Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1:

Ta có: $A = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{-1} + \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} + ... + \dfrac{\sqrt{24} - \sqrt{25}}{-1}$

$= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + ... + \sqrt{25} \;\; = -1 + 5 = 4$

Câu 2:

a) Từ giả thiết suy ra:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2+b^2+c^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2+b^2+c^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{a^2+b^2+c^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right) = 0 \quad (*)$$

Do $\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} > 0$; $\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} > 0$; $\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} > 0$

Nên từ (*) suy ra x = y = z = 0, do đó M = 0

b) $x^3 = 2a + 3x.\sqrt[3]{a^2 - \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2\left(\dfrac{8a-1}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow \; x^3 = 2a + 3x \,.\, \dfrac{\sqrt[3]{(1-2a)^3}}{3} \;\; \Leftrightarrow \;\; x^3 = 2a + x(1 - 2a)$

$\Leftrightarrow \; x^3 + (2a - 1)\, x - 2a = 0 \; \Leftrightarrow \; (x - 1)\,(x^2 + x + 2a) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 2a = 0 \;\; (\text{vô nghiệm do } a > \frac{1}{8}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$

nên x là một số nguyên dương

Câu 3:

a) Ta có: $\frac{4c}{4c+57} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{35}{35+2b} \geq 2.\sqrt{\frac{35}{(1+a)(2b+35)}} > 0$ (1)

Mặt khác $\frac{1}{1+a} \leq \frac{4c}{4c+57} - \frac{35}{35+2b} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a} - \frac{4c}{4c+57} \leq \frac{35}{35+2b}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+a} - \frac{4c}{4c+57} + 1 \leq 1 - \frac{35}{35+2b} = \frac{2b}{35+2b}$

$\Leftrightarrow \frac{2b}{35+2b} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{57}{4c+57} \geq 2.\sqrt{\frac{57}{(1+a)(4c+57)}} > 0$ (2)

Ta có: $1 - \frac{1}{1+a} \geq 1 - \frac{4c}{4c+57} + \frac{35}{35+2b}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{1+a} \geq \frac{57}{4c+57} + \frac{35}{35+2b} \geq 2.\sqrt{\frac{35\,.\,57}{(4c+57)(35+2b)}} > 0$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\frac{8abc}{(1+a)(4c+57)(2b+35)} \geq 8\,.\,\frac{35\,.\,57}{(1+a)(2b+35)(4c+57)}$$

Do đó abc ≥ 35.57 = 1995.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$, $b = 35$ và $c = \frac{57}{2}$.

Vậy min (abc) = 1995.

b) Đặt $t = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} \Rightarrow A = ta, B = tb, C = tc, D = td.$

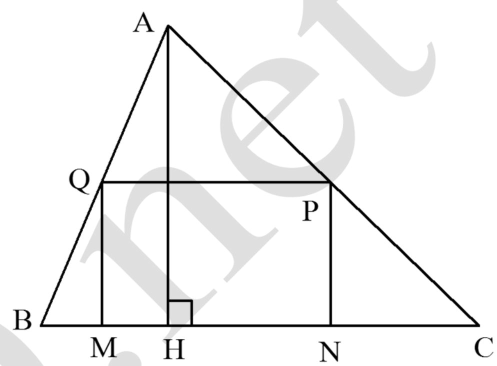
$t = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}$

Vì vậy $\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{a^2t} + \sqrt{b^2t} + \sqrt{c^2t} + \sqrt{d^2t}$

$= (a+b+c+d)\sqrt{t} = (a+b+c+d)\sqrt{\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}}$

$= \sqrt{(a + b + c + d)(A + B + C + D)}$

Câu 4:



a) Xét ΔABC có PQ // BC $\Rightarrow \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{QP}{BC}$

Xét ΔBAH có QM // AH $\Rightarrow \dfrac{BQ}{BA} = \dfrac{QM}{AH}$

Cộng từng vế ta có:

$$\frac{AQ}{AB} + \frac{BQ}{AB} = \frac{QP}{BC} + \frac{QM}{AH} \Rightarrow 1 = \frac{QP}{BC} + \frac{QM}{AH}$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{QP}{BC} + \frac{QM}{AH}\right)^2 \geq 4\frac{QP}{BC} \cdot \frac{QM}{AH} = \frac{2S_{MNPQ}}{S_{ABC}}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{S_{ABC}}{2}.$$

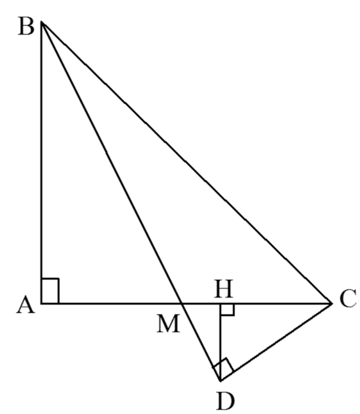
$$\max S_{MNPQ} = \frac{S_{ABC}}{2} \text{ khi } \frac{QP}{BC} = \frac{QM}{AH} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow QP = \frac{BC}{2}$$

Tức là khi PQ là đường trung bình của ΔABC, khi đó PQ đi qua trung điểm AH.

b) Vì $1 = \dfrac{QP}{BC} + \dfrac{QM}{AH}$ mà BC = AH $\Rightarrow 1 = \dfrac{QP + QM}{BC} \Leftrightarrow QP + QM = BC$

Do đó chu vi (MNPQ) = 2BC (không đổi)

Câu 5:



ΔHCD đồng dạng với Δ ABM (g.g) mà

AB = 2AM nên HC = 2HD.

Đặt HD = x thì HC = 2x. Ta có:

$DH^2 = HM . HC$ hay $x^2 = HM . 2x$

$\Rightarrow HM = 0,5x$; $MC = 2,5x$; $AM = 2,5x$; $AH = 3x$.

Vậy AH = 3HD.