Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1.

1) A = $\left(\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{80}\right)\sqrt{5} = \left(2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}\right).\sqrt{5}=3\sqrt{5}.\sqrt{5}=15$.

2) Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$ phương trình trở thành $4t^2+7t-2=0$.

Biệt thức $\Delta = 7^2-4.4.(-2)=81$

Phương trình có nghiệm $t_1=\frac{1}{4}$, $t_2=-2$ (loại).

Với $t=\frac{1}{4}$ ta có $x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\frac{1}{2}$.

Câu 2.

1) Ta gọi (d_1), (d_2) lần lượt là các đường thẳng có phương trình $y=-3x+6$ và $y=\frac{5}{2}x-2m+1$. Giao điểm của (d_1) và trục hoành là A(2, 0). Yêu cầu của bài toán được thoả mãn khi và chỉ khi (d_2) cũng đi qua A $\Leftrightarrow$ $0=\frac{5}{2}.2-2m+1 \Leftrightarrow m=3$.

2) Gọi x là chiều rộng của hình chữ nhật (đơn vị m, x > 0)

$\Rightarrow$ chiều dài của hình chữ nhật là x + 7 (m).

Vì đường chéo là 13 (m) nên theo định lý Piatago ta có :

$13^2=x^2+(x+7)^2 \Leftrightarrow 2x^2+14x+49=169$

$\Leftrightarrow x^2+7x-60=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-12 \end{array}\right.$. Chỉ có nghiệm $x=5$ thoả mãn.

Vậy mảnh đất có chiều rộng 5m, chiều dài 12m và diện tích là S = 5.12 = 60 (m^2).

Câu 3.

1) Khi $m=3$ phương trình trở thành $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0;\ x=2$.

2) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow \Delta'=1-(m-3)>0 \Leftrightarrow m<4$.

Khi đó theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2$ (1) và $x_1 x_2 = m - 3$ (2).

Điều kiện bài toán $x_1^2 - 2x_2 + x_1 x_2 = -12 \Leftrightarrow x_1(x_1 + x_2) - 2x_2 = -12$

$\Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 = -12$ (do (1)) $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = -6$ (3).

Từ (1) và (3) ta có: $x_1 = -2, x_2 = 4$. Thay vào (3) ta được: $(-2).4 = m - 3$

$\Leftrightarrow m = -5$, thoả mãn điều kiện.

Vậy $m = -5$.

Câu 4.

1) Ta có $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc nội tiếp) và $\widehat{BDE} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{DB}$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

2) Xét hai tam giác DMB và AMD có: $\widehat{DMA}$ chung, $\widehat{DAM} = \widehat{BDM}$ nên ΔDMB ~ ΔAMD

$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MA}{MD}$ hay $MD^2 = MA.MB$.

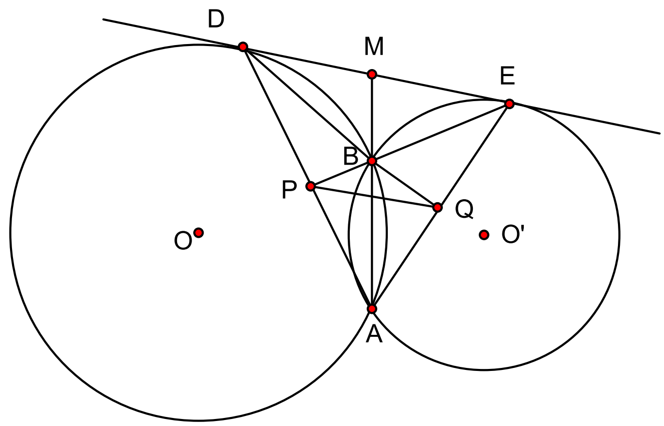
Tương tự ta cũng có: ΔEMB ~ ΔAME $\Rightarrow \frac{ME}{MB} = \frac{MA}{ME}$ hay $ME^2 = MA.MB$.

Từ đó: MD = ME hay M là trung điểm của DE.

3) Ta có $\widehat{DAB} = \widehat{BDM}$, $\widehat{EAB} = \widehat{BEM}$

$\Rightarrow \widehat{PAQ} + \widehat{PBQ} = \widehat{DAB} + \widehat{EAB} + \widehat{PBQ} = \widehat{BDM} + \widehat{BEM} + \widehat{DBE} = 180^0$

$\Rightarrow$ tứ giác APBQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PQB} = \widehat{PAB}$. Kết hợp với $\widehat{PAB} = \widehat{BDM}$ suy ra $\widehat{PQB} = \widehat{BDM}$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên PQ song song với AB.



Câu 5.

Đặt $y = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$.

Khi đó ta có $y(x^2+1) = 4x+3 \Leftrightarrow y.x^2 - 4x + (y-3) = 0$ (1).

Ta tìm điều kiện của y để (1) có nghiệm.

Nếu $y = 0$ thì (1) có nghiệm $x = -\dfrac{4}{3}$.

Nếu $y \neq 0$, (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 2^2 - y(y-3) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 4$.

Kết hợp lại thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 4$.

Theo giả thiết y là số nguyên âm $\Leftrightarrow y = -1$. Khi đó thay vào trên ta có $x = -2$.

Lời bình:

Câu V

1) Từ cách giải bài toán trên ta suy biểu thức $y = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ có GTNN bằng –1 và GTLN bằng 4.

2) Phương pháp giải bài toán trên cũng là phương phương pháp tìm GTNN, GTLN của các biểu thức dạng $P = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (với $b'^2 - 4ac < 0$), chẳng hạn

$P = \dfrac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$***;*** $Q = \dfrac{x^2 - 8xy + 7y^2}{x^2 + y^2}$ ***với*** $x^2 + y^2 > 0$***;***

$F = x^2 + 2xy - y^2$ ***với*** $4x^2 + 2xy + y^2 = 3$.