Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1:

a) $A=\left(2+\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right).\left(2-\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right)=\left(2+\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1}\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1}\right)$

$=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1.$

b) $\left(\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-b}\right).\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)=\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\right).\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

$=\frac{\sqrt{b}.\sqrt{ab}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}.\sqrt{ab}}{\sqrt{b}}=b-a.\ \left(a>0, b>0, a\neq b\right)$

Câu 2:

a) Đk: $x\neq 0$ và $y\neq 0.(*)$

Rút y từ phương trình (1) rồi thế vào phương trình (2) ta được:

$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}=2\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

+ Với x = 2, suy ra y = x + 1 = 3 (thoả mãn (*))

+ Với $x=-\frac{1}{2}$, suy ra y = x +1 = $\frac{1}{2}$ (thoả mãn (*))

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: (2; 3) và $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

b) Phương trình $x^2-x-3=0$ có các hệ số a, c trái dấu nên có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2.

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1+x_2=1$ và $x_1x_2=-3$.

Do đó: $P=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1+6=7$.

Câu 3:

a) Viết đường thẳng 2x + y = 3 về dạng y = - 2x + 3.

Vì đường thẳng y = ax + b song song với đường thẳng trên, suy ra a = - 2 (1)

Vì đường thẳng y = ax + b đi qua điểm M (2; $\frac{1}{2}$) nên ta có: $\frac{1}{2} = 2a + b$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra a = - 2 và b = $\frac{9}{2}$.

b) Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x (cm) và y (cm)

(x; y > 0).

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} xy = 40 \\ (x+3)(y+3) = xy + 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 40 \\ x + y = 13 \end{cases}$.

Suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình: $t^2 - 13t + 40 = 0$ (1).

Giải phương trình (1) ta được hai nghiệm là 8 và 5.

Vậy các kích thước của hình chữ nhật là 8 cm và 5 cm.

Câu 4:

a) Ta có:

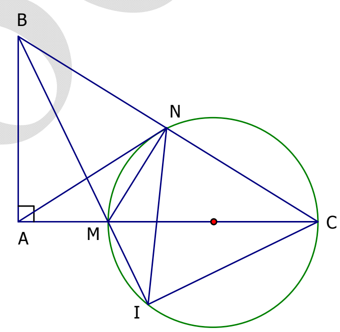
$\widehat{MAB} = 90^0$ (gt)(1). $\widehat{MNC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{MNB} = 90^0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ABNM là tứ giác nội tiếp.

Tương tự, tứ giác ABCI có: $\widehat{BAC} = \widehat{BIC} = 90^0$

$\Rightarrow$ ABCI là tứ giác nội tiếp đường tròn.



b) Tứ giác ABNM nội tiếp suy ra $\widehat{MNA} = \widehat{MBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AM) (3).

Tứ giác MNCI nội tiếp suy ra $\widehat{MNI} = \widehat{MCI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MI) (4).

Tứ giác ABCI nội tiếp suy ra $\widehat{MBA} = \widehat{MCI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AI) (5).

Từ (3),(4),(5) suy ra $\widehat{MNI} = \widehat{MNA} \Rightarrow$ NM là tia phân giác của $\widehat{ANI}$.

c) ΔBNM và ΔBIC có chung góc B và $\widehat{BNM} = \widehat{BIC} = 90^0 \Rightarrow$ ΔBNM ~ ΔBIC (g.g)

$\Rightarrow \frac{BN}{BM} = \frac{BI}{BC} \Rightarrow \subset BM.BI = BN . BC$.

Tương tự ta có: $CM.CA = CN.CB$.

Suy ra: BM.BI + CM.CA = BC^2 (6).

Áp dụng định lí Pitago cho tam giác ABC vuông tại A ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ (7).

Từ (6) và (7) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5:

$A = 2x - 2\sqrt{xy} + y - 2\sqrt{x} + 3$.

Trước hết ta thấy biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi: $\begin{cases} x \ge 0 \\ xy \ge 0 \end{cases}$ (1).

Từ (1) ta thấy nếu x = 0 thì y nhận mọi giá trị tùy ý thuộc R (2).

Mặt khác, khi x = 0 thì A = y + 3 mà y có thể nhỏ tùy ý nên A cũng có thể nhỏ tùy ý. Vậy biểu thức A không có giá trị nhỏ nhất.

Lời bình:

Câu IVc

a) Biết bao kí ức ùa về khi bắt gặp đẳng thức

$BM . BI + CM . CA = AB^2 + AC^2$. (1)

• Phải chăng $\begin{cases} BM.BI = AB^2 & (2) \\ CM.CA = AC^2 & (3) \end{cases}$ ***Từ đó cộng theo từng vế để có (1).***

Nếu có (1) thì AB phải là cạnh chung một cặp tam giác đồng dạng. Tiếc rằng điều ấy không đúng. Tương tự cũng không có (2).

• ***Để ý*** $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ***vậy nên (1)*** $\Leftrightarrow$ $BM.BI + CM.CA = BC^2$ ***(3)***

Khả năng $\begin{cases} BM.BI = k.BC^2 \\ CM.CA = (1-k)BC^2 \end{cases}$ ***(với 0 < k < 1), từ đó cộng theo từng vế để có (1) cũng không xẩy ra vì BC không phải là cạnh chung của một cặp tam giác đồng dạng.***

• ***Để ý*** $BN + NC = BC$ ***vậy nên (1)*** $\Leftrightarrow$ $BM.BI + CM.CA = BC(BN + NC)$

$\Leftrightarrow$ $BM.BI + CM.CA = BC.BN + BC.NC$ ***(4)***

Điều ấy dẫn dắt chúng ta đến lời giải trên.

b) Mong thời gian đừng lãng quên phân tích : $PQ^2 = PQ(PK + KQ)$

là một cách để chứng minh đẳng thức dạng : $PX.PY + QM.QN = PQ^2$.

(ở đây K là một điểm thuộc đoạn thẳng PQ).

Câu V

$\triangle$ ***Cảnh báo. Các bạn cùng theo dõi một lời giải sau :***

Biểu thức A có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$. ***Biến đổi*** $A = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 + 2$

.

Suy ra minA = 2, đạt được khi x = y = 1 (!).

• ***Kết quả bài toán sai thì đã rõ. Nhưng cái sai về tư duy mới đáng bàn hơn.***

1) Điều kiện xác định của P(x; y) chứa đồng thời $\sqrt{x}$ ***và*** $\sqrt{xy}$ ***là*** $D = \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Do vậy để tìm GTLN, GTNN P(x; y) cần phải xét độc lập hai trường hợp $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ ***và*** $\begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

2) Không thể gộp chung $\begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ***thành*** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3) Do cho rằng điều kiện xác định của P(x; y) là $D_{y\geq 0} = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ***(bỏ sót*** $D_{y<0} = \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \end{cases}$***)***

Vậy nên A = 2 là GNNN của A trên $D_{y\geq 0}$***, chưa đủ để kết luận đó là GTNN của A trên D.***

4) Nhân đây liên tưởng đến phương trình $P(x)\sqrt{Q(x)} = 0$. ***(1)***

Biến đổi đúng (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q(x) = 0 \\ \begin{cases} Q(x) > 0 \\ P(x) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$. ***Cách biến đổi sau là sai (1)*** $\Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$.