Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1: a) $\frac{1}{3-\sqrt{7}}-\frac{1}{3+\sqrt{7}}=\frac{\left(3+\sqrt{7}\right)-\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

b) $\Delta = 49 - 4.3 = 37$; phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1=\frac{7+\sqrt{37}}{2};x_2=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$.

Câu 2: a) Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình: $-x+2=x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$. Phương trình này có tổng các hệ số bằng 0 nên có 2 nghiệm là 1 và – 2.

+ Với x = 1 thì y = 1, ta có giao điểm thứ nhất là (1;1)

+ Với x = - 2 thì y = 4, ta có giao điểm thứ hai là (- 2; 4)

Vậy (d) giao với (P) tại 2 điểm có tọa độ là (1;1) và (- 2; 4)

b) Thay x = 2 và y = -1 vào hệ đã cho ta được:

$$\begin{cases}8-a=b\\2+b=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2+b\\8-(2+b)=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}.$$

Thử lại : Thay a = 5 và b = 3 vào hệ đã cho thì hệ có nghiệm duy nhất (2; - 1).

Vậy a = 5; b = 3 thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất (2; - 1).

Câu 3: Gọi x là số toa xe lửa và y là số tấn hàng phải chở

Điều kiện: $x \in N^*$, $y > 0$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases}15x=y-5\\16x=y+3\end{cases}$. Giải ra ta được: x = 8, y = 125 (thỏa mãn)

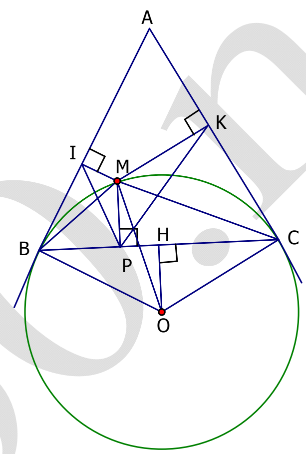
Vậy xe lửa có 8 toa và cần phải chở 125 tấn hàng.

Câu 4:

a) Ta có: $\widehat{AIM} = \widehat{AKM} = 90^0$ (gt), suy ra tứ giác AIMK nội tiếp đường tròn đường kính AM.

b) Tứ giác CPMK có $\widehat{MPC} = \widehat{MKC} = 90^0$ (gt). Do đó CPMK là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPK} = \widehat{MCK}$ (1). Vì KC là tiếp tuyến của (O) nên ta có: $\widehat{MCK} = \widehat{MBC}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MC}$) (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MBC}$ (3)

c)



Chứng minh tương tự câu b ta có BPMI là tứ giác nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{MIP} = \widehat{MBP}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{MPK} = \widehat{MIP}$.

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{MKP} = \widehat{MPI}$.

Suy ra: MPK ~ ΔMIP $\Rightarrow \dfrac{MP}{MK} = \dfrac{MI}{MP}$

$\Rightarrow$ MI.MK = MP^2 $\Rightarrow$ MI.MK.MP = MP^3.

Do đó MI.MK.MP lớn nhất khi và chỉ khi MP lớn nhất (4)

- Gọi H là hình chiếu của O trên BC, suy ra OH là hằng số (do BC cố định).

Lại có: MP + OH $\le$ OM = R $\Rightarrow$ MP $\le$ R – OH. Do đó MP lớn nhất bằng R – OH khi và chỉ khi O, H, M thẳng hàng hay M nằm chính giữa cung nhỏ BC (5). Từ (4) và (5) suy ra max (MI.MK.MP) = (R – OH $)^3$ $\Leftrightarrow$ M nằm chính giữa cung nhỏ BC.

Câu 5: Đặt $\sqrt{x - 2009} = a; \sqrt{y - 2010} = b; \sqrt{z - 2011} = c$

(với a, b, c > 0). Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{a-1}{a^2}+\frac{b-1}{b^2}+\frac{c-1}{c^2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{c}\right)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c=2$$

Suy ra: x = 2013, y = 2014, z = 2015.

Lời bình:

Câu IVc

Lời bình sau Đề số 1 cho thấy: Nếu có $AE.AF.AC = AC^3 \Leftrightarrow AE.AF = AC^2$ thì thường AC là cạnh chung của hai tam giác ΔACE và ΔACF.

Quan sát hình vẽ ta thấy MP là cạnh chung của hai tam giác MPI và MPK, nên ta phán đoán $MI.MK.MP = MP^3$.

Nếu phán đoán ấy là đúng thì GTLN của MI.MK.MP chính là GTLN của MP. Đó là điều dẫn dắt lời giải trên.

Câu IIa

⌧Lời nhắn

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị (d): $y = kx + b$ và (P) : $y = ax^2$ là nghiệm của phương trình $ax^2 = kx + b$ (1). Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hai hàm số trên.

Câu V

1) • Việc đặt a, b, c thay cho các căn thức là cách làm để dễ nhìn bài toán, Với mọi số dương a, b, c ta luôn có

$$\frac{a-1}{a^2}+\frac{b-1}{b^2}+\frac{c-1}{c^2}\le\frac{3}{4}. \quad (1)$$

Thay vì đặt câu hỏi khi nào thì dấu đẳng thức xẩy ra, người ta đặt bài toán giải phương trình

$$\frac{a-1}{a^2}+\frac{b-1}{b^2}+\frac{c-1}{c^2}=\frac{3}{4}. \quad (2)$$

• Vai trò của a, b, c đều bình đẳng nên trong (1) ta nghĩ đến đánh giá $\frac{a-1}{a^2}\le\frac{1}{4}$.

Thật vậy $\frac{a-1}{a^2}\le\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a-1}{a^2}-\frac{1}{4}\le 0 \Leftrightarrow -\frac{(a-2)^2}{a^2}\le 0$. ***Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi a = 2. Tương tự ta cũng có*** $\frac{b-1}{b^2}\le\frac{1}{4}$, $\frac{c-1}{c^2}\le\frac{1}{4}$. ***Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi b = 2, c = 2.***

2) Mỗi giá trị của biến cân bằng bất đẳng thức được gọi là điểm rơi của bất đẳng thức ấy.

Theo đó, bất đẳng thức (1) các biến a, b, c đều có chung một điểm rơi là a = b = c = 2.

Khi vai trò của các biến trong bài toán chứng minh bất đẳng thức bình đẳng với nhau thì các biến ấy có chung một điểm rơi.

Phương trình diễn tả dấu bằng trong bất đẳng thức được gọi là "phương trình điểm rơi".

3) Phương trình (2) thuộc dạng "phương trình điểm rơi"

Tại điểm rơi a = b = c = 2 ta có $\frac{a-1}{a^2}=\frac{b-1}{b^2}=\frac{c-1}{c^2}=\frac{1}{4}$.

Điều đó cắt nghĩa điểm mấu chốt của lời giải là tách $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$:

$$\textit{(2)} \;\; \Leftrightarrow \;\; \left(\frac{a-1}{a^2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{b-1}{b^2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{c-1}{c^2}-\frac{1}{4}\right)=0.$$

4) Phần lớn các phương trình chứa hai biến trở lên trong chương trình THCS đều là "phương trình điểm rơi".