

Chủ đề 1: Nhận biết hình, tìm điều kiện của một hình.

Bài 1:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. D và E lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB và AC. DE cắt AB ở I và cắt AC ở L.

- Chứng minh $DI = IL = LE$.
- Chứng minh tứ giác BCED là hình chữ nhật.
- Chứng minh tứ giác ADOE là hình thoi và tính các góc của hình này.

Bài 2:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có các đường chéo vuông góc với nhau tại I.

- Chứng minh rằng nếu từ I ta hạ đường vuông góc xuống một cạnh của tứ giác thì đường vuông góc này qua trung điểm của cạnh đối diện của cạnh đó.
- Gọi M, N, R, S là trung điểm của các cạnh của tứ giác đã cho. Chứng minh MNRS là hình chữ nhật.
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật này đi qua chân các đường vuông góc hạ từ I xuống các cạnh của tứ giác.

Bài 3:

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 1v$) có AH là đường cao. Hai đường tròn đường kính AB và AC có tâm là O_1 và O_2 . Một cát tuyến biến đổi đi qua A cắt đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại M và N.

- Chứng minh tam giác MHN là tam giác vuông.
- Tứ giác MBCN là hình gì?
- Gọi F, E, G lần lượt là trung điểm của O_1O_2 , MN, BC. Chứng minh F cách đều 4 điểm E, G, A, H.
- Khi cát tuyến MAN quay xung quanh điểm A thì E vạch một đường như thế nào?

Bài 4:

Cho hình vuông ABCD. Lấy B làm tâm, bán kính AB, vẽ $1/4$ đường tròn phía trong hình vuông. Lấy AB làm đường kính, vẽ $1/2$ đường tròn phía trong hình vuông. Gọi P là điểm tùy ý trên cung AC (không trùng với A và C). H và K lần lượt là hình chiếu của P trên AB và AD, PA và PB cắt nửa đường tròn lần lượt ở I và M.

- Chứng minh I là trung điểm của AP.
- Chứng minh PH, BI, AM đồng qui.
- Chứng minh $PM = PK = AH$
- Chứng minh tứ giác APMH là hình thang cân.

đ) Tìm vị trí điểm P trên cung AC để tam giác APB là đều.

Chủ đề 2: Chứng minh tứ giác nội tiếp, chứng minh nhiều điểm cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 1:

Cho hai đường tròn (O) , (O') cắt nhau tại A, B. Các tiếp tuyến tại A của (O) , (O') cắt (O) lần lượt tại các điểm E, F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EAF.

- Chứng minh tứ giác OAO'I là hình bình hành và $OO' // BI$.
- Chứng minh bốn điểm O, B, I, O' cùng thuộc một đường tròn.
- Kéo dài AB về phía B một đoạn $CB = AB$. Chứng minh tứ giác AECF nội tiếp.

Bài 2:

Cho tam giác ABC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC.

- Chứng minh tứ giác ABDC nội tiếp được trong một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó.
- Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ 2 là I. Chứng minh rằng 5 điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 3:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tia OA cắt đường tròn (O') tại C, tia O'A cắt đường tròn (O) tại D. Chứng minh rằng:

- Tứ giác OO'CD nội tiếp.
- Tứ giác OBO'C nội tiếp, từ đó suy ra năm điểm O, O', B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 4:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc AD. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác ABEF, DCEF nội tiếp được.
- Tia CA là tia phân giác của góc BCF.
- * Tứ giác BCMF nội tiếp được.

Bài 5:

Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy một điểm C. Vẽ $CD \perp AB$, $CE \perp MA$, $CF \perp MB$.

Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng:

- Các tứ giác AECD, BFCD nội tiếp được.

b) $CD^2 = CE \cdot CF$

c)* $IK \parallel AB$

Bài 6:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Từ A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn. Vẽ hai đường cao BD và CE.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $xy \parallel DE$, từ đó suy ra $OA \perp DE$.

Bài 7:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy một điểm M. Đường thẳng qua A song song với BM cắt CM tại N.

a) Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác đều.

b) Chứng minh rằng $MA + MB = MC$.

c)* Gọi D là giao điểm của AB và CM. Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{MB} = \frac{1}{MD}$

Bài 8:

Cho ba điểm A, B, C cố định với B nằm giữa A và C. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua B và C. Vẽ đường kính MN vuông góc với BC tại D (M nằm trên cung nhỏ BC). Tia AN cắt đường tròn (O) tại một điểm thứ hai là F. Hai dây BC và MF cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác DEFN nội tiếp được.

b) $AD \cdot AE = AF \cdot AN$

c) Đường thẳng MF đi qua một điểm cố định.

Bài 9:

Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Gọi M là trung điểm của AB. Tia CM cắt đường tròn tại điểm N. Tia AN cắt đường tròn tại điểm D.

a) Chứng minh rằng $MB^2 = MC \cdot MN$

b) Chứng minh rằng $AB \parallel CD$

c) Tìm điều kiện của điểm A để cho tứ giác ABDC là hình thoi. Tính diện tích cử hình thoi đó.

Bài 10:

Cho đường tròn (O) và một dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Vẽ đường kính MN cắt AB tại I. Gọi D là một điểm thuộc dây AB. Tia MD cắt đường tròn (O) tại C.

a) Chứng minh rằng tứ giác CDIN nội tiếp được

b) Chứng minh rằng tích $MC \cdot MD$ có giá trị không đổi khi D di động trên dây AB.

c) Gọi O' là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Chứng minh rằng $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle AO'D$.

d) Chứng minh rằng ba điểm A, O', N thẳng hàng và MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD.

Bài 11:

Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên đoạn thẳng HC lấy D sao cho HD = HB. Vẽ CE vuông góc với AD ($E \in AD$).

- Chứng minh rằng AHEC là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHEC.
- Chứng minh rằng CH là tia phân giác của góc ACE.
- Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng CA, CH và cung nhỏ AH của đường tròn nói trên biết $AC = 6\text{cm}$, $\angle ACB = 30^\circ$.

Bài 12:

Cho đường tròn tâm O có đường kính BC. Gọi A là một điểm thuộc cung BC ($AB < AC$), D là điểm thuộc bán kính OC. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E, cắt tia BA ở F.

- Chứng minh rằng ADCF là tứ giác nội tiếp.
- Gọi M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\angle AME = 2 \angle ACB$.
- Chứng minh rằng AM là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- Tính diện tích hình giới hạn bởi các đoạn thẳng BC, BA và cung nhỏ AC của đường tròn (O) biết $BC = 8\text{cm}$, $\angle ABC = 60^\circ$.

Bài 13:

Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$. Điểm M thuộc nửa đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tiếp xúc với AB (H là tiếp điểm). Kẻ các tiếp tuyến AC, BD với đường tròn (M) (C, D là tiếp điểm).

- Chứng minh rằng C, M, D thẳng hàng
- Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- Tính tổng $AC + BD$ theo R.
- Tính diện tích tứ giác ABDC biết $\angle AOM = 60^\circ$.

Bài 14:

Cho tam giác vuông cân ABC ($\angle A = 90^\circ$), trung điểm I của cạnh BC. Xét một điểm D trên tia AC. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh AB, BD, DA tại các điểm tương ứng M, N, P.

- Chứng minh rằng 5 điểm B, M, O, I, N nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh rằng ba điểm N, I, P thẳng hàng.

- c) Gọi giao điểm của tia BO với MN, NP lần lượt là H, K. Tam giác HNK là tam giác gì, tại sao?
- d) Tìm tập hợp điểm K khi điểm D thay đổi vị trí trên tia AC.

Chủ đề 3: Chứng minh các điểm thẳng hàng, các đường thẳng đồng quy.

Bài 1:

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và C'. Đường thẳng AO' cắt đường tròn (O) và (O') lần lượt tại D và D'.

- a) Chứng minh C, B, D' thẳng hàng
- b) Chứng minh tứ giác ODC'O' nội tiếp
- c) Đường thẳng CD và đường thẳng D'C' cắt nhau tại M. Chứng minh tứ giác MCBC' nội tiếp.

Bài 2:

Từ một điểm C ở ngoài đường tròn (O) kẻ cát tuyến CBA. Gọi IJ là đường kính vuông góc với AB. Các đường thẳng CI, CJ theo thứ tự cắt đường tròn (O) tại M, N.

- a) Chứng minh rằng IN, JM và AB đồng quy tại một điểm D.
- b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, N đi qua trung điểm E của CD.

Bài 3:

Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc ngoài tại A ($R > R'$). Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') theo thứ tự tại B và C (B và C khác A). EF là dây cung của đường tròn (O) vuông góc với BC tại trung điểm I của BC, EC cắt đường tròn (O') tại D.

- a) Tứ giác BEFC là hình gì?
- b) Chứng minh ba điểm A, D, F thẳng hàng.
- c) CF cắt đường tròn (O') tại G. Chứng minh ba đường EG, DF và CI đồng quy.
- d) Chứng minh ID tiếp xúc với đường tròn (O').

Bài 4:

Cho đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại C. AC và BC là đường kính của (O) và (O'), DE là tiếp tuyến chung ngoài ($D \in (O), E \in (O')$). AD cắt BE tại M.

- a) Tam giác MAB là tam giác gì?
- b) Chứng minh MC là tiếp tuyến chung của (O) và (O').
- c) Kẻ Ex, By vuông góc với AE, AB. Ex cắt By tại N. Chứng minh D, N, C thẳng hàng.
- d) Về cùng phía của nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và OO'. Đường thẳng qua C cắt hai nửa đường tròn trên tại I, K. Chứng minh OI // AK.

Chủ đề 4: Chứng minh điểm cố định.

Bài 1:

Cho đường tròn $(O ; R)$. Đường thẳng d cắt (O) tại A, B . C thuộc d ở ngoài (O) . Từ điểm chính giữa P của cung lớn AB kẻ đường kính PQ cắt AB tại D . CP cắt (O) tại điểm thứ hai I , AB cắt IQ tại K .

- Chứng minh tứ giác $PDKI$ nội tiếp.
- Chứng minh: $CI.CP = CK.CD$.
- Chứng minh IC là phân giác ngoài của tam giác AIB .
- A, B, C cố định, (O) thay đổi nhưng vẫn luôn qua A, B . Chứng minh rằng IQ luôn đi qua điểm cố định.

Bài 2:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp $(O ; R)$. M di động trên AB . N di động trên tia đối của tia CA sao cho $BM = CN$.

- Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại A và D . Chứng minh rằng D cố định.
- Tính góc MDN .
- MN cắt BC tại K . Chứng minh DK vuông góc với MN .
- Đặt $AM = x$. Tính x để diện tích tam giác AMN là lớn nhất.

Bài 3:

Cho $(O ; R)$. Điểm M cố định ở ngoài (O) . Cát tuyến qua M cắt (O) tại A và B . Tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại C .

- Chứng minh tứ giác $OACB$ nội tiếp đường tròn tâm K .
- Chứng minh: (K) qua hai điểm cố định là O và H khi cát tuyến quay quanh M .
- CH cắt AB tại N , I là trung điểm AB . Chứng minh $MA.MB = MI.MN$.
- Chứng minh: $IM.IN = IA^2$.

Bài 4:

Cho nửa đường tròn đường kính AB tâm O . C là điểm chính giữa cung AB . M di động trên cung nhỏ AC . Lấy N thuộc BM sao cho $AM = BN$.

- So sánh tam giác AMC và BCN .
- Tam giác CMN là tam giác gì?
- Kẻ dây $AE // MC$. Chứng minh tứ giác $BECN$ là hình bình hành.
- Đường thẳng d đi qua N và vuông góc với BM . Chứng minh d luôn đi qua điểm cố định.

Bài 5:

Cho đường tròn $(O ; R)$, đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D . Điểm M tùy ý trên d , kẻ tiếp tuyến MA, MB . I là trung điểm của CD .

- Chứng minh 5 điểm M, A, I, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- Gọi H là trực tâm của tam giác MAB , tứ giác $OAHB$ là hình gì?
- Khi M di động trên d . Chứng minh rằng AB luôn qua điểm cố định.
- Đường thẳng qua C vuông góc với OA cắt AB, AD lần lượt tại E và K . Chứng minh $EC = EK$.

Chủ đề 5: Chứng minh hai tam giác đồng dạng và chứng minh đẳng thức hình học.

Bài 1:

Cho đường tròn (O) và dây AB . M là điểm chính giữa cung AB . C thuộc AB , dây MD qua C .

- Chứng minh $MA^2 = MC.MD$.
- Chứng minh $MB.BD = BC.MD$.
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tiếp xúc với MB tại B .
- Gọi R_1, R_2 là bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD . Chứng minh $R_1 + R_2$ không đổi khi C di động trên AB .

Bài 2:

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ và một điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của nửa đường tròn cắt các tiếp tuyến tại A, B lần lượt ở C và E .

- Chứng minh rằng $CE = AC + BE$.
- Chứng minh $AC.BE = R^2$.
- Chứng minh tam giác AMB đồng dạng với tam giác COE .
- Xét trường hợp hai đường thẳng AB và CE cắt nhau tại F . Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB .

+ Chứng minh rằng: $\frac{HA}{HB} = \frac{FA}{FB}$.

+ Chứng minh tích $OH.OF$ không đổi khi M di động trên nửa đường tròn.

Bài 3:

Trên cung BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC lấy một điểm P bất kì. Các đường thẳng AP và BC cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

Bài 4:

Cho góc vuông xOy. Trên tia Ox đặt đoạn OA = a. Dựng đường tròn (I ; R) tiếp xúc với Ox tại A và cắt Oy tại hai điểm B, C. Chứng minh các hệ thức:

a) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2}$.

b) $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

Chủ đề 6: Các bài toán về tính số đo góc và số đo diện tích.

Bài 1:

Cho hai đường tròn (O; 3cm) và (O'; 1 cm) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC (B ∈ (O); C ∈ (O')).

a) Chứng minh rằng góc O'OB bằng 60°.

b) Tính độ dài BC.

c) Tính diện tích hình giới hạn bởi tiếp tuyến BC và các cung AB, AC của hai đường tròn.

Bài 2:

Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 cm, CB = 40 cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) ở E. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

a) Chứng minh rằng EC = MN.

b) Chứng minh rằng MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

c) Tính độ dài MN.

d) Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn.

Bài 3:

Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn. Từ một điểm M trên cung nhỏ BC kẻ một tiếp tuyến thứ ba cắt hai tiếp tuyến kia tại P và Q.

a) Chứng minh rằng: Khi điểm M chuyển động trên cung BC nhỏ thì chu vi tam giác APQ có giá trị không đổi.

b) Cho biết $\angle BAC = 60^\circ$ và bán kính của đường tròn (O) bằng 6 cm. Tính độ dài của tiếp tuyến AB và diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến AB, AC và cung nhỏ BC.

Bài 4:

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, O là trung điểm của IK.

- a) Chứng minh rằng: 4 điểm B, I, C, K cùng thuộc một đường tròn.
- b) Chứng minh rằng: AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- c) Tính bán kính của đường tròn (O) biết $AB = AC = 20$ cm, $BC = 24$ cm.

hoc360.net