Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: 1) Trừ vào 2 vế của phương trình với $2x \cdot \frac{9x}{x+9}$

Ta có: $\left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 = 40 - \frac{18x^2}{x+9} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} - 40 = 0$ (1)

Đặt $\frac{x^2}{x+9} = y$ (2), phương trình (1) trở thành $y^2 + 18y - 40 = 0$

$\Leftrightarrow (y + 20)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow y = -20 ; y = 2$

Thay vào (2), ta có $\left[\begin{array}{l} x^2 = -20(x+9) \\ x^2 = 2(x+9) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+20x+180=0 & (3) \\ x^2 - 2x - 18 = 0 & (4) \end{array}\right.$

Phương trình (3) vô nghiệm, phương trình (4) có 2 nghiệm là: $x = 1 \pm \sqrt{19}$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 1 \pm \sqrt{19}$.

2) . Điều kiện $\frac{x+1}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$ (*)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4$

Đặt $t = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \Rightarrow t^2 = (x-3)(x+1)$

Phương trình trở thành: $t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = -4$

Ta có: $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 1$ (1) ; $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -4$ (2)

$+ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5}$. (t/m (*))

$+ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(x+1) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - 2\sqrt{5}$. (t/m (*))

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 1 + \sqrt{5}$; $x = 1 - 2\sqrt{5}$.

Câu 2:

1) Điều kiện: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow 2 - 3x > 0 \Rightarrow A \geq 0$

Vậy $A^2 = \dfrac{25 - 30x + 9x^2}{1 - x^2} = \dfrac{(3 - 5x)^2}{1 - x^2} + 16 \geq 16$.

Dấu bằng xảy ra khi $3 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{5}$

Vậy $\min A = 4$.

2) Chứng minh: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}\,(a + b + c)$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức: $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$, ta có:

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Rightarrow \sqrt{2}.\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b$ (2)

Tương tự, ta được: $\sqrt{2}.\sqrt{b^2 + c^2} \geq b + c$ (3) và

$\sqrt{2}.\sqrt{c^2 + a^2} \geq c + a$ (4)

Lấy (2) + (3) + (4) theo từng vế và rút gọn, suy ra (1) đúng, đpcm.

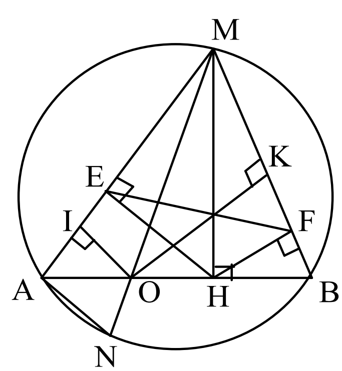
Câu 3:

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_y = x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2;\ x \geq 2$ (3)

(2) $\Leftrightarrow (y+1)^2 = -x^2 - 2x$ có nghiệm $\Leftrightarrow -x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$ (4)

Từ (3), (4) ta có: x = - 2, từ đó ta có y = - 1. Vậy hệ có nghiệm (- 2 ; - 1).

Câu 4:



Kẻ MP // BD ($P \in AD$)

MD cắt AC tại K. Nối NP cắt BD tại H.

Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AP}{AD}$ mà $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{CM}{CD}$ (gt)

$\Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{CN}{CD} \Rightarrow PN // AC$ Gọi O là giao điểm

của AC và BD. Ta có $\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA}$, $\frac{MK}{PK} = \frac{OC}{OA}$

và $\frac{NH}{PH} = \frac{OC}{OA}$. Suy ra: $\frac{NH}{PH} = \frac{MK}{PK} \Rightarrow KH // MN$

Các tứ giác KENH, MFHK là hình bình hành nên MF = KH và EN = KH $\Rightarrow$ MF = EN $\Rightarrow$ ME = NF

Câu 5:

1) Tứ giác MEHF nội tiếpvì $\widehat{MEH} + \widehat{MFH} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{EHF} = \widehat{EHA} + \widehat{FHB}$ (1)

Ta có $\widehat{MHF} = \widehat{MEF}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{MF}$)

Lại có $\widehat{MHF} + \widehat{FHB} = 90^0 = \widehat{MEF} + \widehat{EMD}$

$\Rightarrow \widehat{FHB} = \widehat{EMD}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{DMB}$, Gọi N là giao điểm của MD với đường tròn (O) ta có $\widehat{DMB} = \widehat{NAB}$ (góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{NB}$) $\Rightarrow \widehat{EHA} = \widehat{NAB}$ do đó AN // EH mà HE $\perp$ MA nên NA $\perp$ MA. hay $\widehat{MAN} = 90^0 \Rightarrow$ AN là đường kính của đường tròn. Vậy MD đi qua O cố định.

2) Kẻ DI $\perp$ MA, DK $\perp$ MB, ta có

$\frac{AH}{BD} = \frac{S_{MAD}}{S_{MBD}} = \frac{AM \cdot HE}{BM \cdot DK}$; $\frac{AD}{BH} = \frac{S_{MAD}}{S_{MBH}} = \frac{AM \cdot DI}{BM \cdot HF}$

Vậy $\frac{AH}{BD} \cdot \frac{AD}{BH} = \frac{MA^2}{MB^2} \cdot \frac{HE \cdot DI}{DK \cdot HF}$ (1)

Ta có $\widehat{HMB} = \widehat{FHB}$ (cùng phụ với $\widehat{MHF}$) mà $\widehat{FHB} = \widehat{EMD}$ (CMT)

$\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{DIK}$ và $\widehat{EHF} = \widehat{DMH}$.

Tứ giác MEHF nội tiếp nên $\widehat{AMH} = \widehat{EFH}$ và $\widehat{EHF} = 180^0 - \widehat{AMB}$

Tứ giác MIDK nội tiếp nên $\widehat{DMB} = \widehat{DIK}$ và $\widehat{IDK} = 180^0 - \widehat{AMB}$

$\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{DIK}$ và $\widehat{EHF} = \widehat{IDK} \Rightarrow \Delta DIK \quad \Delta HFE$ (g.g) do đó

suy ra $\dfrac{ID}{HF} = \dfrac{DK}{HE} \Rightarrow ID \,.\, HE = DK \,.\, HF \Rightarrow \dfrac{HE.DI}{DK.HF} = 1$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{MA^2}{MB^2} = \dfrac{AH}{BD} \cdot \dfrac{AD}{BH}$.