Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1:

a) Từ $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 2xy = (x + y)^2 - 4 = (x + y + 2)(x + y - 2)$

Vì $x + y + 2 \neq 0$ nên $\dfrac{xy}{x+y+2} = \dfrac{x+y}{2} - 1$ (1)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski, ta có:

$x + y \le \sqrt{2\left(x^2 + y^2\right)} \Rightarrow x + y \le 2\sqrt{2}$ (2)

Từ (1), (2) ta được: $\dfrac{xy}{x+y+2} \le \sqrt{2} - 1$. Dấu "=" khi $\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0 \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$.

Vậy $\max A = \sqrt{2} - 1$.

b) Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ nên:

$$\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2}{y^2+z^2} + \frac{2}{z^2+x^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{z^2+x^2}$$

$$= \frac{z^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + 3$$

Ta có $x^2 + y^2 \ge 2xy \Rightarrow \dfrac{z^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{z^2}{2xy}$,

Tương tự $\dfrac{x^2}{y^2+z^2} \le \dfrac{x^2}{2yz}$, $\dfrac{y^2}{x^2+z^2} \le \dfrac{y^2}{2xz}$

Vậy $\dfrac{z^2}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2}{y^2+z^2} + \dfrac{y^2}{x^2+z^2} + 3 \le \dfrac{z^2}{2xy} + \dfrac{x^2}{2yz} + \dfrac{y^2}{2xz} + 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{x^2+y^2} + \dfrac{2}{y^2+z^2} + \dfrac{2}{z^2+x^2} \le \dfrac{x^3+y^3+z^3}{2xyz} + 3$, đpcm.

Câu 2:

a) $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$ (1) .Điều kiện: $x \ge -\frac{10}{3}$ (2)

(1) $\Leftrightarrow$ $(3x + 10 - 2\sqrt{3x+10} + 1) + (x^2 + 6x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+10} - 1)^2 + (x + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+10} - 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$ (thỏa mãn đk (2).

Vậy phương trình (1) có nghiệm x = -3.

b) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{2x}{x^2+1} & (1) \\ y^3 = -2(x-1)^2 - 1 \end{cases}$

Ta có: $\frac{2x}{1+x^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le y \le 1$ (1)

Mặt khác: $-2(x-1)^2 - 1 \le -1 \Rightarrow y^3 \le -1 \Rightarrow y \le -1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow y = -1$ nên $x = 1$. Thay vào hệ đã cho thử lại thì thỏa mãn.

Vậy $x = 1$ và y = -1 là các số cần tìm.

Câu 3:

a) Đặt $\sqrt[3]{x} = \sqrt{b} > 0$ và $\sqrt[3]{y} = \sqrt{c} > 0$ ta có $x^2 = b^3$ và $y^2 = c^3$

Thay vào gt ta được $\sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2} = a$

$\Rightarrow a^2 = b^3 + b^2c + c^3 + bc^2 + 2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2}$

$a^2 = (b + c)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = b + c$ hay $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, đpcm.

b) Giả sử x_0 là một nghiệm của phương trình, dễ thấy $x_0 \ne 0$.

Suy ra $x_0^2 + ax_0 + b + \frac{a}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + a\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) + b = 0$

Đặt $x_0 + \frac{1}{x_0} = y_0 \Rightarrow x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = y_0^2 - 2$, $|y_0| \geq 2 \Rightarrow y_0^2 - 2 = -ay_0 - b$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có:

$$\left(y_0^2 - 2\right)^2 = \left(ay_0 + b\right)^2 \leq \left(a^2 + b^2\right)\left(y_0^2 + 1\right) \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(y_0^2 - 2)^2}{y_0^2 + 1} \quad (1)$$

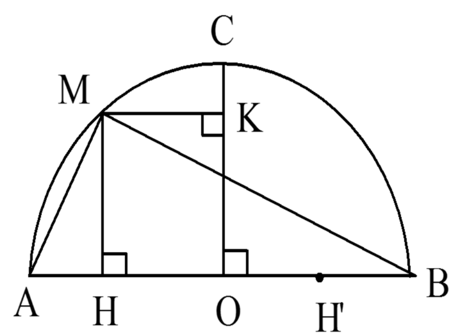
Ta chứng minh $\frac{(y_0^2 - 2)^2}{y_0^2 + 1} \geq \frac{4}{5}$ (2)

Thực vậy: (2) $\Leftrightarrow 5(y_0^4 - 4y_0^2 + 4) \geq 4(y_0^2 + 1) \Leftrightarrow 5y_0^4 - 24y_0^2 + 16 \geq 0$

$\Leftrightarrow 5(y_0^2 - 4)(y_0^2 - \frac{4}{5}) \geq 0$ đúng với $|y| \geq 2$ nên (1) đúng

Từ (1), (2) suy ra $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5} \Rightarrow 5(a^2 + b^2) \geq 4$, đpcm.

Câu 4:



Đặt AH = x

Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ (OA = OB = OM)

Trong Δ vuông AMB ta có $MA^2 = AH \cdot AB = 2Rx$

(H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC)

Mặt khác: $MK^2 = OH^2 = (R - x)^2$ (vì MKOH là hình chữ nhật).

Theo bài ra ta có: $4Rx = 15(R - x)^2$.

Do H $\in$ AB $\Rightarrow$ $O \leq x \leq 2R$

Phương trình trở thành: $15x^2 - 34Rx + 15R^2 = 0$

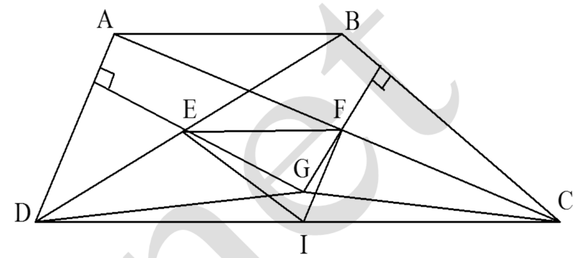
$\Leftrightarrow (5x - 3R)(3x - 5R) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3R}{5}; x = \frac{5R}{3}$.

Cả 2 giá trị này đều thoả mãn

Vậy ta tìm được 2 điểm H và H' $\Rightarrow$ 2 điểm M và M' là giao điểm của nửa đường tròn với các đường vuông góc với AB dựng từ H và H'.

Câu 5:

Gọi I là trung điểm của CD.



Nối EF, EI, IF, ta có IE là đường trung bình của $\Delta BDC \Rightarrow IE \parallel BC$

Mà $GF \perp BC \Rightarrow IE \perp GF$ (1)

Chứng minh tương tự $EG \perp IF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ G là trực tâm của ΔEIF

$\Rightarrow IG \perp EF$ (3)

Dễ chứng minh $EF \parallel DC$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow IG \perp DC$

Vậy Δ DGC cân tại G $\Rightarrow$ DG = GC