CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

ĐA THỨC

PHẦN I: MỤC TIÊU

- Cung cấp các lý thuyết chung về đa thức
- Vận dụng lý thuyết giải một số dạng toán về đa thức thường gặp trong công tác bồi dưỡng học sinh giỏi.

PHẦN II: LÝ THUYẾT CHUNG VỀ ĐA THỨC

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1/ Đa thức P(x) bậc n là hàm được xác định như sau:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

Trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các hằng số cho trước và $a_n \neq 0$

Khi đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ được gọi là các hệ số của đa thức

Người ta dùng deg P(x) để kí hiệu bậc của đa thức P(x)

- Nếu a_i là các số nguyên $\forall i = \overline{0,n}$ thì P(x) gọi là đa thức với hệ số nguyên
- Nếu a_i là các số hữu tỉ $\forall i = \overline{0,n}$ thì P(x) gọi là đa thức với hệ số hữu tỉ.

2/ Số x_0 được gọi là nghiệm của đa thức P(x) nếu $P(x_0) = 0$

3/ Cho hai đa thức P(x) và Q(x). Ta nói rằng P(x) chia hết cho Q(x) nếu tồn tại đa thức h(x) sao cho P(x) = h(x). Q(x). Khi đó đa thức Q(x) là ước của đa thức P(x).

4/ Hai đa thức P(x) và Q(x) được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu P(x) và Q(x) không có ước chung bậc dương

5/ Cho k là một số nguyên dương. Số x_0 được gọi là nghiệm bội k của đa thức P(x) nếu như đa thức P(x) chia hết cho đa thức $(x - x_0)^k$ nhưng không chia hết cho đa thức $(x - x_0)^{k+1}$

6/ Đa thức nguyên thuỷ là đa thức với hệ số nguyên và các hệ số của nó là nguyên tố cùng nhau.

II. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐA THỨC

Mệnh đề 1: Giả sử P(x) và Q(x) là hai đa thức tuỳ ý. Đặt h(x) = P(x) + Q(x). Khi đó h(x) cũng là đa thức và

deg h(x) = max{degP(x),degQ(x)} nếu degP(x) $\neq$ degQ(x)

deg h(x) $\leq$ max{degP(x),degQ(x)} nếu degP(x) = degQ(x)

Mệnh đề 2: Giả sử P(x) và Q(x) là hai đa thức tuỳ ý. Đặt h(x) = P(x).Q(x). Khi đó h(x) cũng là đa thức và nếu $P(x) \neq 0, Q(x) \neq 0$ thì deg h(x) = degP(x) + degQ(x).

Mệnh đề 3: Giả sử P(x) = h(x).Q(x), trong đó P(x) và Q(x) là các đa thức với hệ số hữu tỉ và $Q(x) \neq 0$ thì h(x) cũng là đa thức với hệ số hữu tỉ.

Mệnh đề 4: (Định lý Bezout) Số x_0 là nghiệm của đa thức P(x) $\Leftrightarrow P(x) \vdots (x - x_0)$

Hệ quả 1: Mọi đa thức P(x) bậc n ($n \geq 1$) không thể có quá n nghiệm.

- Nếu đa thức P(x)Bậc không quá n lại có n + 1 nghiệm thì tất cả các hệ số của nó bằng 0.

Hệ quả 2: Nếu P(x) là đa thức mà lại là hàm tuần hoàn thì P(x) $\equiv$C, với C là hằng số nào đó

Mệnh đề 5: (Định lý Viete) Giả sử đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ có các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó ta có các đẳng thức sau:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

...

$$x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Mệnh đề 6: (Định lý Viete đảo) Nếu như các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn hệ:

$$S_k = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}, k = \overline{1,n}$$

Khi đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

Mệnh đề 7: (Định lý về nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên)
Giả sử đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ là đa thức với hệ số nguyên, trong đó $n \geq 1$. Khi đó , nếu P(x) có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ của P(x) có dạng $\frac{r}{s}$, trong đó r là ước của a_0, s là ước của a_n và (r,s) =1

Hệ quả 2: Nếu đa thức $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, trong đó a_i nguyên $\forall i = \overline{0, n-1}$. Khi đó nếu P(x) có nghiệm hữu tỉ thì mọi nghiệm hữu tỉ của P(x) đều là số nguyên và là một trong các ước số của hệ số a_0.

III. LƯỢC ĐỒ HORNER

1/ Tính giá trị của đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ khi x = α ta dùng bảng Horner

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_k	…	a_1	a_0
α	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	…	b_k	…	b_1	b_0

2/ Chia đa thức cho nhị thức bậc nhất x - α

Nếu như trong bảng Horner $b_0 = 0$ thì P(α) = 0 nên P(x)$\vdots$ x - α

IV. CÔNG THỨC NỘI SUY LAGRANGE

Giả sử cho các số khác nhau $b_0, b_1, \ldots, b_n$ và các giá trị tuỳ ý $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Khi đó tồn tại duy nhất đa thức P(x) có bậc không vượt quá n thoả mãn các đẳng thức:

$P(b_0) = c_0$; $P(b_1) = c_1$; … ; $P(b_n) = c_n$

Đa thức này có dạng như sau:

$$P(x) = c_1.\frac{(x-b_2)(x-b_3)...(x-b_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)...(b_1-b_n)} + c_2.\frac{(x-b_2)(x-b_3)...(x-b_n)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)...(b_2-b_n)} + ... + c_n.\frac{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_n)}{(b_n-b_1)(b_n-b_2)...(b_n-b_{n-1})}$$

V. ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY

Định nghĩa: Giả sử P(x) là đa thức với các hệ số hữu tỉ. P(x) được gọi là bất khả quy trên Q nếu P(x) không biểu diễn được dưới dạng tích của hai đa thức bậc dương với các hệ số hữu tỉ.

Mệnh đề 8: Nếu P(x) là đa thức với các hệ số hữu tỉ thì nó có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng $P(x) = \frac{a}{b}Q(x)$

Trong đó: $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản

Q(x) là một đa thức nguyên thuỷ

Bổ đề Gauss: Tích của hai đa thức nguyên thuỷ là một đa thức nguyên thuỷ.

Mệnh đề 9: Nếu đa thức P(x) với các hệ số nguyên có bậc degP(x) > 1 mà bất khả quy trên Z thì cũng bất khả quy trên Q.

Mệnh đề 10: Cho đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ với hệ số nguyên và n > 1. Giả sử tồn tại số nguyên tố p thoả mãn các điều kiện sau:

$$1) a_n \not\vdots\, p$$
$$2) a_0, a_1, ..., a_k \vdots\, p (0 \le k < n)$$
$$3) a_0 \not\vdots\, p^2$$

Nếu P(x) có thể biểu diễn được dưới dạng tích của hai đa thức với hệ số nguyên thì bậc của một trong hai đa thức đó không nhỏ hơn k + 1

Mệnh đề 11: (Định lý Eisenstein về tiêu chuẩn bất khả quy của đa thức với hệ số nguyên) Cho đa thức với hệ số nguyên $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $n \ge 1$

Biết rằng tồn tại số nguyên tố p sao cho
$$1) a_n \not\vdots\, p$$
$$2) a_0, a_1, ..., a_{n-1} \vdots\, p$$
$$3) a_0 \not\vdots\, p^2$$

Khi đó P(x) bất khả quy trên Q.

Mệnh đề 12: Giả sử Q(x) là một đa thức với hệ số hữu tỉ có bậc ≥ 1. Khi đó với mọi đa thức với hệ số hữu tỉ P(x) tồn tại duy nhất một cặp đa thức R(x), S(x) với hệ số hữu tỉ sao cho ta có biểu diễn sau: P(x) = R(x).Q(x) + S(x) và deg S(x) < degQ(x) nếu $S(x) \neq 0$

Mệnh đề 13: Cho đa thức P(x) $\not\equiv$ 0 với hệ số hữu tỉ. Giả sử a là một nghiệm của P(x). nếu P(x) là bất khả quy trên Q thì P(x) là một đa thức có bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ và có một nghiệm là a.

PHẦN III: CÁC DẠNG TOÁN VỀ ĐA THỨC

I. DẠNG TOÁN XÁC ĐỊNH BẬC CỦA ĐA THỨC

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = (1 - 3x + 3x^2)^{2002}(1 + 3x - 3x^2)^{2003}$

Tìm tổng các hệ số của đa thức có được sau khi khai triển , bỏ các dấu ngoặc và ước lượng các số hạng đồng dạng.

Hướng dẫn: $S = P(1) = 1$

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = (x^{27} + x^7 - 1)^{2002}$

Tìm tổng các hệ số của các lỹ thừa bậc lẻ của đa thức sau khi khai triển , bỏ các dấu ngoặc và ước lượng các số hạng đồng dạng.

Hướng dẫn:

degP(x) = 27.2002 với hệ số của luỹ thừa cao nhất là 1=> đa thức P(x) là đa thức bậc chẵn

Giả sử sau khi khai triển và rút gọn đa thức P(x) đã cho có dạng

$P(x) = x^{27.2002} + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

$P(1) = 1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$

$P(-1) = 1 - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots - a_1 + a_0$

⇨ $P(1) - P(-1) = 2(a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots + a_1)$

Đặt $S = a_{n-1} + a_{n-3} + \ldots + a_1$ (tổng các hệ số của các lỹ thừa bậc lẻ)

Mặt khác $P(1) = (1 + 1 - 1)^{2002} = 1$

$P(-1) = (-1 - 1 - 1)^{2002} = 3^{2002}$

⇨ $1 - 3^{2002} = 2S \Rightarrow S = \dfrac{1-3^{2002}}{2}$

Bài 3:Cho đa thức $P(x) = (x^2 + x + 1)^{1001}$. Gọi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2002}$ là các hệ số của đa thức nói trên (trong dạng chính tắc $P(x) = a_{2002}x^{2002} + a_{2001}x^{2001} + \ldots + a_1x + a_0$). Đặt:

$m = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2002}$

$n= a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2001}$

Xác định tính chẵn, lẻ của các số m và n

Bài 4:Cho P(x) và Q(x) là hai đa thức có bậc n. chứng minh rằng hoặc là $P^2(x) \equiv Q^2(x)$ hoặc là $P^2(x) - Q^2(x)$ là đa thức mà $\deg(P^2(x) - Q^2(x)) \geq n$

Bài 5:Cho đa thức $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$. Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức Q(x) và R(x) sao cho degQ(x) = n, degR(x) < n và $P(x) = Q^2(x) + R(x)$

Bài 6:Giả sử n nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của đa thức P(x) bậc n với hệ số hữu tỉ có tính chất sau:

$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \ldots = x_2 - x_1$

Biết rằng đa thức P(x) không thể phân tích thành tích của hai đa thức với hệ số hữu tỉ có bậc $\geq$n. Chứng minh rằng degP(x) ≤ 2 ?

Bài 7:Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n nguyên đôi một khác nhau. Xét đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 2$. Biết rằng P(x) có thể biểu diễn được dưới dạng tích của hai đa thức với hệ số nguyên và có bậc $\geq$ 1. Chứng minh rằng degP(x) = 3?

II. TÍNH CHIA HẾT CỦA ĐA THỨC

Phương pháp chính:

- Dùng định lý Bezout và các hệ quả của nó
- Lược đồ Horner

Dạng 1: Tìm dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

1/ Đa thức chia có dạng x – a (a: const)

- Dùng định lý Bezout
- f(x) có tổng các hệ số bằng 0 thì chia hết chi x – 1
- f(x) có tổng các hệ số của hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của hạng tử bậc lẻ thì chia hết cho x + 1

2/ Đa thức chia có bậc 2 trở lên

Cách 1: Tách đa thức bị chia thành tổng của các đa thức chia hết cho đa thức chia và dư.

Cách 2: Xét giá trị riêng: gọi thương của phép chia Q(x), dư là ax + b thì f(x) =g(x).Q(x) + ax + b

Cách 3: Dùng sơ đồ Horner

Ví dụ: a/ Tìm dư khi chia đa thức $x^{100} – 2x^{51} + 1$ cho $x^2 – 1$

b/ Tìm dư khi chia đa thức $x^{100} – 2x^{51} + 1$ cho $x^2 + 1$

Giải : a) Ta có: $f(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2-1).q(x) + ax + b$

$f(1) = 0 = a + b$

$f(-1)= 4 = -a + b \Rightarrow b=2$; $a = -2$. Vậy dư là : $-2x+2$

b) Ta có $f(x) = (x^{100}+x^2) - (2x^{51}+2x) - (x^2+1) + (2x+2)$

$f(x) = x^2(x^{98}+1) - 2x(x^{50}+1) - (x^2+1) + (2x+2)$

Vì : $x^2(x^{98}+1) \vdots (x^2+1)$; $2x(x^{50}+1) \vdots (x^2+1)$; $(x^2+1) \vdots (x^2+1)$.

=> $(2x+2)$ chia cho (x^2+1) dư là $2x+2$

Dạng 2: Chứng minh một đa thức chia hết cho một đa thức khác

Cách 1: Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử có một thừa số là đa thức chia

Cách 2: Biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia hết cho đa thức chia

Cách 3: Biến đổi tương đương $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) \vdots g(x)$

Cách 4: Chứng tỏ mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia.

Ví dụ: Cứng minh rằng $f(x) = x^{99} + x^{88} + \dots + x^{11} +1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + \dots + x + 1$

Ta có : $f(x) – g(x) = x^{99} – x^9 + x^{88} – x^8 + \dots + x^{11} – x + 1 – 1$

$= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + x(x^{10} - 1)$ chia hết cho $x^{10} – 1$

Mà $x^{10} – 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + \dots + x + 1)$ chia hết cho $x^9 + x^8 + \dots + x + 1$

Suy ra $f(x) – g(x)$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + \dots + x + 1$

Vậy $f(x) = x^{99} + x^{88} + \dots + x^{11} +1$ chia hết cho $g(x) = x^9 + x^8 + \dots + x + 1$

Bài tập vận dụng:

Bài 1:Tìm dư của các phép chia:

a/ $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho x^2-1

b/ x^{41} cho x^2+1

c/ $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho x^2-1

d/ $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x +7$ cho x^2+1

Bài 2: Chứng minh rằng:

a/ $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$
b/ $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi m, $n \in N$
c/ $(x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $x^2 - x$
d/ $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $x(x + 1)(2x + 1)$

Bài 3: Tìm m ; n ; p sao cho đa thức $f(x) = x^5 + 2,734152x^4 - 3,251437x^3 + mx^2 + nx + p$ chia hết cho đa thức $g(x) = (x^2-4)(x+3)$
Bài 4: Cho hai đa thức $P(x)=x^4+5x^3-4x^2+3x+m$ và $Q(x)=x^4+4x^3-3x^2+2x+n$
a) Tìm các giá trị của m và n để P(x) và Q(x) chia hết cho x-2
b) Hãy chứng tỏ đa thức R(x)=P(x)-Q(x) có một nghiệm duy nhất với giá trị của m và n vừa tìm được
Bài 5: Tìm a và b sao cho hai đa thức $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 2a + 3b$ và $g(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3a + 2b$ cùng chia hết cho $(x - 3)$
Bài 6: Cho P(x) là đa thức bậc 4 với hệ số nguyên. Giả sử đa thức P(x) chia hết cho 7 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng tất cả các hệ số của đa thức P(x) đều chia hết cho 7?
Bài 7: Cho p và q là các số nguyên. Tìm điều kiện đối với p và q để đa thức bậc ba $P(x) = x^3 + px + q$ nhận giá trị chia hết cho 3 với mọi x nguyên.
Bài 8: Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên dương của n, ta có đa thức $P(x) = (x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + x + 1$
Bài 9: Cho đa thức $P(x) = x^m + x^n + 1$. Biết rằng P(x) chia hết cho $x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = x^{2m} + x^{2n} + 1$ chia hết cho đa thức $x^4 + x^2 + 1$
Bài 10: Cho đa thức $P(x) = (x^2 -2).(x^2 -3).(x^2 - 6)$
Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p đều tìm được số nguyên dương n để P(n) chia hết cho p.

III. DẠNG TOÁN XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

Dạng 1: Tìm đa thức thương bằng phương pháp đồng nhất hệ số, phương pháp giá trị riêng, thực hiện phép chia đa thức

Phương pháp 1: Nếu hai đa thức P(x) và Q(x) thì các hạng tử cùng bậc ở hai đa thức phải có hệ số bằng nhau

Ví dụ: $P(x) = ax^2+2bx - 3$ $Q(x) = x^2 - 4x - c$
Nếu P(x) = Q(x) thì ta có: a = 1 (hệ số của luỹ thừa bậc 2)
2b = - 4 (hệ số của luỹ thừa bậc 1)
c =3 (hạng tử tự do)

Phương pháp 2: Cho hai đa thức P(x) , Q(x) và deg P(x) > deg Q(x)
Gọi thương và dư trong phép chia P(x) cho Q(x) lần lượt là M(x) và N(x)
Khi đó ta có P(x) = M(x).Q(x) +N(x) (Trong đó degN(x) < deg Q(x)) (*)
Vì (*) đúng với mọi x nên ta cho x lấy một giá trị bất kì x = k (k : const)
Sau đó ta đi giả pt hoặc hpt để tìm các hệ số của các hạng tử trong đa thức.

Ví dụ: Cho đa thức $A(x) = a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a$ ($a \in Q$). xác định a sao cho A(x) chia hết cho x + 1 ?

Gọi thương của phép chia A(x) cho x + 1 là Q(x), ta có: $a^2x^3 + 3ax^2 - 6x - 2a = (x + 1).Q(x)$
Vì đẳng thức đúng với mọi x nên ta cho x = -1, ta được:

$-a^2 + 3a + 6 - 2a = 0 \Leftrightarrow -a^2 + a + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=3 \end{array}\right.$

Với a = -2 thì $A(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$ và $Q(x) = 4x^2 - 10x + 4$

Với a = 3 thì $A(x) = 9x^3 + 9x^2 - 6x - 6$ và $Q(x) = 9x^2 - 6$

Phương pháp 3: Thực hiện phép chia đa thức

Dạng 2: Phương pháp nội suy Newton

Để tìm đa thức P(x) có bậc không quá n khi biết giá trị của đa thức tại n + 1 điểm $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ ta có thể biểu diễn P(x) dưới dạng:

$P(x) = b_0 + b_1(x - c_1) + b_2.(x-c_1)(x-c_2) + \ldots + b_n.(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x - c_n)$

Ví dụ: Tìm đa thức bậc hai P(x) biết P(0) = 25; P(1) = 7; P(2) = -9

Đặt $P(x) = b_0 + b_1x + b_2x(x-1)$ (*)

Thay x lần lượt bằng 0, 1, 2 vào (*) ta được: $\begin{cases} b_0 = 25 \\ b_0 + b_1 = 7 \\ b_0 + 2b_1 + 2b_2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = 25 \\ b_1 = -18 \\ b_2 = 1 \end{cases}$

Vậy đa thức cần tìm có dạng $P(x) = x^2 - 19x + 25$

Bài tập vận dụng:

Bài 1: Xác định giá trị của k để đa thức $f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - x - 2$?

Bài 2: Tím các hằng số a, b, c sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho x + 1 thì dư 7, chia cho x – 3 thì dư -5 ?

Bài 3: Tìm các hằng số a, b, c sao cho $ax^3 + bx^2 + c$ chia hết cho x + 2, chia cho $x^2 - 1$ thì dư x + 5 ?

Bài 4: Cho đa thức bậc bốn P(x) thoả mãn P(-1) = 0 và P(x) – P(x -1) = x(x+1)(2x+1).

a/ Xác định P(x)

b/ Suy ra giá trị của tổng S = 1.2.3 + 2.3.5 + … +n(n+1)(2n+1) với $n \in N^*$

Bài 5: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên không âm và không lớn hơn 8. Giả sử P(9) = 32087. Hãy tìm đa thức P(x)?

Bài 6:Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \neq 0$). Cho biết 2a + 3b + 6c = 0

a/ Tính a, b, c theo P(0); $P(\frac{1}{2})$; P(1)?

b/ Chứng minh rằng P(0); $P(\frac{1}{2})$; P(1) không thể cùng âm hoặc cùng dương?

Bài 7:Tìm một đa thức bậc hai biết: P(0) = 19 ; P(1) = 85 ; P(2) = 1985?

Bài 8: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên không âm và không lớn hơn 8. Giả sử P(9) = 32087. Hãy tìm đa thức P(x)?

Bài 9: Tìm đa thức hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ làm một trong các nghiệm của nó?

Bài 10: Tìm mọi đa thức P(x) $\not\equiv 0$ thoả mãn điều kiện: x.P(x - 1) = (x - 3).P(x)

IV. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Bài 1: Cho f(x) là đa thức với hệ số nguyên. Biết f(0), f(1) là các số lẻ. chứng minh rằng f(x) không có nghiệm nguyên?

Giải: Giả sử x = a là nghiệm nguyên của f(x) thì f(x) = (x-a).Q(x). Trong đó Q(x) là đa thức có hệ số nguyên, do đó:

f(0) = a.Q(0) và f(1) = (1-a).Q(1)

Do f(0) là số lẻ nên a là số lẻ, f(1) là số lẻ nên 1 - a là số lẻ

Mà 1- a là hiệu của hai số lẻ khôngthể là số lẻ (mâu thuẩn)

Vậy f(x) không có nghiệm nguyên.

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = 6x^5 + ax^4 + bx^3 + x^2 + cx + 450$, biết đa thức P(x) chia hết cho các đa thức x – 2; x – 3; x – 5. Hãy tìm a, b, c và các nghiệm của P(x).

Giải: P(2)=192+16a+8b+4+2c+450=0 c+4b+8a=-323

P(3)=1458+81a+27b+9+3c+450=0 c+9b+27a=-639

P(5)=18750+625a+125b+25+5c+450=0 c+25b+125a=-3845

Kết quả : a = -59 ; b = 161 ; c = -495

Ta có: $P(x)=(x-2)(x-3)(x-5)(mx^2+nx+q)$ m = 6 ; n= 1 ; q = -15

$P(x)=(x-2)(x-3)(x-5)(6x^2+x-15)=)=(x-2)(x-3)(x-5)(3x+5)(2x-3)$

Vậy nghiệm của P(x) là:x= 2; 3 ;5 ;$\frac{-5}{3}$;$\frac{3}{2}$

Bài 3: Giả sử P(x) là đa thức với hệ số nguyên. Biết rằng đa thức P(x) không chia hết cho 3 với 3 giá trị nguyên liên tiếp nào đó của x. Chứng minh rằng đa thức P(x) không có nghiệm nguyên?

Bài 4: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên sao cho $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$ với a, b, c là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh rằng đa thức P(x) không có nghiệm nguyên?

Bài 5: Chứng minh rằng với mọi số a nguyên , đa thức

$$P(x) = x^4 – 2005x^3 + (2004 + a)x^2 – 2003x + a$$

không thể có 2 nghiệm nguyên phân biệt.

Bài 6: Chứng minh rằng không tồn tại đa thức bậc 2 với hệ số nguyên $P(x) = ax^2 + bx + c$ nhận $\sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Bài 7: Cho đa thức $P(x) = a_{2k}x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \ldots + a_1x + a_0$

Trong đó các hệ số a_i đều là các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng đa thức P(x) không có nghiệm hữu tỉ.

Bài 8: Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các số hữu tỉ. Biết rằng $\sqrt{3}$ là một nghiệm của đa thức, tìm các nghiệm khác của đa thức P(x) (nếu có)

Bài 9: Giả sử đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng $Q(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{4}(a^2 + b)x + \frac{ab - c}{8}$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 10: Cho đa thức $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + 1$, trong đó mọi hệ số của đa thức đều không âm. Giả sử các hệ số của đa thức còn thoả mãn các điều kiện sau:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq 3 \text{ và } a_{n-1} < 2$$

Chứng minh rằng đa thức P(x) không thể có n nghiệm.

V. GIÁ TRỊ CỦA ĐA THỨC

Bài 1: Chứng minh rằng tam thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x khi và chỉ khi 2a, a + b, c là các số nguyên.

* Giả sử P(x) nhận giá trị nguyên với mọi giá trị nguyên của x

Ta có : P(0) = c => c nguyên

P(1) = a + b + c => a + b + c nguyên => a + b nguyên (vì c nguyên)

P(2) = 4a + 2b + c => 4a + 2b + c nguyên => 2a + 2(a + b) + c nguyên => 2a nguyên

*Giả sử 2a, a + b, c là các số nguyên

Viết lại P(x) dưới dạng sau: $P(x) = (a+b)x + c + \dfrac{2ax(x-1)}{2}$

Lấy x nguyên tuỳ ý khi đó $\dfrac{x(x-1)}{2}$ là số nguyên => P(x) nguyên khi x nguyên

Bài 2: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên, với degP(x) = n. Biết rằng $P(k) = 2^k$ với $k = \overline{1, n+1}$. Tính P(n + 2) ?

Bài 3: Cho tam thức bậc hai $P(x) = x^2 + px + q$ trong đó p và q là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho P(x) = P(2005).P(2006)

Bài 4: Chứng minh rằng không tồn tại đa thức P(x) với các hệ số nguyên thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau: P(7) = 5; P(15) = 9

Bài 5: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại 3 số nguyên phân biệt a, b, c sao cho P(a) = b; P(b) = c; P(c) = a

Bài 6: Cho P(x) là đa thức với hệ số nguyên. Biết rằng P(x) nhận giá trị bằng 7 với 4 giá trị khác nhau của x. Chứng minh rằng với mọi x nguyên thì $P(x) \neq 14$

Bài 7: Có tồn tại hay không một đa thức P(x) với hệ số nguyên thoả mãn điều kiện P(26) = 1931 và P(3) = 2002

Bài 8: Đa thức P(x) bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn điều kiện P(1) = 3; P(3)=11 và P(5)=27. Chứng minh rằng P(-2) + 7P(6) = 1112

Bài 9: Đa thức P(x) bậc n thoả mãn các đẳng thức:

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \text{ với } k = 0; 1; \ldots ; n$$

Chứng minh rằng $P(n+1) = \dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$

Bài 10: Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Biết P(1) = 10 ; P(2) = 20 ; P(3) = 30

Chứng minh rằng $\dfrac{P(12)+P(-8)}{10} + 22 = 2006$

VI. ĐA THỨC KHẢ QUY, ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY

Bài 1: Cho $P(x) = a_{2003}x^{2003} + a_{2002}x^{2002} + \ldots + a_1x + a_0$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết rằng phương trình $|P(x)| = 1$ có 2003 nghiệm nguyên khác nhau. Chứng minh rằng đa thức P(x) không thể biểu diễn thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

Giả sử P(x) có thể biểu diên được dưới dạng: $P(x) = P_1(x).\ P_2(x)$

Trong đó $P_1(x)$, $P_2(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên. Ta có:

deg $P_1(x)$ + deg $P_2(x)$ = deg P(x) = 2003 => min(deg $P_1(x)$,deg $P_2(x)$) ≤ 1001

không giảm tính tổng quát, giả sử deg $P_1(x) \le 1001$

giả sử x_i với $i = \overline{1,2003}$ là 2003 nghiệm nguyên khác nhau của phương trình $|P(x)| = 1$, tức là

$|P(x_i)| = |P_1(x_i)|.|P_2(x_i)| = 1, \forall i = \overline{1,2003}$

=> $|P_i(x_i)| = 1, \forall i = \overline{1,2003}$ (vì $P_1(x_i)$ và $P_1(x_i)$ là các số nguyên) (1)

Từ (1) => một trong hai pt $P_1(x) = 1$ hoặc $P_1(x) = -1$ có ít nhất 1002 nghiệm nguyên khác nhau

Trong mọi trường hợp đều dẫn đến vô lý vì deg $P_1(x) \le 1002$ (vì một đa thức P(x) không phải là hằng bậc n không thể nhận cùng một gía trị tại n giá trị khác nhau của x) => vô lý

Suy ra đpcm

Bài 2: Cho đa thức $P(x) = x^m + x+ + 1$ trong đó degP(x) = m $\ge$ 3. Giả sử m.n $\vdots$ 3. Chứng minh rằng P(x) là đa thức khả quy trên Z.

Bài 3: Cho đa thức $P(x) = x^{2222} + 2x^{2220} + 4x^{2218} + \ldots + 2218x^4 + 2220x^2 + 2222$

Chứng minh rằng P(x) không thể phân tích thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên

Bài 4: Chứng minh rằng nếu đa thức P(x) là đa thức không đồng nhất bằng 0 có bậc không vượt quá 3 và thoả mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1/ $P(x) \ge 0, \forall x$

2/ Tồn tại x_0 mà $P(x_0) = 0$

thì P(x) có thể biểu diễn dưới dạng $P(x) = a.(x - x_0)^2$, với a > 0

Bài 5: Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số nguyên phân biệt. Xét đa thức

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 1$$

Chứng minh rằng không thể biểu diễn được P(x) dưới dạng tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ đôi một khác nhau, thì đa thức $P(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$ không thể biểu diễn thành tích của hai đa thức (bậc dương) với hệ số nguyên.

Bài 7: Cho đa thức $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + 1$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên đôi một khác nhau. Với điều kiện nào thì P(x) có thể biểu diễn được dưới dạng tích của hai đa thức bậc $\ge$ 1 với hệ số nguyên.

Bài 8: Cho đa thức $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, trong đó n là một số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng đa thức P(x) không thể biểu diễn được dưới dạng tích của hai đa thức với hệ số nguyên và có bậc $\ge$ 1

VII. CỰC TRỊ CỦA ĐA THỨC

A. Lý thuyết:

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất (GTLN): Cho đa thức P(x) xác định trên R. Ta nói M là giá trị lớn nhất của P(x) trên R. Kí hiệu M= max P(x), nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn.

+Với mọi x thuộc R thì P(x)$\le$ M, M là hằng số.

+Tồn tại x_o thuộc R sao cho $P(x_0)$= M.

2. Định nghĩa giá trị nhỏ nhất (GTNN): Cho biểu thức P(x) xác định trên R. Ta nói m là giá trị nhỏ nhất của P(x) trên R, kí hiệu m = min P(x), nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

+Với mọi x thuộc R thì P(x) $\ge$ m, m là hằng số.

+Tồn tại x_o thuộc R sao cho $P(x_0)$ = m.

Ví dụ : Xét biểu thức $A = (x-1)^2 + (x-3)^2$.

Mặc dù ta có $A \ge 0$ nhưng chưa thể kết luận Min A = 0 vì không tồn tại giá trị nào của x để A = 0.

Cách giải đúng như sau :

$A = x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2(x^2 - 4x + 5) = 2(x-2)^2 + 2 \ge 2$.

$A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy Min A = 2 khi và chỉ khi x = 2.

B. Phương pháp:

1. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất.

Nhị thức ax + b (a $\neq$ 0) cùng dấu với a với các giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức, trái dấu với a với các giá trị x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức.

x		-b/a	
ax + b	Trái dấu với a	0	Cùng dấu với a

2. Sử dụng các mệnh đề tương đương:

* A nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ – A lớn nhất.

* B lớn nhất $\Leftrightarrow$ B^2 lớn nhất. (B > 0)

* C nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{C}$ lớn nhất. (C > 0)

3. Các hằng đẳng thức đáng nhớ, các bất đẳng thức đã học, các quy tắc so sánh phân số…

4. Trong các hằng đẳng thức cần chú ý đến 2 mệnh đề sau cho ta GTLN của tích, GTNN của tổng.

a) Nếu hai số có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau:

Chứng minh: Nếu a, b có a + b = k (k là hằng số) thì $(a+b)^2 \ge 4ab$ ta có $a.b \le \frac{k^2}{4}$ do đó $\max(a.b) = \frac{k^2}{4}$ khi và chỉ khi a = b.

b)Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi và chỉ khi hai số đó bằng nhau:

Chứng minh: Nếu hai số dương a và b có a.b = h (hằng số) thì (a + b) nhỏ nhất khi và chỉ khi $(a + b)^2$ nhỏ nhất. Mà $(a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow$ Min $(a + b)^2 = 4h$, (khi và chỉ khi a = b) $\Rightarrow$ Min $(a + b) = 2\sqrt{h}$, (khi và chỉ khi a = b).

5.Phương pháp tìm GTLN, GTNN của biểu thức nguyên có bậc chẵn:

a/ Tam thức bậc hai: $P(x) = ax^2 + bx + c$. (a, b, c là hằng số, $a \neq 0$).

Ta có: $P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$

- Nếu a > 0 ,GTNN của P(x) là $\frac{-(b^2-4ac)}{4a} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ và không có GTLN.
- Nếu a < 0 ,GTLN của P(x) là $\frac{-(b^2-4ac)}{4a} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$ và không có GTNN.

Ví dụ : a/ Tìm GTNN của $A = 3x^2 - 4x + 1$

b/ Tìm GTLN của $B = -5x^2 + 6x - 2$

Giải :

a) $A = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{3} = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$. Vậy $\min A = -\frac{1}{3}$ khi $x = \frac{2}{3}$

b) $B = -5\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25}\right) - \frac{1}{5} = -5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} \leq -\frac{1}{5}$. Vậy $\max B = -\frac{1}{5}$ khi $x = \frac{3}{5}$

2/ Đa thức bậc cao hơn hai: Ta có thể đổi biến để đưa về tam thức bậc hai

Ví dụ : Tìm GTNN của $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$

Giải : $A = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$

Đặt $x^2 - 7x + 6 = y$ thì $A = (y - 6)(y + 6) = y^2 - 36 \geq -36$

$\Rightarrow \min A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 6$.

B. Bài tập:

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

1/ $3x^2 - 5x - 2$

2/ $(x - 2)(x - 5)(x^2 - 7x + 10)$

3/ $(2x - 1)^2 + (x - 3)^2$

4/ $x^4 - 6x^2 + 10$

5/ $x^4 + (3 - x)^2$

6/ $(x^4 + 5)^2$

7/ $x^6 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2$

8/ $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$

9/ $x^4 - 4x^3 + 8x + 20$

10/ $\left(2x + \frac{4}{3}\right)^4 - 1$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

1/ $3x^2(5 - 3x^2)$.

2/ $x - x^2$

3/ $-x^2 + 3x$

4/ $-2x^2 + x - 1$

5/ $11 - 10x^2 - x^2$

6/ $x - x^2$

7/ $-\left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{15}\right)^6 + 3$

8/ $5 - 3(2x - 1)^2$