Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1:

a) Đặt $x - \frac{2}{x} = t$ (1), suy ra $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$.

Lần lượt thay các giá trị của t vào (1) thì phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$; $x_4 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

b) Đk: $x \geq -2$ (1)

Đặt $\sqrt{x+5} = a$; $\sqrt{x+2} = b$ $(a \geq 0; b \geq 0)$ (2)

Ta có: $a^2 - b^2 = 3$; $\sqrt{x^2 + 7x + 10} = \sqrt{(x+5)(x+2)} = ab$

Thay vào phương trình đã cho ta được:

$(a - b)(1 + ab) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(1 - a)(1 - b) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 0 \\ 1 - a = 0 \\ 1 - b = 0 \end{array}\right.$ nên $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = \sqrt{x+2} \text{ (VN)} \\ \sqrt{x+5} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Đối chiếu với (1) suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 2:

a) Đặt $\begin{cases} x = \frac{a}{b^3} \\ y = \frac{b}{c^3} \\ z = \frac{c}{a^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{b^3}{a} \\ \frac{1}{y} = \frac{c^3}{b} \\ \frac{1}{z} = \frac{a^3}{c} \end{cases}$, khi đó do abc = 1 nên xyz = 1 (1).

Từ đề bài suy ra $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \Rightarrow x + y + z = yz + xz + xy$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $xyz + (x + y + z) – (xy + yz + zx) – 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x – 1)(y – 1)(z – 1) = 0$.

Vậy tồn tại x =1 chẳng hạn, suy ra $a = b^3$, đpcm.

b) Đặt $\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}=a;\ \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}=b \Rightarrow x = a + b;\ a^3 + b^3 = 2;\ ab = -\frac{1}{3}$.

Ta có: $x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

Suy ra: $x^3 = 2 – x \Leftrightarrow x^3 + x – 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2+x+2)=0$

$\Leftrightarrow x = 1$. Vì $x^2 + x + 2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3:

Áp dụng các BĐT:

$a+b \le \sqrt{2(a^2+b^2)}$; $a + b + c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$

(được suy ra từ bất đẳng thức Bunhiacôpski)

Ta có:

$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2x} \le \sqrt{2(1+x^2+2x)}=\sqrt{2}(x+1)$

$\sqrt{1+y^2}+\sqrt{2y} \le \sqrt{2(1+y^2+2y)}=\sqrt{2}(y+1)$

$\sqrt{1+z^2}+\sqrt{2z} \le \sqrt{2(1+z^2+2z)}=\sqrt{2}(z+1)$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \le \sqrt{3(x+y+z)}$

Lại có: $A = \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}+\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}$

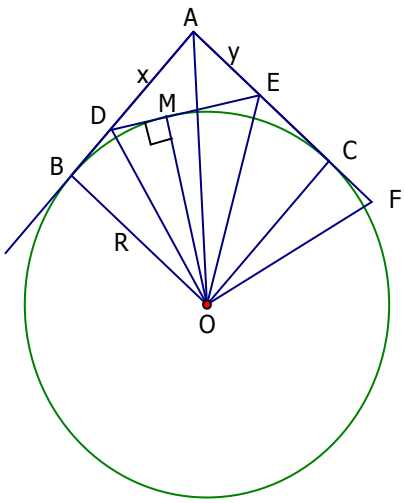
$+ \left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$

$\Rightarrow A \le \sqrt{2}(x+y+z+3)+\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{3(x+y+z)}$

$\Rightarrow A \le 6+3\sqrt{2}$ (do $x + y + z \le 3$). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy maxA = $6+3\sqrt{2}$.

Câu 4:



a) Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến) (1)

AB = AC $= \sqrt{OA^2 - OB^2}$ = R = OB = OC (2).

Từ (1) và (2) suy ra ABOC là hình vuông.

b) Theo bài ra ta có: $AD + DE + AE = 2R$ (3).

Suy ra: DE = BD + CE (4).

Vẽ $OM \perp DE$ ($M \in DE$) (5)

Trên tia đối của tia CA lấy điểm F sao cho CF = BD;

suy ra $\Delta BDO = \Delta COF$ (c-g-c)

$\Rightarrow$ OD = OF; lại có DE = FE nên $\Delta ODE = \Delta OFE$ (c-c-c) $\Rightarrow OM = OC = R$

(hai đường cao tương ứng) (6). Từ (5) và (6) suy ra DE là tiếp tuyến của đường tròn (O;R).

c) Đặt: AD = x; AE = y $\Rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2}xy$ (x, y > 0)

Ta có: $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (định lí Pitago).

Vì AD + DE + AE = 2R $\Rightarrow x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2R$ (6)

Áp dụng BĐT – Côsi cho hai số không âm ta có:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ và $\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}$ (7).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = y.

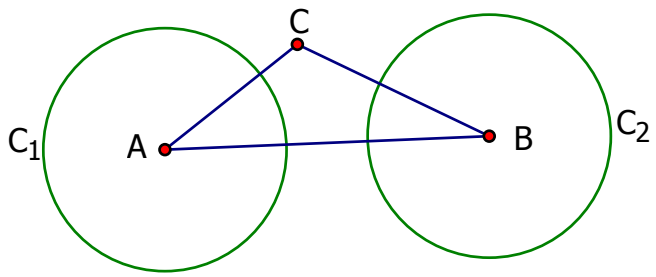
Từ (6) và (7) suy ra: $2\sqrt{xy} + \sqrt{2xy} \leq 2R \Leftrightarrow \sqrt{xy}\left(2 + \sqrt{2}\right) \leq 2R$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{2R}{\left(2+\sqrt{2}\right)} \Leftrightarrow xy \leq \frac{2R^2}{3+2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ADE} \leq \frac{R^2}{3+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow S_{ADE} \leq \left(3 - 2\sqrt{2}\right)R^2.$$

Vậy max $S_{ADE} = \left(3-2\sqrt{2}\right)R^2 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \Delta ADE$ cân tại A.

Câu 5:

Xét điểm A và hình tròn (C_1) có tâm A, bán kính bằng 1.



- Nếu tất cả 98 điểm còn lại đều nằm trong (C_1) thì hiển nhiên bài toán được chứng minh.

- Xét trường hợp có điểm B nằm ngoài (C_1).

Ta có: AB > 1 (1)

Vẽ hình tròn (C_2) tâm B, bán kính bằng 1.

+ Giả sử C là một điểm bất kì khác A và B. Khi đó điểm C thuộc một trong hai hình tròn

(C_1) và (C_2). Thật vậy, giả sử C không thuộc hai hình tròn nói trên.

Suy ra: AC > 1 và BC > 1 (2)

Từ (1) và (2) suy ra bộ 3 điểm A, B, C không có hai điểm nào có khoảng cách nhỏ hơn 1 (vô lí vì trái với giả thiết).

Chứng tỏ $C \in (C_1)$ hoặc $C \in (C_2)$. Như vậy 99 điểm đã cho đều thuộc (C_1) và (C_2).

Mặt khác 99 = 49.2 + 1 nên theo nguyên tắc Dirichle ắt phải có một hình tròn chứa không ít hơn 50 điểm.