

Chủ đề 2: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI – ĐỊNH LÝ VI-ÉT.

Dạng 1: Giải phương trình bậc hai.

Bài 1: Giải các phương trình

1) $x^2 - 6x + 14 = 0$;

2) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;

3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;

4) $-30x^2 + 30x - 7,5 = 0$;

5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;

6) $x^2 - 2x - 2 = 0$;

7) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3(x + \sqrt{2})$;

8) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x + 1)$;

9) $x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 2\sqrt{3} = 0$.

Bài 2: Giải các phương trình sau bằng cách nhân nghiệm:

1) $3x^2 - 11x + 8 = 0$;

2) $5x^2 - 17x + 12 = 0$;

3) $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$;

4) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$;

5) $3x^2 - 19x - 22 = 0$;

6) $5x^2 + 24x + 19 = 0$;

7) $(\sqrt{3} + 1)x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$;

8) $x^2 - 11x + 30 = 0$;

9) $x^2 - 12x + 27 = 0$;

10) $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Dạng 2: Chứng minh phương trình có nghiệm, vô nghiệm.

Bài 1: Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm.

1) $x^2 - 2(m - 1)x - 3 - m = 0$;

2) $x^2 + (m + 1)x + m = 0$;

3) $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$;

4) $x^2 + 2(m + 2)x - 4m - 12 = 0$;

5) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$;

6) $x^2 - 2x - (m - 1)(m - 3) = 0$;

7) $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$;

8) $(m + 1)x^2 - 2(2m - 1)x - 3 + m = 0$

9) $ax^2 + (ab + 1)x + b = 0$.

Bài 2:

a) Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực thì phương trình sau luôn có nghiệm:

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

b) Chứng minh rằng với ba số thức a, b, c phân biệt thì phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c} = 0 \quad (\text{ẩn } x)$$

c) Chứng minh rằng phương trình: $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$ vô nghiệm với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

d) Chứng minh rằng phương trình bậc hai:

$$(a + b)^2x^2 - (a - b)(a^2 - b^2)x - 2ab(a^2 + b^2) = 0 \text{ luôn có hai nghiệm phân biệt.}$$

Bài 3:

a) Chứng minh rằng ít nhất một trong các phương trình bậc hai sau đây có nghiệm:

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 + 2cx + a = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 + 2ax + b = 0 \quad (3)$$

b) Cho bốn phương trình (ẩn x) sau:

$$x^2 + 2ax + 4b^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 2bx + 4a^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 4ax + b^2 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 4bx + a^2 = 0 \quad (4)$$

Chứng minh rằng trong các phương trình trên có ít nhất 2 phương trình có nghiệm.

c) Cho 3 phương trình (ẩn x) sau:

$$ax^2 - \frac{2b\sqrt{b+c}}{b+c}x + \frac{1}{c+a} = 0 \quad (1)$$

$$bx^2 - \frac{2c\sqrt{c+a}}{c+a}x + \frac{1}{a+b} = 0 \quad (2)$$

$$cx^2 - \frac{2a\sqrt{a+b}}{a+b}x + \frac{1}{b+c} = 0 \quad (3)$$

với a, b, c là các số dương cho trước.

Chứng minh rằng trong các phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm.

Bài 4:

a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Biết $a \neq 0$ và $5a + 4b + 6c = 0$, chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm.

b) Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm nếu một trong hai điều kiện sau được thoả mãn:

$$a(a + 2b + 4c) < 0 ;$$

$$5a + 3b + 2c = 0.$$

Dạng 3: Tính giá trị của biểu thức đối xứng, lập phương trình bậc hai nhờ nghiệm của phương trình bậc hai cho trước.

Bài 1: Gọi x_1 ; x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 - 3x - 7 = 0$.

Tính:

$$A = x_1^2 + x_2^2;$$

$$B = |x_1 - x_2|;$$

$$C = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1};$$

$$D = (3x_1 + x_2)(3x_2 + x_1);$$

$$E = x_1^3 + x_2^3;$$

$$F = x_1^4 + x_2^4$$

Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là $\frac{1}{x_1 - 1}$ và $\frac{1}{x_2 - 1}$.

Bài 2: Gọi x_1 ; x_2 là hai nghiệm của phương trình: $5x^2 - 3x - 1 = 0$. Không giải phương trình, tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2;$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} - \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right)^2;$$

$$C = \frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}{4x_1x_2^2 + 4x_1^2x_2}.$$

Bài 3:

a) Gọi p và q là nghiệm của phương trình bậc hai: $3x^2 + 7x + 4 = 0$. Không giải phương trình hãy thành lập phương trình bậc hai với hệ số bằng số mà các nghiệm của nó là $\frac{p}{q-1}$ và $\frac{q}{p-1}$.

b) Lập phương trình bậc hai có 2 nghiệm là $\frac{1}{10 - \sqrt{72}}$ và $\frac{1}{10 + 6\sqrt{2}}$.

Bài 4: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có hai nghiệm x_1 ; x_2 với mọi m .

b) Với $m \neq 0$, lập phương trình ẩn y thoả mãn $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$ và $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$.

Bài 5: Không giải phương trình $3x^2 + 5x - 6 = 0$. Hãy tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = (3x_1 - 2x_2)(3x_2 - 2x_1);$$

$$B = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_1 - 1};$$

$$C = |x_1 - x_2|;$$

$$D = \frac{x_1 + 2}{x_1} + \frac{x_2 + 2}{x_2}$$

Bài 6: Cho phương trình $2x^2 - 4x - 10 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Không giải phương trình hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn: $y_1 = 2x_1 - x_2 ; y_2 = 2x_2 - x_1$

Bài 7: Cho phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$a) \begin{cases} y_1 = x_1 + 2 \\ y_2 = x_2 + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1 = \frac{x_1^2}{x_2} \\ y_2 = \frac{x_2^2}{x_1} \end{cases}$$

Bài 8: Cho phương trình $x^2 + x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy thiết lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$a) \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} = 3x_1 + 3x_2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_1^2 + y_2^2 + 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Bài 9: Cho phương trình $2x^2 + 4ax - a = 0$ (a tham số, $a \neq 0$) có hai nghiệm $x_1 ; x_2$. Hãy lập phương trình ẩn y có hai nghiệm $y_1 ; y_2$ thoả mãn:

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = x_1 + x_2$$

Dạng 4: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm kép, vô nghiệm.

Bài 1:

a) Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x - m = 0$ (ẩn x).

Xác định m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

b) Cho phương trình $(2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2 = 0$.

Tìm m để phương trình có nghiệm.

a) Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm.

- Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó.

b) Cho phương trình: $(a - 3)x^2 - 2(a - 1)x + a - 5 = 0$.

Tìm a để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 2:

a) Cho phương trình: $\frac{4x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{2(2m - 1)x}{x^2 + 1} + m^2 - m - 6 = 0$.

Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm.

b) Cho phương trình: $(m^2 + m - 2)(x^2 + 4)^2 - 4(2m + 1)x(x^2 + 4) + 16x^2 = 0$. Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm.

Dạng 5: Xác định tham số để các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thoả mãn điều kiện cho trước.

Bài 1: Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 4m = 0$

1) Xác định m để phương trình có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó.

2) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 4. Tính nghiệm còn lại.

3) Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu (trái dấu)

4) Với điều kiện nào của m thì phương trình có hai nghiệm cùng dương (cùng âm).

5) Định m để phương trình có hai nghiệm sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

6) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thoả mãn $2x_1 - x_2 = -2$.

7) Định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ sao cho $A = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Bài 2: Định m để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức đã chỉ ra:

a) $(m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + m - 3 = 0 ;$ $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

b) $mx^2 - (m - 4)x + 2m = 0 ;$ $2(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1x_2$

c) $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0 ;$ $4(x_1^2 + x_2^2) = 5x_1^2x_2^2$

d) $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0 ;$ $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$.

Bài 3: Định m để phương trình có nghiệm thoả mãn hệ thức đã chỉ ra:

a) $x^2 + 2mx - 3m - 2 = 0 ;$ $2x_1 - 3x_2 = 1$

- b) $x^2 - 4mx + 4m^2 - m = 0$; $x_1 = 3x_2$
c) $mx^2 + 2mx + m - 4 = 0$; $2x_1 + x_2 + 1 = 0$
d) $x^2 - (3m - 1)x + 2m^2 - m = 0$; $x_1 = x_2^2$
e) $x^2 + (2m - 8)x + 8m^3 = 0$; $x_1 = x_2^2$
f) $x^2 - 4x + m^2 + 3m = 0$; $x_1^2 + x_2 = 6$.

Bài 4:

- a) Cho phương trình: $(m + 2)x^2 - (2m - 1)x - 3 + m = 0$. Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$ sao cho nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.
b) Cho phương trình bậc hai: $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ sao cho biểu thức $R = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.
c) Định m để hiệu hai nghiệm của phương trình sau đây bằng 2.

$$mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0.$$

Bài 5: Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia là $9ac = 2b^2$.

Bài 6: Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm mà nghiệm này gấp k lần nghiệm kia ($k > 0$) là :

$$kb^2 = (k + 1)^2 \cdot ac$$

Dạng 6: So sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số.

Bài 1:

- a) Cho phương trình $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm $x_1 ; x_2$ thoả mãn $1 < x_1 < x_2 < 6$.
b) Cho phương trình $2x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$ thoả mãn: $-1 < x_1 < x_2 < 1$.

Bài 2: Cho $f(x) = x^2 - 2(m + 2)x + 6m + 1$.

- a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm với mọi m .
b) Đặt $x = t + 2$. Tính $f(x)$ theo t , từ đó tìm điều kiện đối với m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2.

Bài 3: Cho phương trình bậc hai: $x^2 + 2(a + 3)x + 4(a + 3) = 0$.

- a) Với giá trị nào của tham số a , phương trình có nghiệm kép. Tính các nghiệm kép.

b) Xác định a để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

Bài 4: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 1)x - (m + 1) = 0$.

a) Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 1 và một nghiệm lớn hơn 1.

b) Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 2.

Bài 5: Tìm m để phương trình: $x^2 - mx + m = 0$ có nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq -2 \leq x_2$.

Dạng 7: Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình bậc hai không phụ thuộc tham số.

Bài 1:

a) Cho phương trình: $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào tham số m.

b) Cho phương trình bậc hai: $(m - 2)x^2 - 2(m + 2)x + 2(m - 1) = 0$. Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

c) Cho phương trình: $8x^2 - 4(m - 2)x + m(m - 4) = 0$. Định m để phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 . Tìm hệ thức giữa hai nghiệm độc lập với m, suy ra vị trí của các nghiệm đối với hai số -1 và 1 .

Bài 2: Cho phương trình bậc hai: $(m - 1)^2x^2 - (m - 1)(m + 2)x + m = 0$. Khi phương trình có nghiệm, hãy tìm một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc vào tham số m.

Bài 3: Cho phương trình: $x^2 - 2mx - m^2 - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm x_1 , x_2 với mọi m.

b) Tìm biểu thức liên hệ giữa x_1 ; x_2 không phụ thuộc vào m.

c) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{2}$.

Bài 4: Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m = 0$.

a) Giải và biện luận phương trình theo m.

b) Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 ; x_2 :

- Tìm một hệ thức giữa x_1 ; x_2 độc lập với m.

- Tìm m sao cho $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Bài 5: Cho phương trình $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình có hai nghiệm x_1 ; x_2 thì: $4x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$.

Dạng 8: Mỗi quan hệ giữa các nghiệm của hai phương trình bậc hai.

Kiến thức cần nhớ:

1/ Định giá trị của tham số để phương trình này có một nghiệm bằng k ($k \neq 0$) lần một nghiệm của phương trình kia:

Xét hai phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \quad (2)$$

trong đó các hệ số a, b, c, a', b', c' phụ thuộc vào tham số m .

Định m để sao cho phương trình (2) có một nghiệm bằng k ($k \neq 0$) lần một nghiệm của phương trình (1), ta có thể làm như sau:

- i)* Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình (1) thì kx_0 là một nghiệm của phương trình (2), suy ra hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ a'k^2x_0^2 + b'kx_0 + c' = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp thế hoặc cộng đại số để tìm m .

- ii)* Thay các giá trị m vừa tìm được vào hai phương trình (1) và (2) để kiểm tra lại.

2/ Định giá trị của tham số m để hai phương trình bậc hai tương đương với nhau.

Xét hai phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (3)$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0 \quad (a' \neq 0) \quad (4)$$

Hai phương trình (3) và (4) tương đương với nhau khi và chỉ khi hai phương trình có cùng 1 tập nghiệm (kể cả tập nghiệm là rỗng).

Do đó, muốn xác định giá trị của tham số để hai phương trình bậc hai tương đương với nhau ta xét hai trường hợp sau:

- i)* Trường hợp cả hai phương trình cùng vô nghiệm, tức là:

$$\begin{cases} \Delta_{(3)} < 0 \\ \Delta_{(4)} < 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta tìm được giá trị của tham số.

- ii)* Trường hợp cả hai phương trình đều có nghiệm, ta giải hệ sau:

$$\begin{cases} \Delta_{(3)} \geq 0 \\ \Delta_{(4)} \geq 0 \\ S_{(3)} = S_{(4)} \\ P_{(3)} = P_{(4)} \end{cases}$$

Chú ý: Bằng cách đặt $y = x^2$ hệ phương trình (*) có thể đưa về hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn như sau:

$$\begin{cases} bx + ay = -c \\ b'x + a'y = -c' \end{cases}$$

Để giải quyết tiếp bài toán, ta làm như sau:

- Tìm điều kiện để hệ có nghiệm rồi tính nghiệm (x ; y) theo m.
- Tìm m thỏa mãn $y = x^2$.
- Kiểm tra lại kết quả.
-

Bài 1: Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung:

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$$

Bài 2: Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó:

$$\text{a) } 2x^2 + (3m + 1)x - 9 = 0; \quad 6x^2 + (7m - 1)x - 19 = 0.$$

$$\text{b) } 2x^2 + mx - 1 = 0; \quad mx^2 - x + 2 = 0.$$

$$\text{c) } x^2 - mx + 2m + 1 = 0; \quad mx^2 - (2m + 1)x - 1 = 0.$$

Bài 3: Xét các phương trình sau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$cx^2 + bx + a = 0 \quad (2)$$

Tìm hệ thức giữa a, b, c là điều kiện cần và đủ để hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

Bài 4: Cho hai phương trình:

$$x^2 - 2mx + 4m = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - mx + 10m = 0 \quad (2)$$

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (2) có một nghiệm bằng hai lần một nghiệm của phương trình (1).

Bài 5: Cho hai phương trình:

$$x^2 + x + a = 0$$

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

- Tìm các giá trị của a để cho hai phương trình trên có ít nhất một nghiệm chung.
- Với những giá trị nào của a thì hai phương trình trên tương đương.

Bài 6: Cho hai phương trình:

$$x^2 + mx + 2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2x + m = 0 \quad (2)$$

- Định m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.
- Định m để hai phương trình tương đương.
- Xác định m để phương trình $(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Bài 7: Cho các phương trình:

$$x^2 - 5x + k = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 7x + 2k = 0 \quad (2)$$

Xác định k để một trong các nghiệm của phương trình (2) lớn gấp 2 lần một trong các nghiệm của phương trình (1).