SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
NĂM HỌC 2013 - 2014

VÒNG 2
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút.
Không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(2,5 điểm)*

1. Các số thực a, b, c thỏa mãn đồng thời hai đẳng thức:

i) $(a + b)(b + c)(c + a) = abc$

ii) $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3b^3c^3$

Chứng minh: $abc = 0$.

2. Các số thực dương a, b thỏa mãn $ab > 2013a + 2014b$. Chứng minh đẳng thức:

$$a + b > \left(\sqrt{2013} + 2014\right)^2$$

Câu 2: *(2,0 điểm)*

Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ (x; y) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 = x + 4y \\ 6x^2 - 19xy + 15y^2 = 1 \end{cases}$$

Câu 3: *(1,0 điểm)*

Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu S_n là tổng của n số nguyên tố đầu tiên.

$S_1 = 2, S_2 = 2 + 3, S_3 = 2 + 3 + 5, ...)$

Chứng minh rằng trong dãy số $S_1, S_2, S_3, ...$ không tồn tại hai số hạng liên tiếp đều là số chính phương.

Câu 4: *(2,5 điểm)*

Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O), BD là đường phân giác của góc ABC. Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E. Đường tròn (O_1) đường kính DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

1. Chứng minh rằng đường thẳng đối xứng với đường thẳng BF qua đường thẳng BD đi qua trung điểm của cạnh AC.

2. Biết tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{BAC} = 60^0$ và bán kính của đường tròn (O) bằng R. Hãy tính bán kính của đường tròn (O_1) theo R.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Độ dài ba cạnh của tam giác ABC là ba số nguyên tố. Chứng minh minh rằng diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Câu 6: *(1,0 điểm)*

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2, đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 407$$

Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho tổng các số dư của các phép chia n cho 22 số $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ bằng 2012.

.... Hết ....

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN (vòng 2)
ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI
NĂM HỌC 2013 - 2014

Câu 1:

1.

Từ ii) suy ra: $(a + b)(b + c)(c + a)(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$.

Kết hợp với i) suy ra: $abc(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) = a^3b^3c^3$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} abc = 0 \\ \left(a^2 - ab + b^2\right)\left(b^2 - bc + c^2\right)\left(c^2 - ca + a^2\right) = a^3b^3c^3 \quad (1) \end{array}\right.$$

Nếu $abc \neq 0$ thì từ các bất đẳng thức $\begin{cases} a^2 - ab + b^2 \geq |ab| \\ b^2 - bc + c^2 \geq |bc| \\ c^2 - ca + a^2 \geq |ca| \end{cases}$

Suy ra: $(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq a^2b^2c^2$, kết hợp với (1) suy ra: $a = b = c$.

Do đó: $8a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow abc = 0$ (mẫu thuẫn). Vậy $abc = 0$.

2.

Từ giả thiết suy ra:

$$1 > \frac{2013}{b} + \frac{2014}{a}$$

$$\Rightarrow a + b > \frac{2013}{b}(a+b) + \frac{2014}{a}(a+b)$$

$$= 2013 + \frac{2013a}{b} + \frac{2014}{a} + 2014 \geq 2013 + 2\sqrt{\frac{2013a}{b}.\frac{2014b}{a}} + 2014 = \left(\sqrt{2013} + \sqrt{2014}\right)^2$$

Câu 2:

Nếu $x = 0$ thay vào hệ ta được: $\begin{cases} -2y^3 = 4y \\ 15y^2 = 1 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Nếu $x \neq 0$, đặt $y = tx$, hệ trở thành $\begin{cases} x^3 - 2t^3x^3 = x + 4tx \\ 6x^2 - 19tx^2 + 15t^2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(1 - 2t^3\right) = 1 + 4t \\ x^2\left(15t^2 - 19t + 6\right) = 1 \end{cases}$

Suy ra: $1 - 2t^3 \neq 0; 15t^2 - 19t + 6 \neq 0$ và $\dfrac{1+4t}{1-2t^3} = \dfrac{1}{15t^2 - 19t + 6} \Leftrightarrow 62t^3 - 61t^2 + 5t + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (2t-1)\left(31t^2 - 15t - 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\left(\text{Do } t \in Q\right).$$

Suy ra: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 1$

Đáp số: (2; 1), (-2, -1).

Câu 3:

Ký hiệu p_n là số nguyên tố thứ n.

Giả sử tồn tại m mà $S_{m-1} = k^2$; $S_m = l^2$; $k, l \in N^*$.

Vì $S_2 = 5$, $S_3 = 10$, $S_4 = 17 \Rightarrow m > 4$.

Ta có: $p_m = S_m - S_{m-1} = (l - k)(l + k)$.

Vì p_m là số nguyên tố và $k + l > 1$ nên $\begin{cases} l - k = 1 \\ l + k = p_m \end{cases}$

Suy ra: $p_m = 2l - 1 = 2\sqrt{S_m} - 1 \Rightarrow S_m = \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2$ (1)

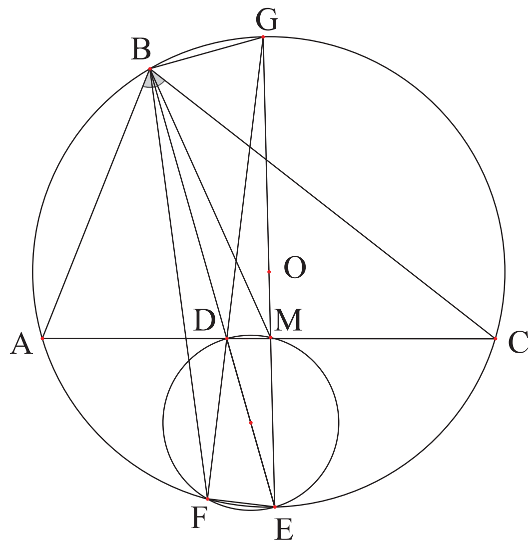
Do m > 4 nên

$$S_m \le \left(1 + 3 + 5 + 7 + ... + p_m\right) + 2 - 1 - 9$$

$$= 1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + ... + \left[\left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_m - 1}{2}\right)^2\right] - 8 = \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2 - 8 < \left(\frac{p_m + 1}{2}\right)^2$$

(mâu thuẫn với (1)).

Câu 4:



1.

Gọi M là trung điểm của cạnh AC.

Do E là điểm chính giữa của cung AC nên $EM \perp AC$.

Suy ra: EM đi qua tâm của đường tròn (O).

Dọi G là giao điểm của DF với (O).

Do $\widehat{DFE} = 90^0$. Suy ra: GE là đường kính của (O).

Suy ra: G, M, E thẳng hàng.

Suy ra: $\widehat{GBE} = 90^0$, mà $\widehat{GMD} = 90^0$. Suy ra tứ giác BDMG là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính GD.

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \widehat{FBE}$.

Suy ra: BF và BM đối xứng với nhau qua BD.

2.

Từ giả thiết suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AB =R, BC = $R\sqrt{3}$.

Theo tính chất đường phân giác: $\frac{DA}{DC} = \frac{R}{R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DC = \sqrt{3}DA$.

Kết hợp với DA = DC = 2R.

Suy ra: $DA = \left(\sqrt{3} - 1\right)\sqrt{R} \Rightarrow DM = R - DA = \left(2 - \sqrt{3}\right)R \Rightarrow DE = \sqrt{ME^2 + MD^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}R}$

Vậy bán kính đường tròn (O_1) bằng $\sqrt{2 - \sqrt{3}R}$.

Câu 5:

Giả sử a; b; c là các số nguyên tố và là độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Đặt: P = a + b + c, ký hiệu S là diện tích của tam giác ABC.

Ta có: $16S^2 = P(P - 2a)(P - 2b)(P - 2c)$ (1)

Giả sử S là số tự nhiên. Từ (1) suy ra: P = a + b + c chẵn.

Trường hợp 1: Nếu a; b; c cùng chẵn thì a = b = c, suy ra: S = $\sqrt{3}$ (loại)

Trường hợp 2: Nếu a; b; c có một số chẵn và hai số lẻ, giả sử a chẵn thì a = 2.

Nếu $b \neq c \Rightarrow |b - c| \geq 2 = a$, vô lý.

Nếu b = c thì $S^2 = b^2 - 1 \Rightarrow (b - S)(b + S) = 1$ (2)

Đẳng thức (2) không xảy ra vì b; S là các số tự nhiên.

Vậy diện tích của tam giác ABC không thể là số nguyên.

Câu 6:

Ta chứng minh không tồn tại n thỏa mãn đề bài.

Giả sử ngược lại, tồn tại n, ta luôn có:

Tổng các số dư trong phép chia n cho $a_1, a_2, ..., a_{11}$ không thể vượt quá 407 - 11 = 396.

Tổng các số dư trong phép chia n cho các số $4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không vượt quá 4.407 - 11 = 1617.

Suy ra: Tổng các số dư trong phép chia n cho các số $a_1, a_2, ..., a_{11}, 4a_1, 4a_2, ..., 4a_{11}$ không thể vượt quá 396 + 1617 = 2013.

. Kết hợp với giả thiết tổng các số dư bằng 2012.
Suy ra khi chia n cho 22 số trên thì có 21 phép chia có số dư lớn nhất và một phép chia có số dư nhỏ hơn số chia 2 đơn vị.
Suy ra: Tồn tại k sao cho a_k, $4a_k$ thỏa mãn điều kiện trên.
Khi đó một trong hai số n + 1; n + 2 chia hết cho a_k, số còn lại chia hết cho $4a_k$.
Suy ra: $(n + 1; n + 2) \geq a_k \geq 2$, điều này không đúng.
Vậy không tồn tại n thỏa mãn đề ra.

----- HẾT -----