Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1.

1) Ta có A = $\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}\right):\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$.

2) $x=2\sqrt{2}+3 \Leftrightarrow x=\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2}+1$ nên A = $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=2$.

Câu 2.

1) Khi $a=3$ và $b=-5$ ta có phương trình: $x^2+3x-4=0$. Do a + b + c = 0 nên phương trình có nghiệm $x_1=1,\ x_2=-4$.

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta=a^2-4(b+1)>0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-a\\x_1x_2=b+1\end{cases}$ (1).

Bài toán yêu cầu $\begin{cases}x_1-x_2=3\\x_1^3-x_2^3=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2=3\\\left(x_1-x_2\right)^3+3x_1x_2\left(x_1-x_2\right)=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1-x_2=3\\x_1x_2=-2\end{cases}$ (2).

Từ hệ (2) ta có: $\left(x_1+x_2\right)^2=\left(x_1-x_2\right)^2+4x_1x_2=3^2+4(-2)=1$, kết hợp với (1) được

$\begin{cases}a^2=1\\b+1=-2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1,b=-3\\a=-1,b=-3\end{array}\right.$.

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện (*) nên chúng là các giá trị cần tìm.

Câu 3.

Gọi x (km/h) là vận tốc thực của chiếc thuyền (x > 4).

Vận tốc của chiếc thuyền khi xuôi dòng là x + 4 (km/m).

Vận tốc của chiếc thuyền khi ngược dòng là x – 4 km.

Thời gian chiếc thuyền đi từ A đến B là $\dfrac{24}{x+4}$.

Thời gian chiếc thuyền quay về từ B đến C là $\frac{16}{x-4}$.

Thời gian chiếc bè đi được $\frac{8}{4}=2$ (giờ).

Ta có phương trình: $\frac{24}{x+4}+\frac{16}{x-4}=2$ (1).

Biến đổi phương trình: (1) $\Leftrightarrow 12(x-4)+8(x+4)=(x-4)(x+4) \Leftrightarrow x^2-20x=0$

$\Leftrightarrow x(x-20)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=20 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có nghiệm x = 20 thoả mãn. Vậy vận tốc thực của chiếc thuyền là 20km/h.

Câu 4.

1) Vì H là trung điểm của AB nên $OH \perp AB$ hay $\widehat{OHM}=90^0$. Theo tính chất của tiếp tuyến ta lại có $OD \perp DM$ hay $\widehat{ODM}=90^0$. Suy ra các điểm M, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Theo tính chất tiếp tuyến, ta có MC = MD ⇒ ΔMCD cân tại M ⇒ MI là một đường phân giác của $\widehat{CMD}$. Mặt khác I là điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{CD}$ nên $\widehat{DCI}=\frac{1}{2}$

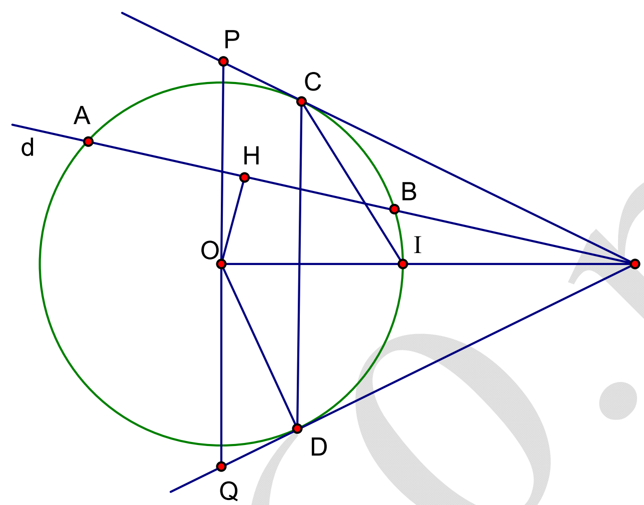
sđ $\overset{\frown}{DI}$ $=\frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{CI}$ $=\widehat{MCI}$

⇒ CI là phân giác của $\widehat{MCD}$. Vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MCD.

3) Ta có tam giác MPQ cân ở M, có MO là đường cao nên diện tích của nó được tính: $S=2S_{OQM}=2.\frac{1}{2}.OD.QM=R(MD+DQ)$. Từ đó S nhỏ nhất ⇔ MD + DQ nhỏ nhất.

Mặt khác, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OMQ ta có $DM.DQ=OD^2=R^2$

không đổi nên MD + DQ nhỏ nhất ⇔ DM = DQ = R. Khi đó OM = $R\sqrt{2}$ hay M là giao điểm của d với đường tròn tâm O bán kính $R\sqrt{2}$.



Câu 5.

Từ giả thiết ta có: $abc(a+b+c)=1$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Côsi,

P = $(a+b)(a+c)$ = $a^2+ab+ac+bc$ = $a(a+b+c)+bc \geq 2\sqrt{a(a+b+c)bc}$ = 2.

Đẳng thức xảy ra ⇔ $\begin{cases} a(a+b+c)=bc \\ a+b+c=\dfrac{1}{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a+b+c)=1 \\ bc=1 \end{cases}$.

Hệ này có vô số nghiệm dương, chẳng hạn ta chọn b = c = 1 ⇒ a = $\sqrt{2}-1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

hoc360.net