Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1:

a) Theo bài ra ta có:

$\sqrt{2011}(x+y-2011)=\sqrt{2010}(y-x+2010)$

+ Nếu x + y - 2011 = 0 thì y - x + 2010 = 0 $\Rightarrow \begin{cases} x-y=2010 \\ x+y=2011 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4021 \\ 2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2010,5 \\ y=0,5 \end{cases}$

+ Nếu y - x + 2010 = 0 thì x + y - 2011 = 0, ta cũng được kết quả như trên.

+ Nếu x + y - 2011 $\neq 0$ thì $\sqrt{\frac{2011}{2010}}=\frac{y-x+2010}{x+y-2011}$ vô lý (vì VP là số hữu tỉ, VT là số vô tỉ)

Vậy x = 2010,5 và y = 0,5 là cặp số duy nhất thoả mãn đề bài.

b) Ta có xy (z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + (z + 1) = 2012

<=> (z + 1)(xy + y + x + 1) = 2012

<=> (z + 1)[x(y + 1)+(y + 1)] = 2012

<=> (x + 1)(y + 1)(z + 1) = 1.2.2.503 = 503.4.1 . Chỉ có 3 bộ sau thoả mãn:

x = 502, y = 1, z = 1 hoặc x = 1005, y = 1, z = 0 hoặc x = 2011, y = 0, z = 0.

Câu 2:

a) Điều kiện: $x \geq -1$

Đặt a = $\sqrt{x+1}$; b = $\sqrt{x^2-x+1}$

Ta có: $2(a^2 + b^2) = 5ab$ <=> (2a - b)(2b - a) = 0 <=> b = 2a ; a = 2b

Do đó: 1) $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$ <=> $4(x + 1) = x^2 - x + 1$

<=> $x^2 - 5x - 3 = 0$ <=> $x_1 = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$ (loại); $x_2 = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$

2) $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x+1=4(x^2-x+1) \Leftrightarrow 4x^2-5x+3=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$

b) Vì a, b, c $\in$ [0; 2] nên: (2 - a)(2 - b)(2 - c) $\geq$ 0

<=> 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc $\geq$ 0

<=> 2(ab + bc + ca) $\geq$ 4(a + b + c) - 8 + abc

nên 2(ab + bc + ca) $\geq$ 4 (vì a + b + c = 3 và abc $\geq$ 0)

Suy ra $(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4$

<=> $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$ (vì $(a + b + c)^2 = 9$)

Dấu "=" xẩy ra khi một trong 3 số a, b, c có một số bằng 2, một số bằng 0 và một số bằng 1.

Câu 3:

Giả sử $x = \frac{p}{q}$ (p, q $\in$ Z, q > 0) và (p, q) = 1

Ta có $\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + 6 = n^2$ (n $\in$ N) <=> $p^2 = q(-P - 6q + n^2q)$

=> q là ước của p^2 nhưng (p, q) = 1 => q = 1 lúc đó x = p

=> $p^2 + p + 6 = n^2$ (p, n $\in$ Z)

<=> $(2p + 1)^2 + 23 = 4n^2$ <=> $(2n)^2 - (2p + 1)^2 = 23$

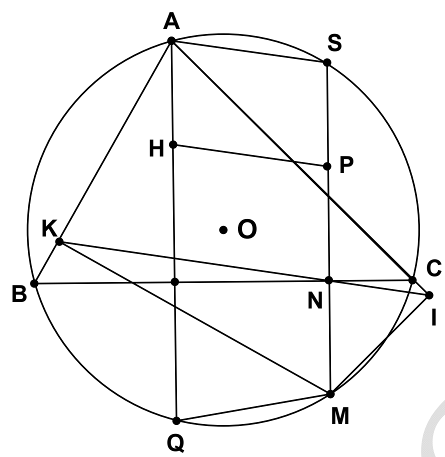
<=> (2n - 2p - 1)(2n + 2p + 1) = 23

Do đó 2n - 2p - 1 = 1 và 2n + 2p + 1 = 23 ; 2n - 2p - 1 = 23 và 2n + 2p + 1 = 1

(vì 23 $\in$ P và 2n + 2p + 1 > 0 và 2n - 2p - 1 > 0) <=> p = 5 (t/m) ; p = - 6 (t/m)

Vậy số hữu tỉ x cần tìm là 5 hoặc – 6

Câu 4:



a) Tứ giác MNKB nội tiếp được (vì $\widehat{K}+\widehat{N}$ = 180^0). Tứ giác MNCI cũng nội tiếp được (vì $\widehat{MNC}=\widehat{MIC}$ MNC = 90^0)

=> $\widehat{BNK}=\widehat{BMK}$, $\widehat{INC}=\widehat{IMC}$ (1)

(vì 2 góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Mặt khác $\widehat{BMK}=\widehat{IMC}$ (2)

(vì $\widehat{BMK}+\widehat{KMC}=\widehat{KMC}+\widehat{IMC}$ do cùng bù với góc A của tam giác ABC)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{BNK}=\widehat{INC}$ nên 3 điểm

K, N, I thẳng hàng.

b) Vì $\widehat{MAK}=\widehat{MCN}=\beta$ (vì 2 góc nội tiếpcùng chắn cung BM)

=> $\frac{AK}{MK}=\frac{CN}{MN}=\cot g\beta$ => $\frac{AB-BK}{MK}=\frac{CN}{MN}$ hay $\frac{AB}{MK}-\frac{BK}{MK}=\frac{CN}{MN}$ (1)

Tương tự có: $\frac{AI}{MI}=\frac{BN}{MN}$ hay $\frac{AC}{MI}+\frac{CI}{MI}=\frac{BN}{MN}$ (2)

Mà $\frac{IC}{MI}=\frac{BK}{MK}=tg\alpha$ (α = $\widehat{BMK}=\widehat{IMC}$) (3)

Từ (1), (2), (3) => $\frac{AB}{MK}+\frac{AC}{MI}=\frac{BC}{MN}$ (đpcm)

c) Gọi giao của AH, MN với đường tròn (O) thứ tự là Q, S => AQMS là hình thang cân (vì AQ // MS => AS = QM). Vẽ HP // AS (P $\in$ MS)

=> HQMP là hình thang cân, có BN là trục đối xứng (vì Q và H đối xứng qua BC)

=> N là trung điểm của PM mà HP // KN (vì KN // AS do $\widehat{SAC} = \widehat{AIN}$ vì cùng bằng $\widehat{NMC}$) => KN đi qua trung điểm của HM (đpcm).

Câu 5:

Đưa về bài toán tìm P để hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = p \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 4 \end{cases}$ có nghiệm.

Hệ trên $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 4xy - 4y^2 = 4p & (1) \\ px^2 + 2pxy + 3py^2 = 4p & (2) \end{cases}$. Lấy (1) - (2), ta có:

$(8 - p)x^2 - 2y(2 + p)x - (4 + 3p)y^2 = 0$ (3)

- Nếu y = 0 => $(8 - p)x^2 = 0$ <=> x = 0 hoặc p = 8 $\Rightarrow p = 0; p = 8$.

- Nếu y $\neq$ 0 chia 2 vế pt (3) cho y^2 ta có :

$(8 - p)t^2 - 2(2 + p)t - (4 + 3p) = 0$ (4) với $t = \frac{x}{y}$.

+ Nếu p = 8 thì $t = -\frac{7}{5}$.

+ Nếu p $\neq$ 8: Phương trình (2) có nghiệm <=> $\Delta' = (2 + p)^2 + (8 - p)(4 + 3p) \geq 0$

<=> $p^2 - 12p - 18 \leq 0$ <=> $6 - 3\sqrt{6} \leq p \leq 6 + 3\sqrt{6}$. Dấu "=" có xảy ra.

Vậy min P = $6 - 3\sqrt{6}$, max P = $6 + 3\sqrt{6}$.