

Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1:

a) Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ khi và chỉ khi $2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = (m^2 - m)x^2$ đi qua điểm $A(-1; 2) \Leftrightarrow 2 = (m^2 - m) \cdot (-1)^2$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1; m = 2$$

Câu 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}-3} + \frac{1}{\sqrt{a}+3} \right) \left(1 - \frac{3}{\sqrt{a}} \right) = \frac{\sqrt{a}+3+\sqrt{a}-3}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \cdot \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{a}+3}. \text{ Vậy } P = \frac{2}{\sqrt{a}+3}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{2}{\sqrt{a}+3} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a} + 3 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1..$$

Vậy $P > \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.

Câu 3:

Gọi x, y là thời gian mỗi người cần để một mình hoàn thành công việc ($x, y > 0$ tính bằng giờ). Trong 1 giờ mỗi người làm được $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ công việc, cả 2 làm trong 1 giờ

được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ công việc. (vì hai người hoàn thành công việc trong 4 giờ). Do

người thứ nhất làm ít hơn người thứ hai là 6 giờ nên $y - x = 6$.

Ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 6 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } (2) \Leftrightarrow x(x+6) = 4(x+x+6) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ (t/m); } x = -4 \text{ (loại vì } x > 0). \text{ Thay vào (1) được } y = 12$$

Vậy để hoàn thành công việc người thứ nhất cần 6 giờ, người thứ hai cần 12 giờ.

Câu 4:

a) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (vì góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Tương tự có $\widehat{BDH} = \widehat{CEH} = 90^\circ$

Xét tứ giác ADHE có $\widehat{A} = \widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật.

Từ đó $DE = AH$ mà $AH^2 = BH \cdot CH$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

hay $AH^2 = 10 \cdot 40 = 20^2$ ($BH = 10$; $CH = 2.25 - 10 = 40$) $\Rightarrow DE = 20$

b) Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) mà $\widehat{DAH} = \widehat{ADE}$ (1)

(Vì ADHE là hình chữ nhật) $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{ADE}$ do $\widehat{C} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ nên tứ giác BDEC nội tiếp đường tròn.

c) Vì $O_1D = O_1B \Rightarrow \Delta O_1BD$ cân tại $O_1 \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BDO_1}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{ADE} + \widehat{BDO_1} = \widehat{B} + \widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow O_1D \parallel O_2E$

Vậy DEO_2O_1 là hình thang vuông tại D và E.

Ta có $S_{ht} = \frac{1}{2}(O_1D + O_2E) \cdot DE = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot DE \leq \frac{1}{2}O_1O_2^2$ (Vì

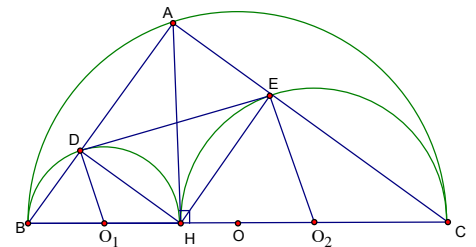
$O_1D + O_2E = O_1H + O_2H = O_1O_2$ và $DE \leq O_1O_2$)

$S_{ht} \leq \frac{1}{2}O_1O_2^2 = \frac{BC^2}{8} = \frac{R^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ

khi $DE = O_1O_2$

$\Leftrightarrow DEO_2O_1$ là hình chữ nhật

$\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung BC. Khi đó $\max S_{DEO_2O_1} = \frac{R^2}{2}$.



Câu 5:

Giải phương trình: $x^3 + x^2 - x = -\frac{1}{3}$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 - 3x = -1 \Leftrightarrow 4x^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow 4x^3 = (x - 1)^3$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{4} = x - 1 \Leftrightarrow x(1 - \sqrt[3]{4}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{4}}.$$

Vậy phương trình chỉ có 1 nghiệm $x = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{4}}$.

Lời bình:

Câu III

Ta thường gặp bài toán : " Hai máy cày cùng cày một cánh đồng...; hai vòi nước cùng chảy vào một bể...; hai hợp tác cùng đào một con mương...; hai người cùng làm chung một công việc...) v.v" . Ta gọi bài toán trên thuộc loại toán "Làm chung một việc"

Một số lưu ý khi giải bài toán này là

a) – Khối lượng công việc phải hoàn thành được quy ước bằng 1 (đơn vị).

– (Năng suất) \times (thời gian) = (khối lượng làm được).

– (Năng suất chung) = (tổng các năng suất riêng).

(Bạn có thể tò mò tại sao lại quy ước khối lượng công việc là 1. Công việc hoàn tất nghĩa là hoàn thành 100% khối lượng công việc. Bởi $100\% = 1$, đó là điều dẫn tới quy ước trên)

b) Bài toán có thể trình bày lời giải bằng hệ phương trình hai ẩn hoặc bằng phương trình một ẩn.

c) Trong bài toán trên (theo các kí hiệu đã dùng trong lời giải) thì :

– Các năng suất riêng là $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$

– Năng suất chung : Một mặt được tính là $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, một mặt giả thiết cho là $\frac{1}{4}$

. Vậy nên có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$