Dạng III:

Phương trình và Hệ Phương trình

-------------ꙮ-----------

A/ Phương trình bậc nhất một ẩn – giảI và biện luận:

+ Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax+b=0(a\neq 0)$

+ Giải và biện luận:

- Nếu $a=0;b=0$ thì Phương trình vô số nghiệm.
- Nếu $a=0;b\neq 0$ thì Phương trình vô nghiệm.
- Nếu $a\neq 0$ thì Phương trình có một nghiệm duy nhất $x=-\frac{b}{a}$

ví dụ: Giải và biện luận Phương trình sau: $4m^2(x-1)=x-4m+1$

Giải: $4m^2(x-1)=x-4m+1 \Leftrightarrow 4m^2x-4m^2-x=-4m+1 \Leftrightarrow (4m^2-1)x=4m^2-4m+1$

$\Leftrightarrow (2m+1)(2m-1).x=(2m-1)^2$

Biện luận: + Nếu $m\neq \pm\frac{1}{2}$ thì Phương trình có một nghiệm: $x=\frac{2m-1}{2m+1}$

+ Nếu $m=\frac{1}{2}$ thì Phương trình có dạng: $0.x=0$ nên Phương trình vô số nghiệm.

+ Nếu $m=-\frac{1}{2}$ thì Phương trình có dạng: $0.x=2.(-\frac{1}{2})\neq 0$ nên Phương trình vô nghiệm.

Bài tập: Giải và biện luận các Phương trình sau:

Bài 1. $\frac{m(x-1)}{2}-\frac{m+x}{3}=2$

Bài 2. $\frac{x+a-2}{a-1}+\frac{x-a}{a+1}+\frac{x+2a}{1-a^2}=0(a\neq\pm 1)$ HD: Quy đồng- thu gọn- đưa về dạng ax + b = 0

Bài 3. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}=1-\frac{4x}{a+b+c}(a;b;c;\neq 0;a+b+c\neq 0)$.

HD: $\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1=3+1-$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1=4-\frac{4x}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c-x).\frac{a+b+c}{abc}-\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-x)\left(\frac{a+b+c}{abc}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0 \Leftrightarrow (a+b+c-x)\left[\frac{(a+b+c)^2-4abc}{abc(a+b+c)}\right]=0$$

Nếu $[...]\neq 0 \Rightarrow (a+b+c-x)=0 \Leftrightarrow x=a+b+c$

Nếu $[...]=0$ thì Phương trình vô số nghiệm.

b. hệ Phương trình bậc nhất có hai ẩn số:

+ Dạng tổng quát: $\begin{cases} ax+b=0 \\ a^{'}x+b^{'}=0 \end{cases}$

+ Cách giải:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.

+ Số nghiệm số:

- Nếu $a \neq a^{'}$ Thì hệ Phương trình có một nghiệm .
- Nếu $a = a^{'}; b = b^{'}; c \neq c^{'}$ Thì hệ Phương trình có vô nghiệm .
- Nếu $a = a^{'}; b = b^{'}; c = c^{'}$ Thì hệ Phương trình có vô số nghiệm.

+ Tập nghiệm của mỗi Phương trình biểu diễn trênmặt phẳng toạđộ là đồ thị hàm số dạng: $y = ax + b$

Ví dụ: ***Giải các HPT sau:***

Bài1: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

Giải:

+ Dùng PP thế: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 3x+2x-3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 5x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2.2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vaọy HPT đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

+ Dùng PP cộng: $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=10 \\ 3x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3.2+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vaọy HPT đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Bài2: $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 5x+2y=6 \end{cases}$ Để giải loại HPT này ta thường sử dụng PP cộng cho thuận lợi.

$\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ 5x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+15y=-10 \\ 10x+4y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y=-22 \\ 5x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ 5x+2.(-2=6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Vaọy HPT có nghiệm là $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$

Bài 3: $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y}=-1 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=-1 \end{cases}$

***Đối với HPT ở dạng này ta có thể sử dụng hai cách giải sau đây:**

+ *Cách 1*: Sử dụng PP cộng. ĐK: $x \neq -1, y \neq 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{y}=-1 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \dfrac{2}{x+1}+\dfrac{5}{1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ \dfrac{2}{x+1}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$$

Vaọy HPT có nghiệm là $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$

+ *Cách 2*: Sử dụng PP đặt ẩn phụ. ĐK: $x \neq -1, y \neq 0$.

Đặt $\dfrac{1}{x+1}=a$; $\dfrac{1}{y}=b$. HPT đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2a+3b=-1 \\ 2a+5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5b=1 \\ 2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+5.1=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=-2 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vaọy HPT có nghiệm là $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{2} \\ y=1 \end{cases}$

Lưu ý: - Nhiều em còn thiếu ĐK cho những HPT ở dạng này.
- Có thể thử lại nghiệm của HPT vừa giải.

Bài tập về hệ Phương trình:

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau (*bằng pp thế*)

1.1: $a)\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-4y=2 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 4x+y=2 \end{cases}$

1.2. $a)\begin{cases} x-2\sqrt{2}y=\sqrt{5} \\ x\sqrt{2}+y=\sqrt{2} \end{cases}$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau (*bằng pp cộng đại số*)

2.1. $a)\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 4x+3y=6 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 3x-2y=10 \\ x-\dfrac{2}{3}y=3\dfrac{1}{3} \end{cases}$

2.2. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$

Bài 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ (m^2+1)x + 6y = 2m \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau

a) m = -1 b) m = 0 c) m = 1

Bài 4 a) Xác định hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình $\begin{cases} 2x + by = 4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$ có nghiệm là (1; -2)

b) Cũng hỏi như vậy nếu hệ phương trình có nghiệm là $\left(\sqrt{2}-1; \sqrt{2}\right)$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 2x + y = \sqrt{2} \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

a) Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2m}{m+1} + \dfrac{n}{n+1} = \sqrt{2} \\ \dfrac{m}{m+1} + \dfrac{3n}{n+1} = -1 \end{cases}$

Bài 6: Cho hệ Phương trình $\begin{cases} 2x - ay = b \\ ax + by = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi a =3 ; b =-2
b) Tìm a;b để hệ có nghiệm là (x;y) = ($\sqrt{2}; \sqrt{3}$)

Bài 7: Giải các hệ Phương trình sau: (*pp đặt ẩn phụ)*

7.1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = 2 \\ \dfrac{5}{x+y} - \dfrac{4}{x-y} = 3 \end{cases}$ 7.2) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -8 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$ 7.3) $\begin{cases} 3\sqrt{x-2} - 4\sqrt{y-2} = 3 \\ 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2} = 1 \end{cases}$ (đk x;y$\geq$2)

7.4) $\begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 3 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 3y = 6 + \sqrt{2} \end{cases}$; 7.5) $\begin{cases} (x+1) + 2(y-2) = 5 \\ 3(x+1) - (y-2) = 1 \end{cases}$; 7.6) $\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$.

7.7) $\begin{cases} (x-1)(y-2) + (x+1)(y-3) = 4 \\ (x-3)(y+1) - (x-3)(y-5) = 1 \end{cases}$; 7.8) $\begin{cases} 3(x+y) + 5(x-y) = 12 \\ -5(x+y) + 2(x-y) = 11 \end{cases}$;

7.9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{5} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$; 7.10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=2 \\ \dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3 \end{cases}$; 7.11) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y}+\dfrac{5}{3x+y}=\dfrac{5}{8} \\ \dfrac{3}{2x-3y}-\dfrac{5}{3x+y}=-\dfrac{3}{8} \end{cases}$;

....

c.Phương trình bậc hai - hệ thức vi - ét

1.Cách giải Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

* Nếu $\Delta > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \; ; \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* Nếu $\Delta = 0$ Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

* Nếu $\Delta < 0$ thì Phương trình vô nghiệm

Chú ý: Trong trường hợp hệ số b là số chẵn thì giải Phương trình trên bằng công thức nghiệm thu gọn:

$$\boxed{b' = \frac{1}{2}b \quad \text{v□} \quad \Delta' = b'^2 - ac}$$

* Nếu $\Delta' > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \; ; \; x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

* Nếu $\Delta' = 0$ Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b'}{a}$

* Nếu $\Delta' < 0$ thì Phương trình vô nghiệm.

2.Định lý Vi ét: Nếu x_1 , x_2 là nghiệm của Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0) thỗ

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ p = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Đảo lại: *Nếu cú hai số x_1,x_2 mà $x_1 + x_2 = S$ và $x_1x_2 = p$* thì hai số đó là nghiệm (nếu có) của Phương trình bậc 2: $x^2 - S x + p = 0$

3. Toán ứng dụng định lý Viét

I. Tính nhẩm nghiệm.

Xét Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0)

- Nếu a + b + c = 0 thì Phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu a – b + c = 0 thì Phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$
- Nếu $x_1 + x_2 = m + n$, $x_1x_2 = mn$ và $\Delta \ge 0$ thì Phương trình có nghiệm $x_1 = m$, $x_2 = n$ (hoặc $x_1 = n$, $x_2 = m$)

II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Lập Phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm $x_1; x_2$

Vớ dụ : Cho $x_1 = 3$; $x_2 = 2$ lập một Phương trình bậc hai chứa hai nghiệm tròn

Theo hệ thức VI-ẫT ta cú $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 5 \\ P = x_1x_2 = 6 \end{cases}$ vậy $x_1; x_2$ là nghiệm của Phương trình cú dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Bài tập áp dụng:

1. $x_1 = 8$ và $x_2 = -3$
2. $x_1 = 3a$ và $x_2 = a$
3. $x_1 = 36$ và $x_2 = -104$
4. $x_1 = 1+\sqrt{2}$ và $x_2 = 1-\sqrt{2}$

2. Lập Phương trình bậc hai cú hai nghiệm thoả món biểu thức chứa hai nghiệm của một Phương trình cho trước:

V ớ dụ: Cho Phương trình : $x^2 - 3x + 2 = 0$ cú 2 nghiệm phõn biệt $x_1; x_2$. Không giải Phương trình tròn, hóy lập Phương trình bậc 2 cú ẩn là y thoả món : $y_1 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ và $y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}$

Theo h ệ th ức VI- ẫT ta c ú:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P = y_1y_2 = (x_2 + \frac{1}{x_1})(x_1 + \frac{1}{x_2}) = x_1x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy Phương trình cần lập cú dạng: $y^2 - Sy + P = 0$

hay $y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$

Bài tập áp dụng:

1/ Cho Phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$ cú 2 nghiệm phõn biệt $x_1; x_2$. Không giải Phương trình, Hóy lập Phương trình bậc hai cú cỏc nghiệm $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$

(Đáp số: $y^2 + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2} = 0$ hay $6y^2 + 5y - 3 = 0$)

2/ Cho Phương trình : $x^2 - 5x - 1 = 0$ cú 2 nghiệm $x_1; x_2$. Hóy lập Phương trình bậc 2 cú ẩn y thoả món $y_1 = x_1^4$ và $y_2 = x_2^4$ (có nghiệm là luỹ thừa bậc 4 của các nghiệm của Phương trình đó cho).

(Đáp số : $y^2 - 727y + 1 = 0$)

3/ Cho Phương trình bậc hai: $x^2 - 2x - m^2 = 0$ cú cỏc nghiệm $x_1; x_2$. Hóy lập Phương trình bậc hai cú cỏc nghiệm $y_1; y_2$ sao cho :

a) $y_1 = x_1 - 3$ và $y_2 = x_2 - 3$ b) $y_1 = 2x_1 - 1$ và $y_2 = 2x_2 - 1$

(Đáp số a) $y^2 - 4y + 3 - m^2 = 0$ b) $y^2 - 2y - (4m^2 - 3) = 0$)

III. TÌM HAI SỐ BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Nếu hai số cú Tổng bằng S và Tớch bằng P thỡ hai số đó là hai nghiệm của Phương trình :

$x^2 - Sx + P = 0$ (Điều **kiện** để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$)

Vớ dụ : Tìm hai số a, b biết tổng S = a + b = −3 và tớch P = ab = −4

Vỡ a + b = −3 và ab = −4 n ên a, b là nghiệm của Phương trình : $x^2 + 3x - 4 = 0$

giải Phương trình trờn ta được $x_1 = 1$ và $x_2 = -4$

Vậy nếu a = 1 thỡ b = −4
nếu a = −4 thỡ b = 1

Bài tập áp dụng: Tìm 2 số a và b biết Tổng S và Tớch P

1. S = 3 và P = 2
2. S = −3 và P = 6
3. S = 9 và P = 20
4. S = 2x và P = $x^2 - y^2$

Bài tập nâng cao: Tìm 2 số a và b biết

1. a + b = 9 và $a^2 + b^2 = 41$
2. a −b = 5 và ab = 36
3. $a^2 + b^2 = 61$ v à ab = 30

Hướng dẫn: 1) Theo đề bài đó biết tổng của hai số a và b , vậy để áp dụng hệ thức VI- ÉT thỡ cần Tìm tớch của a v à b.

T ừ $a + b = 9 \Rightarrow (a+b)^2 = 81 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 81 \Leftrightarrow ab = \dfrac{81 - (a^2 + b^2)}{2} = 20$

Suy ra : a, b là nghiệm của Phương trình cú dạng : $x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{array}\right.$

Vậy: Nếu a = 4 thì b = 5
nếu a = 5 thì b = 4

2)Biết tích: ab = 36 do đó cần Tìm tổng : a + b

Cách 1: Đ ặt c = −b ta cú : a + c = 5 và a.c = −36

Suy ra a,c là nghiệm của Phương trình : $x^2-5x-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

Do đó nếu a = -4 thỡ c = 9 nờn b = -9

nếu a = 9 thỡ c = -4 nờn b = 4

Cỏch 2: Từ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab \Rightarrow (a+b)^2=(a-b)^2+4ab=169$

$\Rightarrow (a+b)^2=13^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-13 \\ a+b=13 \end{array}\right.$

*) Với $a+b=-13$ và ab = 36, nên a, b là nghiệm của Phương trình :

$x^2+13x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-9 \end{array}\right.$

Vậy a $=-4$ thì b = -9

*) Với $a+b=13$ và ab = 36, nên a, b là nghiệm của Phương trình : $x^2-13x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

Vậy a = 9 thỡ b = 4

3) Đó biết ab = 30, do đó cần Tìm a + b:

T ừ: $a^2+b^2=61$ $\Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=61+2.30=121=11^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-11 \\ a+b=11 \end{array}\right.$

*) Nếu $a+b=-11$ và ab = 30 thì a, b là hai nghiệm của Phương trình:

$x^2+11x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-5 \\ x_2=-6 \end{array}\right.$

Vậy nếu a $=-5$ thì b = -6 ; nếu a $=-6$ thì b = -5

*) Nếu $a+b=11$ và ab = 30 thì a, b là hai nghiệm của Phương trình :

$x^2-11x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=6 \end{array}\right.$

Vậy nếu a = 5 thì b = 6 ; nếu a = 6 thì b = 5.

IV. Tìm điều kiện của tham số để Phương trình bậc hai có một nghiệm x = x_1 cho trước .Tìm nghiệm thứ 2

Cách giải:

- Tìm điều kiện để Phương trình có nghiệm x= x_1 cho trước có hai cách làm:

+) ***Cách 1***:- Lập điều kiện để Phương trình bậc 2 đã cho có 2 nghiệm: $\Delta \ge 0$ (hoặc $\Delta' \ge 0$) (*)

- Thay x = x_1 vào Phương trình đã cho ,tìm được giá trị của tham số

- Đối chiếu giá trị vừa tìm được của tham số với điều kiện(*) để kết luận

+) ***Cách 2***: - Không cần lập điều kiện $\Delta \ge 0$ (hoặc $\Delta' \ge 0$) mà ta thay luôn x = x_1 vào Phương trình đã cho, tìm được giá trị của tham số

- Sau đó thay giá trị tìm được của tham số vào Phương trình và giải Phương trình

Chú ý : Nếu sau khi thay giá trị của tham số vào Phương trình , mà Phương trình bậc hai này có

$\Delta < 0$ thì kết luận không có giá trị nào của tham số để Phương trình có nghiệm x_1 cho trước.

- Để tìm nghiệm thứ 2 ta có 3 cách làm:

+) ***Cách 1***: Thay giá trị của tham số tìm được vào Phương trình rồi giải Phương trình (như cách 2 trình bầy ở trên)
+) ***Cách 2*** :Thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tổng 2 nghiệm sẽ tìm được nghiệm thứ 2
+) ***Cách 3***: thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tích hai nghiệm,từ đó tìm được nghiệm thứ2

V. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA CÁC BIỂU THỨC NGHIỆM

Đối các bài toán dạng này điều quan trọng nhất là các **em** phải biết biến đổi biểu thức nghiệm đó cho về biểu thức cú chứa tổng nghiệm $x_1 + x_2$ và tích nghiệm x_1x_2 để áp dụng hệ thức VI-ÉT rồi tính giá trị của biểu thức

1.Phương pháp: Biến đổi biểu thức để làm xuất hiện : $(x_1 + x_2)$ ***và*** x_1x_2

Dạng 1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Dạng 2. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

Dạng 3. $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2$

Dạng 4. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$

Dạng 5. $x_1 - x_2 = ?$ Ta biết $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

Dạng 6. $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \left(\pm\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}.(x_1 + x_2)\right)$

Dạng 7. $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right] = \ldots\ldots.$

Dạng 8. $x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) = \ldots\ldots$

Dạng 9. $x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2)^3 + (x_2^2)^3 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^4) = \ldots\ldots..$

Dạng 10. $x_1^6 - x_2^6 = (x_1^{\,2})^3 - (x_2^{\,2})^3 = (x_1^{\,2} - x_2^{\,2})\left[(x_1^{\,2})^2 + x_1^{\,2}.x_2^{\,2} + (x_2^{\,2})^2\right] = \ldots$

Dạng 11. $x_1^5 + x_2^5 = (x_1^{\,3} + x_2^{\,3})(x_1^{\,2} + x_2^{\,2}) - x_1^{\,2}.x_2^{\,2}(x_1 + x_2)$

Dạng12: $(x_1 - a)(x_2 - a) = x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 = p - aS + a^2$

Dạng13 $\dfrac{1}{x_1 - a} + \dfrac{1}{x_2 - a} = \dfrac{x_1 + x_2 - 2a}{(x_1 - a)(x_2 - a)} = \dfrac{S - 2a}{p - aS + a^2}$

2. Bài tập áp dụng: *Không giải Phương trình, tính giá trị của biểu thức nghiệm*

a) Cho Phương trình : $x^2 - 8x + 15 = 0$ Không giải Phương trình, hãy tính

1. $x_1^2 + x_2^2$ (34) 2. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{8}{15}\right)$

3. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$ $\left(\dfrac{34}{15}\right)$ 4. $(x_1+x_2)^2$ (46)

b) Cho Phương trình : $8x^2-72x+64=0$ Không giải Phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{9}{8}\right)$ 2. $x_1^2+x_2^2$ (65)

c) Cho Phương trình : $x^2-14x+29=0$ Không giải Phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{14}{29}\right)$ 2. $x_1^2+x_2^2$ (138)

d) Cho Phương trình : $2x^2-3x+1=0$ Không giải Phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ (3) 2. $\dfrac{1-x_1}{x_1}+\dfrac{1-x_2}{x_2}$ (1)

3. $x_1^2+x_2^2$ (1) 4. $\dfrac{x_1}{x_2+1}+\dfrac{x_2}{x_1+1}$ $\left(\dfrac{5}{6}\right)$

5. $\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}$

e) Cho Phương trình $x^2-4\sqrt{3}x+8=0$ có 2 nghiệm x_1 ; x_2 , không giải Phương trình, tính

$$Q=\frac{6x_1^2+10x_1x_2+6x_2^2}{5x_1x_2^3+5x_1^3x_2}$$

HD: $Q=\dfrac{6x_1^2+10x_1x_2+6x_2^2}{5x_1x_2^3+5x_1^3x_2}=\dfrac{6(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{5x_1x_2\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]}=\dfrac{6.(4\sqrt{3})^2-2.8}{5.8\left[(4\sqrt{3})^2-2.8\right]}=\dfrac{17}{80}$

VI. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAO CHO HAI NGHIỆM NÀY KHÔNG PHỤ THUỘC (HAY ĐỘC LẬP) VỚI THAM SỐ

Để làm các bài toán loại này,các **em** làm lần lượt theo các bước sau:

1- Đặt điều kiện cho tham số để Phương trình đó cho có hai nghiệm x_1 và x_2

(thường là a $\neq$ 0 và $\Delta \geq 0$)

2- Áp dụng hệ thức VI-ET: $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a};x_1.x_2=\dfrac{c}{a}$

3- Sau đó dựa vào hệ thức VI-ET ***rút*** tham số theo tổng nghiệm, theo tích nghiệm sau đó đồng nhất các vế ta sẽ được một biểu thức chứa nghiệm không phụ thuộc vào tham số.Đó chính là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1 và x_2 không phụ thuộc vào *tham số m.*

Vớ dụ 1: *Cho Phương trình :* $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$ *(1) cú 2 nghiệm* $x_1;x_2$. *Lập hệ thức liên hệ giữa* $x_1;x_2$ *sao cho không phụ thuộc vào m.*

*(*Bài này đã cho PT có hai nghiệmx_1 ;x_2 nên ta không biện luận bước 1)

Giải:

Bước2: Theo hệ th ức VI- ET ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2+\dfrac{2}{m-1} (1) \\ x_1.x_2=1-\dfrac{3}{m-1} (2) \end{cases}$$

Bước2: ***Rút*** *m* từ (1) ta có :

$$\frac{2}{m-1}=x_1+x_2-2 \Leftrightarrow m-1=\frac{2}{x_1+x_2-2} \qquad (3)$$

Rút *m* từ (2) ta có :

$$\frac{3}{m-1}=1-x_1x_2 \Leftrightarrow m-1=\frac{3}{1-x_1x_2} \qquad (4)$$

Bước 3: Đồng nhất các vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{2}{x_1+x_2-2}=\frac{3}{1-x_1x_2} \Leftrightarrow 2(1-x_1x_2)=3(x_1+x_2-2) \Leftrightarrow 3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8=0$$

Vớ dụ 2: Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của Phương trình : $(m-1)x^2-2mx+m-4=0$. Chứng minh rằng biểu thức $A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8$ không phụ thuộc giá trị của *m*.

Theo hệ thức VI- ET ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases}$$

ĐK:($m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$) ;Thay vào *A* ta có:

$$A=3(x_1+x_2)+2x_1x_2-8=3.\frac{2m}{m-1}+2.\frac{m-4}{m-1}-8=\frac{6m+2m-8-8(m-1)}{m-1}=\frac{0}{m-1}=0$$

Vậy A = 0 với mọi $m\neq 1$. Do đó biểu thức A không phụ thuộc vào *m*

Bài tập áp dụng:

s1. Cho Phương trình : $x^2-(m+2)x+(2m-1)=0$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho $x_1;x_2$ độc lập đối với *m*.

Hướng dẫn:

B1: Dễ thấy $\Delta=(m+2)^2-4(2m-1)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0$. Do đó Phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

B2: Theo hệ thức VI- ET ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=m+2\\x_1.x_2=2m-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=x_1+x_2-2(1)\\m=\dfrac{x_1x_2+1}{2}(2)\end{cases}$$

B3: Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1+x_2-2=\frac{x_1x_2+1}{2}\Leftrightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2-5=0$$

Cho Phương trình : $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 sao cho chúng không phụ thuộc vào *m*.

Hướng dẫn: Dễ thấy $\Delta=(4m+1)^2-4.2(m-4)=16m^2+33>0$ Do đó Phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo hệ thức VI-ET ta có

$$\begin{cases}x_1+x_2=-(4m+1)\\x_1.x_2=2(m-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m=-(x_1+x_2)-1(1)\\4m=2x_1x_2+16(2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$-(x_1+x_2)-1=2x_1x_2+16\Leftrightarrow 2x_1x_2+(x_1+x_2)+17=0$$

VII. TÌM GIÁ TRỊ THAM SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN BIỂU THỨC CHỨA NGHIỆM ĐÃ CHO

Đối với các bài toán dạng này các em làm như sau:

- Đặt điều kiện cho tham số để Phương trình đó cho có hai nghiệm x_1 và x_2

(thường là a ≠ 0 và $\Delta \geq 0$)

- Từ biểu thức nghiệm đó cho, áp dụng hệ thức VI-ET để giải Phương trình (có ẩn là tham số).
- Đối chiếu với điều kiện xác định của tham số để xác định giá trị cần Tìm.

Ví dụ 1: Cho Phương trình : $mx^2-6(m-1)x+9(m-3)=0$

Tìm giá trị của tham số *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1+x_2=x_1.x_2$

Bài giải: Điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 l à :

$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = \left[3\left(m-21\right)\right]^2 - 9(m-3)m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9\left(m^2 - 2m + 1\right) - 9m^2 + 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9\left(m-1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$

Theo hệ thức VI- ET ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{6(m-1)}{m} \\ x_1x_2 = \dfrac{9(m-3)}{m} \end{cases}$ và từ giả thiết: $x_1 + x_2 = x_1x_2$. Suy ra:

$$\frac{6(m-1)}{m} = \frac{9(m-3)}{m} \Leftrightarrow 6(m-1) = 9(m-3) \Leftrightarrow 6m - 6 = 9m - 27 \Leftrightarrow 3m = 21 \Leftrightarrow m = 7$$

(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với m = 7 thì Phương trình đó cho có 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1 + x_2 = x_1.x_2$

Vớ dụ 2: Cho Phương trình : $x^2 - \left(2m+1\right)x + m^2 + 2 = 0$.

Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $3x_1x_2 - 5\left(x_1 + x_2\right) + 7 = 0$

Bài giải: Điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm $x_1 \,\&\, x_2$ là :

$\Delta' = (2m+1)^2 - 4(m^2+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{7}{4}$

Theo hệ thức VI-ET ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$ và từ giả thiết $3x_1x_2 - 5\left(x_1 + x_2\right) + 7 = 0$. Suy ra

$3(m^2+2) - 5(2m+1) + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 6 - 10m - 5 + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 (TM) \\ m = \dfrac{4}{3} (KTM) \end{array}\right.$

Vậy với m = 2 thì Phương trình cú 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức : $3x_1x_2 - 5\left(x_1 + x_2\right) + 7 = 0$

Bài tập áp dụng

1. Cho Phương trình : $mx^2 + 2\left(m-4\right)x + m + 7 = 0$

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức : $x_1 - 2x_2 = 0$

2. Cho Phương trình : $x^2 + \left(m-1\right)x + 5m - 6 = 0$

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức: $4x_1 + 3x_2 = 1$

3. Cho Phương trình : $3x^2-(3m-2)x-(3m+1)=0$.

Tìm m để 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức : $3x_1-5x_2=6$

Hướng dẫn cách giải:

Đối với các bài tập dạng này ta thấy có một điều khác biệt so với bài tập ở Ví dụ 1 và ví dụ 2 ở chỗ:

+ Trong ví dụ thì biểu thức nghiệm đó chứa sẵn tổng nghiệm x_1+x_2 và tích nghiệm x_1x_2 nên ta có thể vận dụng trực tiếp hệ thức VI-ÉT để Tìm tham số m.

+ Cũng trong 3 bài tập trên thì các biểu thức nghiệm lại không cho sẵn như vậy, do đó vấn đề đặt ra ở đây là làm thế nào để từ biểu thức đó cho biến đổi về biểu thức có chứa tổng nghiệm x_1+x_2 và tích nghiệm x_1x_2 rồi từ đó vận dụng tương tự cách làm đó trình bày ở Ví dụ 1 và ví dụ 2.

BT1: - ĐKX Đ: $m\neq 0 \,\&\, m\leq \dfrac{16}{15}$

-Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-(m-4)}{m} \\ x_1x_2=\dfrac{m+7}{m} \end{cases}$ (1)

- Từ $x_1-2x_2=0$ Suy ra: $\begin{cases} x_1+x_2=3x_2 \\ 2(x_1+x_2)=3x_1 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1+x_2)^2=9x_1x_2$ (2)

- Thế (1) vào (2) ta đưa được về Phương trình sau: $m^2+127m-128=0 \Rightarrow m_1=1; m_2=-128$

BT2: - ĐKXĐ: $\Delta=m^2-22m+25\geq 0 \Leftrightarrow 11-\sqrt{96}\leq m\leq 11+\sqrt{96}$

- Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=5m-6 \end{cases}$ (1)

- Từ : $4x_1+3x_2=1$. Suy ra: $\begin{cases} x_1=1-3(x_1+x_2) \\ x_2=4(x_1+x_2)-1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2=[1-3(x_1+x_2)].[4(x_1+x_2)-1]$ (2)

$\Leftrightarrow x_1x_2=7(x_1+x_2)-12(x_1+x_2)^2-1$

- Thế (1) vào (2) ta có Phương trình : $12m(m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$ (thoả mãn ĐKXĐ)

BT3: - Vì $\Delta=(3m-2)^2+4.3(3m+1)=9m^2+24m+16=(3m+4)^2\geq 0$ với mọi số thực m nên Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

- -Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3m-2}{3} \\ x_1x_2=\dfrac{-(3m+1)}{3} \end{cases}$ (1)

- Từ giả thiết: $3x_1 - 5x_2 = 6$. Suy ra: $\begin{cases} 8x_1 = 5(x_1+x_2)+6 \\ 8x_2 = 3(x_1+x_2)-6 \end{cases} \Rightarrow 64x_1x_2 = [5(x_1+x_2)+6].[3(x_1+x_2)-6]$

$\Leftrightarrow 64x_1x_2 = 15(x_1+x_2)^2 - 12(x_1+x_2) - 36$

(2)

- Thế (1) vào (2) ta được Phương trình: $m(45m+96)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{32}{15} \end{array} \right.$ (thoả mãn)

VIII. XÁC ĐỊNH DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho Phương trình: $ax^2+bx+c=0$ (a $\neq$ 0) .Hãy Tìm điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm: ***trái dấu, cùng dấu, cùng dương, cùng âm ….***

Ta lập bảng xột dấu sau:

Dấu nghiệm	x_1	x_2	$S=x_1+x_2$	$P=x_1x_2$	Δ	***Điều kiện chung***
trỏi dấu	$\pm$	$\mp$		$P<0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P<0$.
cựng dấu,	$\pm$	$\pm$		$P>0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P>0$
cùng dương,	+	+	$S>0$	$P>0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P>0$; $S>0$
cựng õm	–	–	$S<0$	$P>0$	$\Delta \geq 0$	$\Delta \geq 0$; $P>0$; $S<0$.

Vớ dụ: *Xác định tham số m sao cho Phương trình:*

$2x^2-(3m+1)x+m^2-m-6=0$ cú 2 nghiệm trỏi dấu.

Để Phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 4.2.(m^2-m-6) \geq 0 \\ P = \dfrac{m^2-m-6}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-7)^2 \geq 0 \forall m \\ P=(m-3)(m+2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<3$$

Vậy với $-2<m<3$ thì Phương trình cú 2 nghiệm trái dấu.

Bài tập tham khảo:

1. $mx^2-2(m+2)x+3(m-2)=0$ có 2 nghiệm cùng dấu.
2. $3mx^2+2(2m+1)x+m=0$ có 2 nghiệm âm.
3. $(m-1)x^2+2x+m=0$ có ít nhất một nghiệm không âm.

IX. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC NGHIỆM

Áp dụng tính chất sau về bất đẳng thức: trong mọi trường hợp nếu ta luôn phân tích được:

$C = \left[\begin{array}{l} A+m \\ k-B \end{array}\right.$ (trong đó A, B là các biểu thức không âm ; m, k là hằng số) (*)

Thì ta thấy : $C \geq m$ (vì $A \geq 0$) $\Rightarrow \min C = m \Leftrightarrow A = 0$

$C \leq k$ (vì $B \geq 0$) $\Rightarrow \max C = k \Leftrightarrow B = 0$

Ví dụ 1: Cho Phương trình : $x^2 + (2m-1)x - m = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của Phương trình. Tìm m để :

$A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài giải: Theo VI-ET: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-1) \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Theo đ ề b ài : $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - 8x_1x_2$

$$= (2m-1)^2 + 8m$$
$$= 4m^2 - 12m + 1$$
$$= (2m-3)^2 - 8 \geq -8$$

Suy ra: $\min A = -8 \Leftrightarrow 2m-3 = 0 \;\; hay\; m = \frac{3}{2}$

Ví dụ 2: Cho Phương trình : $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của Phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

Ta có: Theo hệ thức VI-ET thì : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1+x_2)^2 + 2} = \frac{2(m-1)+3}{m^2+2} = \frac{2m+1}{m^2+2}$$

Cách 1: Thêm bớt để đưa về dạng như phần (*) đó hướng dẫn

Ta biến đổi B như sau:

$$B = \frac{m^2 + 2 - (m^2 - 2m + 1)}{m^2+2} = 1 - \frac{(m-1)^2}{m^2+2}$$

Vì $(m-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m-1)^2}{m^2+2} \geq 0 \Rightarrow B \leq 1$

Vậy $\max \text{B} = 1 \Leftrightarrow m = 1$

Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B=\frac{\frac{1}{2}m^2+2m+1-\frac{1}{2}m^2}{m^2+2}=\frac{\frac{1}{2}\left(m^2+4m+4\right)-\frac{1}{2}\left(m^2+2\right)}{m^2+2}=\frac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)}-\frac{1}{2}$$

Vì $(m+2)^2\geq 0\Rightarrow\frac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)}\geq 0\Rightarrow B\geq-\frac{1}{2}$

Vậy $\min B=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-2$

Cỏch 2: Đưa về giải Phương trình bậc 2 với ẩn là m và B là tham số, ta sẽ Tìm điều kiện cho tham số B để Phương trình đó cho luôn có nghiệm với mọi m.

$B=\frac{2m+1}{m^2+2}\Leftrightarrow Bm^2-2m+2B-1=0$ (Với m là ẩn, B là tham số) (**)

Ta có: $\Delta=1-B(2B-1)=1-2B^2+B$

Để Phương trình (**) luôn có nghiệm với mọi m thì $\Delta\geq 0$

hay $-2B^2+B+1\geq 0\Leftrightarrow 2B^2-B-1\leq 0\Leftrightarrow(2B+1)(B-1)\leq 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2B+1\leq 0\\ B-1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}2B+1\geq 0\\ B-1\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}B\leq-\frac{1}{2}\\ B\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}B\geq-\frac{1}{2}\\ B\leq 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq B\leq 1$$

Vậy: $\max B=1\Leftrightarrow m=1$

$\min B=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-2$

<u>Bài tập áp dụng</u>

1. Cho Phương trình : $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$.Tìm m để biểu thức $A=(x_1-x_2)^2$ có giỏ trị nhỏ nhất.

2. Cho Phương trình $x^2-2(m-1)x-3-m=0$. Tìm m sao cho nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2\geq 10$.

3. Cho Phương trình : $x^2-2(m-4)x+m^2-8=0$ xác định m để Phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn

a) $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

b) $B=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

4. Cho Phương trình : $x^2-(m-1)x-m^2+m-2=0$. Với giá trị nào của m, biểu thức $C=x_1^2+x_2^2$ dạt giá trị nhỏ nhất.

5. Cho Phương trình $x^2+(m+1)+m=0$. Xác định m để biểu thức $E=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.