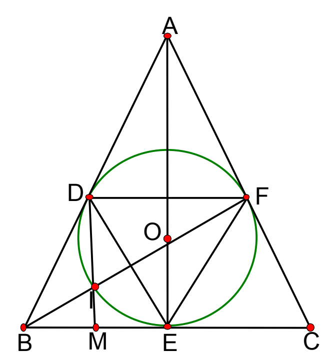
1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. DF // BC. **3.** Tứ giác BDFC nội tiếp. **4.** $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

Lời giải:

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF => tam giác ADF cân tại A =>$\angle ADF = \angle AFD < 90^0$ => sđ cung DF < 180^0 =>$\angle DEF < 90^0$ (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có $\angle DFE < 90^0$; $\angle EDF < 90^0$. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.



2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên) =>$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$ => DF // BC.

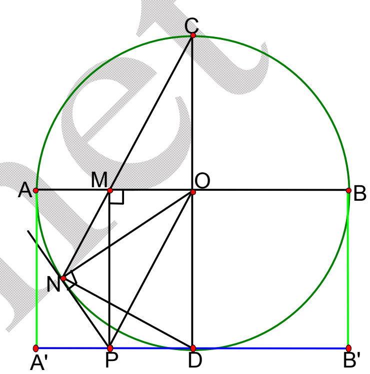
3. DF // BC => BDFC là hình thang lại có $\angle$ B = $\angle$C (vì tam giác ABC cân) => BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn .

4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có ∠ DBM = ∠BCF (hai góc đáy của tam giác cân).

∠BDM = ∠BFD (nội tiếp cùng chắn cung DI); ∠ CBF = ∠BFD (vì so le) =>∠BDM = ∠CBF .

=>ΔBDM ~ΔCBF => $\frac{BD}{CB}=\frac{BM}{CF}$

<u>Bài 12</u> Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :



1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.

<u>Lời giải:</u>

1. Ta có ∠OMP = 90^0 (vì PM ⊥ AB); ∠ONP = 90^0 (vì NP là tiếp tuyến).

Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng 90^0 => M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP => Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp =>∠OPM = ∠ ONM (nội tiếp chắn cung OM) Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R =>∠ONC = ∠OCN

=>∠OPM = ∠OCM.

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có ∠MOC = ∠OMP = 90^0; ∠OPM = ∠OCM =>∠CMO = ∠POM lại có MO là cạnh chung =>ΔOMC = ΔMOP => OC = MP. (1)

Theo giả thiết Ta có CD ⊥ AB; PM ⊥ AB => CO//PM (2).

Từ (1) và (2) => Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có ∠MOC = 90^0 (gt CD ⊥ AB); ∠DNC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) =>∠MOC =∠DNC = 90^0 lại có ∠C là góc chung =>ΔOMC ~ΔNDC

=> $\frac{CM}{CD}=\frac{CO}{CN}$ => CM. CN = CO.CD mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = $2R^2$ không đổi => CM.CN $=2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

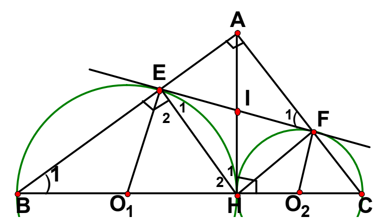
4. (HD) Dễ thấy ΔOMC = ΔDPO (c.g.c) =>∠ODP = 90^0 => P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A' B' song song và bằng AB.

Bài 13 Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Lời giải:



1. Ta có : ∠BEH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=>∠AEH = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)

∠CFH = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=>∠AFH = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)

∠EAF = 90^0 (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>$\angle F_1=\angle H_1$ (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết AH ⊥BC nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2)

=>$\angle B_1 = \angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) =>$\angle B_1= \angle F_1$ =>∠EBC+∠EFC = ∠AFE + ∠EFC mà ∠AFE + ∠EFC = 180^0 (vì là hai góc kề bù) =>∠EBC+∠EFC = 180^0 mặt khác ∠EBC và ∠EFC là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có ∠A = 90^0 là góc chung; ∠AFE = ∠ABC (theo Chứng minh trên)

=>ΔAEF ~ΔACB => $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ => AE. AB = AF. AC.

* ***HD cách 2***: *Tam giác AHB vuông tại H có HE ⊥ AB => $AH^2 = AE.AB$ (*)*

Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC => $AH^2 = AF.AC$ (**)

Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH =>ΔIEH cân tại I =>$\angle E_1 = \angle H_1$.

ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) =>$\angle E_2 = \angle H_2$.

=>$\angle E_1 + \angle E_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHB = 90^0$ =>$\angle E_1 + \angle E_2 = \angle O_1EF = 90^0$

=> $O_1E \perp EF$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $O_2F \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

__Bài 14__ Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA,

EB với các nửa đường tròn (I), (K).

1.Chứng minh EC = MN.

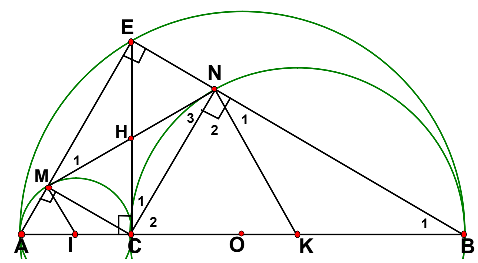
2.Ch/minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).

3.Tính MN.

4.Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

__Lời giải:__

1. Ta có: $\angle BNC = 90^0$(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)



=>$\angle ENC = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle AMC = 90^0$ (nội tiếp chắn nức đường tròn tâm I) =>$\angle EMC = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)

$\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay $\angle MEN = 90^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết EC ⊥AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)

=>$\angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên =>$\angle C_1 = \angle N_3$

=>$\angle B_1 = \angle N_3$.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K =>$\angle B_1 = \angle N_1$ (5)

Từ (4) và (5) =>$\angle N_1 = \angle N_3$ mà $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^0$ =>$\angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^0$ hay $MN \perp KN$ tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có $\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nức đường tròn tâm O) =>ΔAEB vuông tại A có $EC \perp AB$ (gt) => $EC^2 = AC.BC \Leftrightarrow EC^2 = 10.40 = 400$ => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.

4. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm

Ta có $S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi.IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$; $S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi.20^2 = 400\pi$.

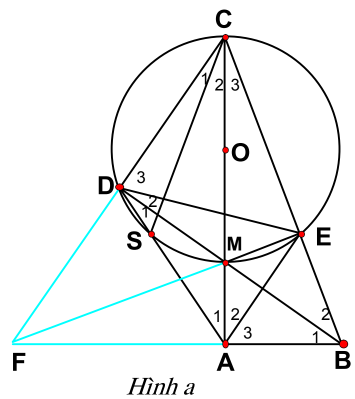
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}(S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\pi = 100\pi \approx 314\ (cm^2)$$

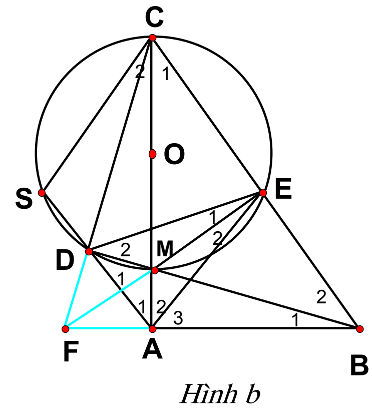
Bài 15 Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

Lời giải:



Hình a



Hình b

1. Ta có $\angle CAB = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle MDC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) =>$\angle CDB = 90^0$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp =>$\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ =>$\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ =>$\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\angle MEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) =>$\angle MEB = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\angle MAB = 90^0$; $\angle MEB = 90^0$ =>$\angle MAB + \angle MEB = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn =>$\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp =>$\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=>$\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

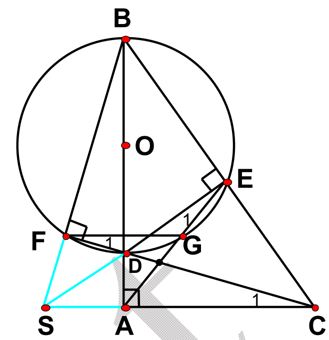
TH2*(Hình b)*

Câu 2 : $\angle ABC = \angle CME$ (cùng phụ $\angle ACB$); $\angle ABC = \angle CDS$ (cùng **bù**$\angle ADC$) =>$\angle CME = \angle CDS$

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ =>$\angle SCM = \angle ECM$ => CA là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :



1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.

Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có $\angle BAC = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle DEB = \angle BAC = 90^0$; lại có $\angle ABC$ là góc chung $\Rightarrow \Delta DEB \sim \Delta CAB$.

2. Theo trên $\angle DEB = 90^0 \Rightarrow \angle DEC = 90^0$ (vì hai góc kề bù); $\angle BAC = 90^0$ (vì ΔABC vuông tại A) hay $\angle DAC = 90^0 \Rightarrow \angle DEC + \angle DAC = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .

* $\angle BAC = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle DFB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle BFC = 90^0$ như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1 \Rightarrow \angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB. AC.

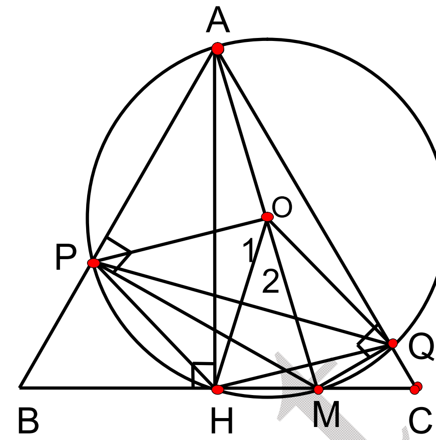
1.Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.

3.Chứng minh OH ⊥ PQ.

Lời giải:

1. Ta có MP ⊥ AB (gt) $\Rightarrow \angle APM = 90^0$; MQ ⊥ AC (gt) $\Rightarrow \angle AQM = 90^0$ như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM => APMQ là tứ giác nội tiếp.



* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao => $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao => $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MP$

Tam giác ACM có MQ là đường cao => $S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.MQ$

Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$ => $\frac{1}{2}AB.MP + \frac{1}{2}AC.MQ = \frac{1}{2}BC.AH$ => AB.MP + AC.MQ = BC.AH

Mà AB = BC = CA (vì tam giác ABC đều) => MP + MQ = AH.

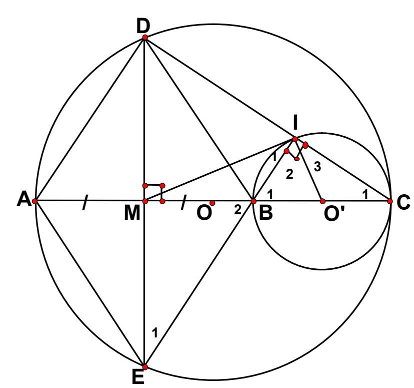
3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác =>∠HAP = ∠HAQ =>

$\overset{\frown}{HP} = \overset{\frown}{HQ}$ (tính chất góc nội tiếp) =>∠HOP = ∠HOQ (t/c góc ở tâm) => OH là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao => OH ⊥ PQ

<u>Bài 18</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội

<u>Lời giải:</u>



1. ∠BIC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) =>∠BID = 90^0 (vì là hai góc kề bù); DE ⊥ AB tại M =>∠BMD = 90^0

=>∠BID + ∠BMD = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE ⊥ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $AD \perp DC$; theo trên $BI \perp DC$ => BI // AD. (1)

4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).

Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME =>ΔMIE cân tại M =>$\angle I_1 = \angle E_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính) =>$\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) =>$\angle I_1 = \angle I_3$ =>$\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ =>$\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay $MI \perp O'I$ tại I => MI là tiếp tuyến của (O)