

Đáp án và hướng dẫn giải

Câu 1: a) Ta có: $a + b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

$$a \cdot b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1. \text{ Suy ra } P = 3.$$

$$b) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu 2:

$$\begin{aligned} a) P &= \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x - 1}{x} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Với } x > 0, x \neq 1 \text{ thì } \frac{x - 1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x - 1) > x \Leftrightarrow x > 2.$$

$$\text{Vậy với } x > 2 \text{ thì } P > \frac{1}{2}.$$

Câu 3: a) Với $m = 6$, ta có phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1. \text{ Suy ra phương trình có hai nghiệm: } x_1 = 3; x_2 = 2.$$

$$b) \text{ Ta có: } \Delta = 25 - 4 \cdot m$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4} (*)$$

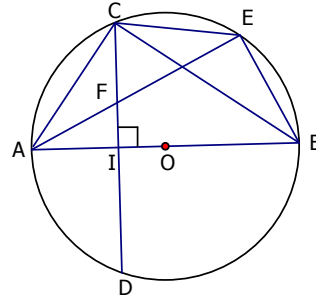
Theo hệ thức Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = 5$ (1); $x_1 x_2 = m$ (2).

Mặt khác theo bài ra thì $|x_1 - x_2| = 3$ (3). Từ (1) và (3) suy ra $x_1 = 4; x_2 = 1$ hoặc $x_1 = 1; x_2 = 4$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: $m = 4$. Thử lại thì thỏa mãn.

Câu 4:

a) Tứ giác BEFI có: $\widehat{BIF} = 90^\circ$ (gt) (gt)
 $\widehat{BEF} = \widehat{BEA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
 Suy ra tứ giác BEFI nội tiếp đường tròn đường kính BF



b) Vì $AB \perp CD$ nên $\widehat{AC} = \widehat{AD}$,
 suy ra $\widehat{ACF} = \widehat{AEC}$.

Xét $\triangle ACF$ và $\triangle AEC$ có góc A chung và
 $\widehat{ACF} = \widehat{AEC}$.

$$\text{Suy ra: } \triangle ACF \sim \text{với } \triangle AEC \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC}$$

$$\Rightarrow AE \cdot AF = AC^2$$

c) Theo câu b) ta có $\widehat{ACF} = \widehat{AEC}$, suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CEF$ (1).

Mặt khác $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), suy ra $AC \perp CB$ (2). Từ (1) và (2) suy ra CB chứa đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CEF$, mà CB cố định nên tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CEF$ thuộc CB cố định khi E thay đổi trên cung nhỏ BC.

Câu 5: Ta có $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + b)}{ab} \geq \frac{4}{(a + b)} \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{(a + b)} \Rightarrow P \geq \frac{4}{(a + b)}, \text{ mà } a + b \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{(a + b)} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \geq \sqrt{2}. \text{ Dấu " = " xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)^2 = 0 \\ a + b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}. \text{ Vậy: min}$$

$$P = \sqrt{2}.$$

Lời bình:

Câu IIb

Các bạn tham khảo thêm một lời giải sau

1) Ta có $a = 1$. $\Delta = 25 - 4m$. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm nếu có của phương trình.

Từ công thức $x_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta}{2a} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$. Vậy nên phương trình có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } |x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 3 \stackrel{a=1}{\Leftrightarrow} \Delta = 9 \Leftrightarrow 25 - 4m = 9 \Leftrightarrow m = 4.$$

2) Có thể bạn đang băn khoăn không thấy điều kiện $\Delta \geq 0$. Xin đừng, bởi $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \Delta = 9$. Điều bạn băn khoăn ấy càng làm nổi bật ưu điểm của lời giải trên. Lời giải đã giảm thiểu tối đa các phép toán, điều ấy đồng hành giảm bớt nguy cơ sai sót.

Câu IVb

• Để chứng minh một đẳng thức của tích các đoạn thẳng người ta thường gán các đoạn thẳng ấy vào một cặp tam giác đồng dạng. Một thủ thuật để dễ nhận ra cặp tam giác đồng dạng là chuyển "hình thức" đẳng thức đoạn thẳng ở dạng tích về dạng thương. Khi đó mỗi tam giác được xét sẽ có cạnh hoặc là nằm cùng một vế, hoặc cùng nằm ở tử thức, hoặc cùng nằm ở mẫu thức.

Trong bài toán trên $AE \cdot AF = AC^2 \Leftrightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC}$. Đẳng thức mách bảo ta xét các cặp tam giác đồng dạng $\triangle ACF$ (có cạnh nằm vế trái) và $\triangle ACE$ (có cạnh nằm vế phải).

• Khi một đoạn thẳng là trung bình nhân của hai đoạn thẳng còn lại, chẳng hạn $AE \cdot AF = AC^2$ thì AC là cạnh chung của hai tam giác, còn AE và AF không cùng nằm trong một tam giác cần xét.

Trong bài toán trên AC là cạnh chung của hai tam giác $\triangle ACE$ và $\triangle ACF$

Câu IVc

• Nếu (Δ) là đường thẳng cố định chứa tâm của đường tròn biến thiên có các đặc điểm sau:

+ Nếu đường tròn có hai điểm cố định thì (Δ) là trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm cố định ấy.

+ Nếu đường tròn có một điểm cố định thì (Δ) là đường thẳng đi qua điểm đó và

– hoặc là $(\Delta) \perp (\Delta')$,

– hoặc là $(\Delta) // (\Delta')$,

– hoặc là (Δ) tạo với (Δ') một góc không đổi

(trong đó (Δ') là một đường thẳng cố định có sẵn).

• Trong bài toán trên, đường tròn ngoại tiếp $\triangle CEF$ chỉ có một điểm C là cố định. Lại thấy $CB \perp CA$ mà CA cố định nên phán đoán có thể CB là đường thẳng phải tìm. Đó là điều dẫn dắt lời giải trên.

Câu V

Việc tìm GTNN của biểu thức P bao giờ cũng vận hành theo sơ đồ "bé dần": $P \geq B$, (trong tài liệu này chúng tôi sử dụng B - chữ cái đầu của chữ bé hơn).

1) Giả thiết $a + b \leq 2\sqrt{2}$ đang ngược với sơ đồ "bé dần" nên ta phải chuyển hoá $a + b \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Từ đó mà lời giải đánh giá P theo $\frac{1}{a+b}$.

2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với $a > 0, b > 0$ là một bất đẳng thức đáng nhớ. Tuy là một hệ quả của bất đẳng

Cô-si, nhưng nó được vận dụng rất nhiều. Chúng ta còn gặp lại nó trong một số đề sau.

3) Các bạn tham khảo lời giải khác của bài toán như là một cách chứng minh bất đẳng thức trên.

Với hai số $a > 0, b > 0$ ta có $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \stackrel{\text{Co-si}}{\geq} \frac{2}{\sqrt{ab}} \stackrel{\text{Co-si}}{\geq} \frac{2 \cdot 2}{a+b} = \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Dấu đẳng thức có khi $a = b = \sqrt{2}$. Vậy $\min P = \sqrt{2}$.