Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1:

a) Từ giả thiết ta có:

$$\frac{a}{b-c}=\frac{b}{a-c}-\frac{c}{a-b}=\frac{ab-b^2-ac+c^2}{(a-b)(a-c)}$$

Nhân 2 vế của đẳng thức với $\frac{1}{b-c}$ ta có: $\frac{a}{(b-c)^2}=\frac{ab-b^2-ac+c^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

Vai trò của a, b, c như nhau, thực hiện hoán vị vòng quanh giữa a, b, c ta có:

$$\frac{b}{(c-a)^2}=\frac{cb-c^2-ab+a^2}{(a-b)(a-c)(b-c)},\quad \frac{c}{(a-b)^2}=\frac{ac-a^2-bc+b^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên, ta có $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$ (đpcm)

b) Đặt $\sqrt[4]{2010}=x \Rightarrow \sqrt{2010}=x^2$; $2010=x^4$. Thay vào ta có:

$$A=\left(\frac{x^2-x}{1-x}+\frac{1+x^2}{x}\right)^2-\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{1+x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{1+x^2}$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$$

Câu 2:

a) Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên a, b, c > 0

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$a^2+bc\ge 2a\sqrt{bc}$, $b^2+ac\ge 2b\sqrt{ac}$; $c^2+ab\ge 2c\sqrt{ab}$.

Do đó $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}+\frac{1}{b\sqrt{ac}}+\frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{abc} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}}{abc} = \frac{a+b+c}{2abc}\text{, đpcm.}$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi a = b = c, tức là tam giác đã cho là tam giác đều.

b) Điều kiện $x \ge 0; y \ge 0$

Ta có: $A = (x - 2\sqrt{xy} + y) + 2y - 2\sqrt{x} + 1$

$$= [\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) + 1] - 2\sqrt{y} + 2y$$

$$= \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}-1\right)^2 + (2y - 2\sqrt{y} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}-1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{y}-1\right)^2 - \frac{1}{2} \ge -\frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}-1=0\\ 2\sqrt{y}-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{9}{4}\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Vậy $\min A = -\frac{1}{2}$

Câu 3:

a) Điều kiện : $1 \le x \le 5$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski ta có:

$$\left(2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x}\right)^2 \le \left(2^2+3^2\right)\left(x-1+5-x\right) = 13.4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt{5-x} \le 2\sqrt{13}$$

Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $3\sqrt{x-1} = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = \frac{29}{13}$

Thay vào pt đã cho thử lại thì thỏa mãn..

Vậy pt có nghiệm $x = \frac{29}{13}$

b) Xét đẳng thức: $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \quad \forall x \neq 0 \quad (1)$

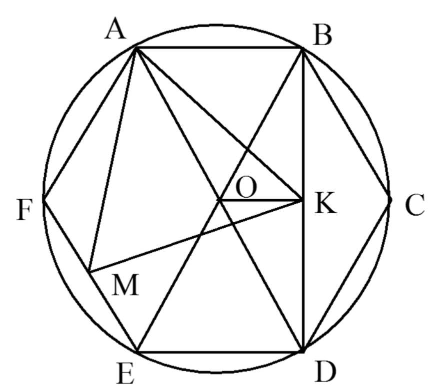
Thay x = 2 vào (1) ta có: $f(2) + 3.f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào (1) ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3.f(2) = \frac{1}{4}$

Đặt $f(2) = a$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = b$ ta có. $\begin{cases} a + 3b = 4 \\ 3a + b = \frac{1}{4} \end{cases}$. Giải hệ, ta được $a = -\frac{13}{32}$

Vậy $f(2) = -\frac{13}{32}$.

Câu 4:



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp lục giác đều thì A, O, D thẳng hàng và $OK = \frac{1}{2}AB$. Vì $FM = \frac{1}{2}EF$ mà EF = AB do đó FM = OK

Ta lại có AF = R $\Rightarrow$ AF = OA và $\widehat{AFM} = 120^0$.

$\widehat{AOK} + \widehat{AOB} = 180^0 = \widehat{AOK} + 60^0 \Rightarrow \widehat{AOK} = 120^0$. Do đó:

$\Delta AFM = \Delta AOK$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AK, \ \widehat{MAK} = 60^0 \Rightarrow \Delta AMK$ đều.

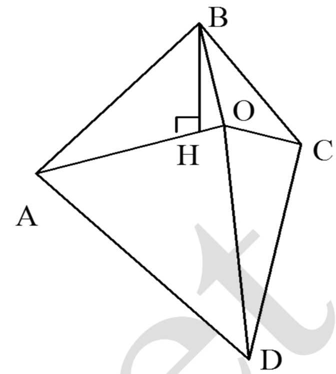
Câu 5:

Gọi BH là đường cao của ΔABO

Ta có $2S_{AOB} = OA . BH$

Nhưng $BH \leq BO$ nên $2S_{AOB} \leq OA . OB$

mà OA.OB $\le \dfrac{OA^2 + OB^2}{2}$



Do đó $2S_{AOB} \le \dfrac{OA^2 + OB^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ OA $\perp$ OB và OA = OB

Chứng minh tương tự ta có:

$2S_{BOC} \le \dfrac{OB^2 + OC^2}{2}$; $2S_{COD} \le \dfrac{OC^2 + OD^2}{2}$

$2S_{AOD} \le \dfrac{OD^2 + OA^2}{2}$

Vậy $2S = 2(S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}) \le \dfrac{2\left(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2\right)}{2}$

Hay $2S \le OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi OA = OB = OC = OD

và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = 90^0 \Rightarrow ABCD$ là hình vuông tâm O.

Lời bình:

Câu III.b

1) Chắc chắn bạn sẽ hỏi $x = \dfrac{1}{2}$ từ đâu mà ra?

Gọi A(x), B(x), P(x), Q(x), C(x) là các đa thức của biến x và f(x) là hàm số được xác định bởi phương trình

$$A(x).f[P(x)] + B(x).f[Q(x)] = C(x) \qquad (1)$$

Để tình giá trị của hàm số f(x) tại điểm x = a ta làm như sau

Bước 1: Giải phương trình Q(x) = P(a) . (2)

Giả sử x = b là một nghiệm của (2).

Bước 2: Thay x = a, x = b vào phương trình (1), và đặt x = f(a), y = f(b). ta có hệ

$$\begin{cases} A(a)x + B(a)y = C(a) \\ B(b)x + A(b)y = C(b) \end{cases} \quad (3)$$

Giải hệ phương trình (3) (đó là hệ phương trình bậc nhất đối với hai ẩn x, y) .

- ***Trong bài toán trên: A(x) = 1, B(x) = 3, P(x) = x, Q(x) =*** $\frac{1}{x}$***, C(x) =*** x^2***, a = 2.***

Phương trình Q(x) = P(a) $\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$***, tức là*** $b = \frac{1}{2}$

Số $x = \frac{1}{2}$ ***được nghĩ ra như thế đó.***

2) Chú ý: Không cần biết phương trình (2) có bao nhiêu nghiệm. Chỉ cần biết (có thể là đoán) được một nghiệm của nó là đủ cho lời giải thành công.

3) Một số bài tập tương tự

a) Tính giá trị của hàm số f(x) tại x = 1 nếu f(x) + 3.f(–x) = 2 + 3x. (với x $\in \mathbb{R}$***).***

b) Tính giá trị của hàm số f(x) tại x = 3 nếu $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ ***(với 0 ≠ x ≠ 1).***

c) Tính giá trị của hàm số f(x) tại x = 2 nếu $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$ ***(với 0 ≠ x ≠ 1).***