

Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1.

$$1) A = (1 - \sqrt{5}) \cdot \frac{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = (1 - \sqrt{5}) \cdot \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} = \frac{1 - 5}{2} = -2.$$

$$2) B = \left(1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{1 + \sqrt{x}}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x}}\right) = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) = 1 - x.$$

Câu 2.

1) Thay $x = 2$ vào vế trái của phương trình ta được:

$$2^2 + (3 - m) \cdot 2 + 2(m - 5) = 4 + 6 - 2m + 2m - 10 = 0 \text{ đúng với mọi } m$$

nên phương trình có nghiệm $x = 2$ với mọi m

2) Vì phương trình luôn có nghiệm $x = 2$ nên để nó có nghiệm $x = 5 - 2\sqrt{2}$ thì theo định lý Vi-et ta có: $2(5 - 2\sqrt{2}) = 2(m - 5) \Leftrightarrow 5 - 2\sqrt{2} = m - 5 \Leftrightarrow m = 10 - 2\sqrt{2}$.

Câu 3.

Gọi x (km/h) là vận tốc dự định của xe, $x > 15$.

Thời gian dự định của xe là $\frac{80}{x}$.

Thời gian xe đi trong một phần tư quãng đường đầu là $\frac{20}{x - 15}$, thời gian xe đi trong

quãng đường còn lại là $\frac{60}{x + 10}$.

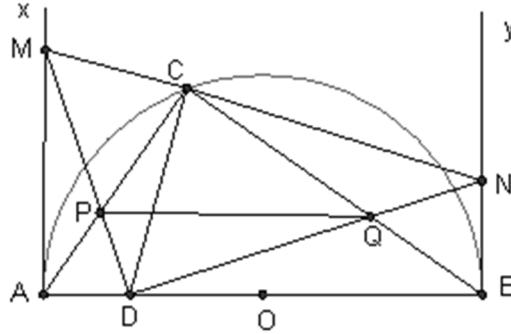
Theo bài ra ta có $\frac{80}{x} = \frac{20}{x - 15} + \frac{60}{x + 10}$ (1).

Biến đổi (1) $\Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{1}{x - 15} + \frac{3}{x + 10} \Leftrightarrow 4(x - 15)(x + 10) = x(4x - 35)$

$\Leftrightarrow 15x = 600 \Leftrightarrow x = 40$ (thỏa mãn điều kiện).

Từ đó thời gian dự định của xe là $\frac{80}{40} = 2$ giờ.

Câu 4.



1) Ta có vì Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn nên $\widehat{MAD} = 90^\circ$. Mặt khác theo giả thiết $\widehat{MCD} = 90^\circ$ nên suy ra tứ giác ADCM nội tiếp.

Tương tự, tứ giác BDCN cũng nội tiếp.

2) Theo câu trên vì các tứ giác ADCM và BDCN nội tiếp nên: $\widehat{DMC} = \widehat{DAC}$, $\widehat{DNC} = \widehat{DBC}$.

Suy ra $\widehat{DMC} + \widehat{DNC} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC} = 90^\circ$. Từ đó $\widehat{MDN} = 90^\circ$.

3) Vì $\widehat{ACB} = \widehat{MDN} = 90^\circ$ nên tứ giác CPDQ nội tiếp. Do đó $\widehat{CPQ} = \widehat{CDQ} = \widehat{CDN}$.

Lại do tứ giác CDBN nội tiếp nên $\widehat{CDN} = \widehat{CBN}$. Hơn nữa ta có $\widehat{CBN} = \widehat{CAB}$, suy ra $\widehat{CPQ} = \widehat{CAB}$ hay PQ song song với AB.

Câu 5.

Với các số dương x, y ta có: $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta, có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} &= a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &\geq a \cdot \frac{4}{b+c} + b \cdot \frac{4}{c+a} + c \cdot \frac{4}{a+b} = 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Lời bình:

Câu II.1

Thay câu II.1 bởi câu : Chứng minh phương trình có nghiệm không phụ thuộc giá trị của m , ta được một bài toán "thông minh hơn".

Biến đổi phương trình về dạng $m(x - 2) = x^2 + 3x - 10$. (1)

Xem (1) là phương trình đối với m . Thế thì (1) có nghiệm không phụ thuộc m khi và chỉ khi $x - 2 = x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy có $x = 2$ là nghiệm cố định không phụ thuộc vào m của phương trình đã cho.

Vấn đề nghiệm cố định còn được bàn thêm ở lời bình sau câu Câu I4b, đề 32.