

**Dạng III:**

Phương trình và Hệ Phương trình

**A/ Phương trình bậc nhất một ẩn – giải và biện luận:**

+ Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng  $ax + b = 0 (a \neq 0)$

+ Giải và biện luận:

- Nếu  $a = 0; b = 0$  thì Phương trình vô số nghiệm.

- Nếu  $a = 0; b \neq 0$  thì Phương trình vô nghiệm.

- Nếu  $a \neq 0$  thì Phương trình có một nghiệm duy nhất  $x = -\frac{b}{a}$

**ví dụ:** Giải và biện luận Phương trình sau:  $4m^2(x-1) = x - 4m + 1$

Giải:  $4m^2(x-1) = x - 4m + 1 \Leftrightarrow 4m^2x - 4m^2 - x = -4m + 1 \Leftrightarrow (4m^2 - 1)x = 4m^2 - 4m + 1$

$\Leftrightarrow (2m+1)(2m-1)x = (2m-1)^2$

Biện luận: + Nếu  $m \neq \pm \frac{1}{2}$  thì Phương trình có một nghiệm:  $x = \frac{2m-1}{2m+1}$

+ Nếu  $m = \frac{1}{2}$  thì Phương trình có dạng:  $0.x = 0$  nên Phương trình vô số nghiệm.

+ Nếu  $m = -\frac{1}{2}$  thì Phương trình có dạng:  $0.x = 2.(-\frac{1}{2}) \neq 0$  nên Phương trình vô

nghiệm.

**Bài tập:** Giải và biện luận các Phương trình sau:

**Bài 1.**  $\frac{m(x-1)}{2} - \frac{m+x}{3} = 2$

**Bài 2.**  $\frac{x+a-2}{a-1} + \frac{x-a}{a+1} + \frac{x+2a}{1-a^2} = 0 (a \neq \pm 1)$  HD: Quy đồng- thu gọn- đưa về dạng  $ax + b = 0$

**Bài 3.**  $\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} = 1 - \frac{4x}{a+b+c} (a; b; c; \neq 0; a+b+c \neq 0).$

HD:

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-x}{c} + 1 + \frac{a+c-x}{b} + 1 + \frac{b+c-x}{a} + 1 = 4 - \frac{4x}{a+b+c} \quad \frac{a+b-x}{c} + 1 + \frac{a+c-x}{b} + 1 + \frac{b+c-x}{a} + 1 = 3 + 1 -$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-x) \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c-x) \cdot \frac{a+b+c}{abc} - \frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-x) \left( \frac{a+b+c}{abc} - \frac{4}{a+b+c} \right) = 0 \Leftrightarrow (a+b+c-x) \left[ \frac{(a+b+c)^2 - 4abc}{abc(a+b+c)} \right] = 0$$

Nếu  $[...] \neq 0 \Rightarrow (a+b+c-x) = 0 \Leftrightarrow x = a+b+c$

Nếu  $[...] = 0$  thì Phương trình vô số nghiệm.

**b. hệ Phương trình bậc nhất có hai ẩn số:**

+ Dạng tổng quát: 
$$\begin{cases} ax + b = 0 \\ a'x + b' = 0 \end{cases}$$

+ Cách giải:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.

+ Số nghiệm số:

- Nếu  $a \neq a'$  Thì hệ Phương trình có một nghiệm .
- Nếu  $a = a'; b = b'; c \neq c'$  Thì hệ Phương trình có vô nghiệm .
- Nếu  $a = a'; b = b'; c = c'$  Thì hệ Phương trình có vô số nghiệm.

+ Tập nghiệm của mỗi Phương trình biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là đồ thị hàm số dạng:  
 $y = ax + b$

**Ví dụ:** Giải các HPT sau:

**Bài1:** 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

**Giải:**

+ Dùng PP thế: 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2x - 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy HPT đã cho có nghiệm là: 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

+ Dùng PP cộng: 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3 \cdot 2 + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy HPT đã cho có nghiệm là: 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

**Bài2:** 
$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$$
 Để giải loại HPT này ta thường sử dụng PP cộng cho thuận lợi.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 15y = -10 \\ 10x + 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11y = -22 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ 5x + 2 \cdot (-2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy HPT có nghiệm là 
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

**Bài 3:** 
$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y} = -1 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{5}{y} = -1 \end{cases}$$

**\*Đối với HPT ở dạng này ta có thể sử dụng hai cách giải sau đây:**

+ Cách 1: Sử dụng PP cộng. ĐK:  $x \neq -1, y \neq 0$ .

$$\begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y} = -1 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{5}{y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{y} = 2 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{5}{y} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{5}{1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{2}{x+1} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy HPT có nghiệm là 
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

+ Cách 2: Sử dụng PP đặt ẩn phụ. ĐK:  $x \neq -1, y \neq 0$ .

Đặt  $\frac{1}{x+1} = a$ ;  $\frac{1}{y} = b$ . HPT đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2a + 3b = -1 \\ 2a + 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5 \cdot 1 = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} = -2 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy HPT có nghiệm là 
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Lưu ý: - Nhiều em còn thiếu ĐK cho những HPT ở dạng này.

- Có thể thử lại nghiệm của HPT vừa giải.

### **Bài tập về hệ Phương trình:**

#### **Bài 1: Giải các hệ phương trình sau (bằng pp thế)**

1.1: a) 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$
 b) 
$$\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$$

1.2. a) 
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ x\sqrt{2} + y = \sqrt{2} \end{cases}$$

#### **Bài 2: Giải các hệ phương trình sau (bằng pp cộng đại số)**

2.1. a) 
$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$
 b) 
$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$
 c) 
$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$2.2. a) \begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ (m^2 + 1)x + 6y = 2m \end{cases}$  trong mỗi trường hợp sau

a)  $m = -1$

b)  $m = 0$

c)  $m = 1$

**Bài 4** a) Xác định hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình  $\begin{cases} 2x + by = 4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$  có nghiệm là (1; -2)

b) Cũng hỏi như vậy nếu hệ phương trình có nghiệm là  $(\sqrt{2} - 1; \sqrt{2})$

**Bài 5:** Giải hệ phương trình sau:  $\begin{cases} 2x + y = \sqrt{2} \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

a) Từ đó suy ra nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} \frac{2m}{m+1} + \frac{n}{n+1} = \sqrt{2} \\ \frac{m}{m+1} + \frac{3n}{n+1} = -1 \end{cases}$

**Bài 6:** Cho hệ Phương trình  $\begin{cases} 2x - ay = b \\ ax + by = 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi  $a = 3$  ;  $b = -2$

b) Tìm a; b để hệ có nghiệm là  $(x; y) = (\sqrt{2}; \sqrt{3})$

**Bài 7:** Giải các hệ Phương trình sau: (pp đặt ẩn phụ)

$$7.1) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} = 2 \\ \frac{5}{x+y} - \frac{4}{x-y} = 3 \end{cases} \quad 7.2) \begin{cases} 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y} = -8 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \quad 7.3) \begin{cases} 3\sqrt{x-2} - 4\sqrt{y-2} = 3 \\ 2\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2} = 1 \end{cases} \text{ (đk } x; y \geq 2)$$

$$7.4) \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 3 - 2\sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + 3y = 6 + \sqrt{2} \end{cases} ; \quad 7.5) \begin{cases} (x+1) + 2(y-2) = 5 \\ 3(x+1) - (y-2) = 1 \end{cases} ; \quad 7.6)$$

$$\begin{cases} (x+5)(y-2) = (x+2)(y-1) \\ (x-4)(y+7) = (x-3)(y+4) \end{cases}$$

$$7.7) \begin{cases} (x-1)(y-2) + (x+1)(y-3) = 4 \\ (x-3)(y+1) - (x-3)(y-5) = 1 \end{cases} ; \quad 7.8) \begin{cases} 3(x+y) + 5(x-y) = 12 \\ -5(x+y) + 2(x-y) = 11 \end{cases} ;$$

$$7.9) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases}; \quad 7.10) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} = 2 \\ \frac{5}{x+y} - \frac{4}{x-y} = 3 \end{cases}; \quad 7.11) \begin{cases} \frac{1}{2x-3y} + \frac{5}{3x+y} = \frac{5}{8} \\ \frac{3}{2x-3y} - \frac{5}{3x+y} = -\frac{3}{8} \end{cases};$$

.....

### c. Phương trình bậc hai - hệ thức vi - ét

#### 1. Cách giải Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a \neq 0$ ) $\Delta = b^2 - 4ac$

\* Nếu  $\Delta > 0$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

\* Nếu  $\Delta = 0$  Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

\* Nếu  $\Delta < 0$  thì Phương trình vô nghiệm

**Chú ý:** Trong trường hợp hệ số  $b$  là số chẵn thì giải Phương trình trên bằng công thức nghiệm thu gọn:

$$b' = \frac{1}{2}b \quad \forall \Delta' = b'^2 - ac$$

\* Nếu  $\Delta' > 0$  Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

\* Nếu  $\Delta' = 0$  Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

\* Nếu  $\Delta' < 0$  thì Phương trình vô nghiệm.

**2. Định lý Vi ét:** Nếu  $x_1, x_2$  là nghiệm của Phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ p = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Đảo lại: Nếu có hai số  $x_1, x_2$  mà  $x_1 + x_2 = S$  và  $x_1 x_2 = p$  thì hai số đó là nghiệm (nếu có) của Phương trình bậc 2:  $x^2 - Sx + p = 0$

### 3. Toán ứng dụng định lý Viét

#### I. Tính nhẩm nghiệm.

Xét Phương trình bậc hai:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

- Nếu  $a + b + c = 0$  thì Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = 1$  ,  $x_2 = \frac{c}{a}$
- Nếu  $a - b + c = 0$  thì Phương trình có hai nghiệm  $x_1 = -1$  ,  $x_2 = -\frac{c}{a}$
- Nếu  $x_1 + x_2 = m + n$  ,  $x_1 x_2 = mn$  và  $\Delta \geq 0$  thì Phương trình có nghiệm  $x_1 = m$  ,  $x_2 = n$  ( hoặc  $x_1 = n$  ,  $x_2 = m$  )

## II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### 1. Lập Phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm $x_1; x_2$

Ví dụ : Cho  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 2$  lập một Phương trình bậc hai chứa hai nghiệm tròn

Theo hệ thức VI-ãT ta cú  $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 5 \\ P = x_1 x_2 = 6 \end{cases}$  vậy  $x_1; x_2$  là nghiệm của Phương trình cú dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

### Bài tập áp dụng:

1.  $x_1 = 8$  và  $x_2 = -3$
2.  $x_1 = 3a$  và  $x_2 = a$
3.  $x_1 = 36$  và  $x_2 = -104$
4.  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$  và  $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

### 2. Lập Phương trình bậc hai cú hai nghiệm thoả món biểu thức chứa hai nghiệm của một Phương trình cho trước:

Ví dụ: Cho Phương trình :  $x^2 - 3x + 2 = 0$  cú 2 nghiệm phõn biệt  $x_1; x_2$ . Không giải Phương trình tròn, hóy lập Phương trình bậc 2 cú ẩn là  $y$  thoả món :  $y_1 = x_2 + \frac{1}{x_1}$  và  $y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2}$

Theo h ệ th úc VI- ãT ta c ú:

$$S = y_1 + y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1} + x_1 + \frac{1}{x_2} = (x_1 + x_2) + \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P = y_1 y_2 = \left( x_2 + \frac{1}{x_1} \right) \left( x_1 + \frac{1}{x_2} \right) = x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = 2 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Vậy Phương trình cần lập cú dạng:  $y^2 - Sy + P = 0$

$$\text{hay } y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$$

### Bài tập áp dụng:

1/ Cho Phương trình  $3x^2 + 5x - 6 = 0$  cú 2 nghiệm phõn biệt  $x_1; x_2$ . Không giải Phương trình,

Hóy lập Phương trình bậc hai cú cõc nghiệm  $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}$  và  $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$

$$(\text{Đáp số: } y^2 + \frac{5}{6}y - \frac{1}{2} = 0 \text{ hay } 6y^2 + 5y - 3 = 0)$$

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

2/ Cho Phương trình :  $x^2 - 5x - 1 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1; x_2$ . Hóy lập Phương trình bậc 2 có ẩn y thoả mãn  $y_1 = x_1^4$  và  $y_2 = x_2^4$  (có nghiệm là lũy thừa bậc 4 của các nghiệm của Phương trình đó cho).

$$(\text{Đáp số : } y^2 - 727y + 1 = 0)$$

3/ Cho Phương trình bậc hai:  $x^2 - 2x - m^2 = 0$  có nghiệm  $x_1; x_2$ . Hóy lập Phương trình bậc hai có nghiệm  $y_1; y_2$  sao cho :

$$\text{a) } y_1 = x_1 - 3 \quad \text{và} \quad y_2 = x_2 - 3$$

$$\text{b) } y_1 = 2x_1 - 1 \quad \text{và} \quad y_2 = 2x_2 - 1$$

$$(\text{Đáp số } \quad \text{a) } y^2 - 4y + 3 - m^2 = 0$$

$$\text{b) } y^2 - 2y - (4m^2 - 3) = 0$$

### III. TÌM HAI SỐ BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Nếu hai số có Tổng bằng S và Tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của Phương trình :

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (\text{Điều kiện để có hai số đó là } S^2 - 4P \geq 0)$$

Ví dụ : Tìm hai số a, b biết tổng  $S = a + b = -3$  và tích  $P = ab = -4$

Vỡ  $a + b = -3$  và  $ab = -4$  n nên a, b là nghiệm của Phương trình :  $x^2 + 3x - 4 = 0$  giải Phương trình tròn ta được  $x_1 = 1$  và  $x_2 = -4$

Vậy nếu  $a = 1$  thì  $b = -4$

nếu  $a = -4$  thì  $b = 1$

**Bài tập áp dụng**: Tìm 2 số a và b biết Tổng S và Tích P

$$1. \quad S = 3 \quad \text{và} \quad P = 2$$

$$2. \quad S = -3 \quad \text{và} \quad P = 6$$

$$3. \quad S = 9 \quad \text{và} \quad P = 20$$

$$4. \quad S = 2x \quad \text{và} \quad P = x^2 - y^2$$

**Bài tập nâng cao**: Tìm 2 số a và b biết

$$1. \quad a + b = 9 \quad \text{và} \quad a^2 + b^2 = 41$$

$$2. \quad a - b = 5 \quad \text{và} \quad ab = 36$$

$$3. \quad a^2 + b^2 = 61 \quad \text{và} \quad ab = 30$$

**Hướng dẫn**: 1) Theo đề bài đó biết tổng của hai số a và b, vậy để áp dụng hệ thức VI-ÉT thì cần Tìm tích của a và b.

$$\text{Từ } a + b = 9 \Rightarrow (a + b)^2 = 81 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 81 \Leftrightarrow ab = \frac{81 - (a^2 + b^2)}{2} = 20$$

$$\text{Suy ra : a, b là nghiệm của Phương trình có dạng : } x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Vậy: Nếu  $a = 4$  thì  $b = 5$

nếu  $a = 5$  thì  $b = 4$

2)Biết tích:  $ab = 36$  do đó cần Tìm tổng :  $a + b$

**Cách 1**: Đặt  $c = -b$  ta có :  $a + c = 5$  và  $a.c = -36$

Suy ra a,c là nghiệm của Phương trình :  $x^2 - 5x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Do đó nếu a = -4 thì c = 9 còn b = -9  
nếu a = 9 thì c = -4 còn b = 4

Cách 2: Từ  $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \Rightarrow (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab = 169$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 13^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b = -13 \\ a+b = 13 \end{cases}$$

\*) Với  $a+b = -13$  và  $ab = 36$ , nên a, b là nghiệm của Phương trình :

$$x^2 + 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -9 \end{cases}$$

Vậy a = -4 thì b = -9

\*) Với  $a+b = 13$  và  $ab = 36$ , nên a, b là nghiệm của Phương trình :  $x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 9 \end{cases}$

Vậy a = 9 thì b = 4

3) Đó biết  $ab = 30$ , do đó cần Tìm a + b:

$$\text{Từ: } a^2 + b^2 = 61 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 61 + 2.30 = 121 = 11^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b = -11 \\ a+b = 11 \end{cases}$$

\*) Nếu  $a+b = -11$  và  $ab = 30$  thì a, b là hai nghiệm của Phương trình:

$$x^2 + 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

Vậy nếu a = -5 thì b = -6 ; nếu a = -6 thì b = -5

\*) Nếu  $a+b = 11$  và  $ab = 30$  thì a, b là hai nghiệm của Phương trình :

$$x^2 - 11x + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

Vậy nếu a = 5 thì b = 6 ; nếu a = 6 thì b = 5.

#### **IV. Tìm điều kiện của tham số để Phương trình bậc hai có một nghiệm $x = x_1$ cho trước .Tìm nghiệm thứ 2**

##### **Cách giải:**

- Tìm điều kiện để Phương trình có nghiệm  $x = x_1$  cho trước có hai cách làm:

+) **Cách 1:** - Lập điều kiện để Phương trình bậc 2 đã cho có 2 nghiệm:  $\Delta \geq 0$  (hoặc  $\Delta' \geq 0$ )  
(\* )

- Thay  $x = x_1$  vào Phương trình đã cho , tìm được giá trị của tham số
- Đối chiếu giá trị vừa tìm được của tham số với điều kiện(\*) để kết luận

+) **Cách 2:** - Không cần lập điều kiện  $\Delta \geq 0$  (hoặc  $\Delta' \geq 0$ ) mà ta thay luôn  $x = x_1$  vào Phương trình đã cho, tìm được giá trị của tham số

- Sau đó thay giá trị tìm được của tham số vào Phương trình và giải Phương trình

**Chú ý :** Nếu sau khi thay giá trị của tham số vào Phương trình , mà Phương trình bậc hai này có



$\Delta < 0$  thì kết luận không có giá trị nào của tham số để Phương trình có nghiệm  $x_1$  cho trước.

- Để tìm nghiệm thứ 2 ta có 3 cách làm:

+) **Cách 1:** Thay giá trị của tham số tìm được vào Phương trình rồi giải Phương trình (như cách 2 trình bày ở trên)

+) **Cách 2:** Thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tổng 2 nghiệm sẽ tìm được nghiệm thứ 2

+) **Cách 3:** thay giá trị của tham số tìm được vào công thức tích hai nghiệm, từ đó tìm được nghiệm thứ 2

### V. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA CÁC BIỂU THỨC NGHIỆM

Đối các bài toán dạng này điều quan trọng nhất là các em phải biết biến đổi biểu thức nghiệm đó cho về biểu thức cú chứa tổng nghiệm  $x_1 + x_2$  và tích nghiệm  $x_1 x_2$  để áp dụng hệ thức VI-ÉT rồi tính giá trị của biểu thức

#### 1. Phương pháp: Biến đổi biểu thức để làm xuất hiện: $(x_1 + x_2)$ và $x_1 x_2$

**Dạng 1.**  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

**Dạng 2.**  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$

**Dạng 3.**  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2x_1^2x_2^2$

**Dạng 4.**  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$

**Dạng 5.**  $x_1 - x_2 = ?$  Ta biết  $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = \pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

**Dạng 6.**  $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (\pm \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2})(x_1 + x_2)$

**Dạng 7.**  $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = \dots\dots\dots$

**Dạng 8.**  $x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) = \dots\dots\dots$

**Dạng 9.**  $x_1^6 + x_2^6 = (x_1^2)^3 + (x_2^2)^3 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^4) = \dots\dots\dots$

**Dạng 10.**  $x_1^6 - x_2^6 = (x_1^2)^3 - (x_2^2)^3 = (x_1^2 - x_2^2)[(x_1^2)^2 + x_1^2x_2^2 + (x_2^2)^2] = \dots$

**Dạng 11.**  $x_1^5 + x_2^5 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) - x_1^2x_2^2(x_1 + x_2)$

**Dạng 12:**  $(x_1 - a)(x_2 - a) = x_1x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 = p - aS + a^2$

**Dạng 13**  $\frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{x_2 - a} = \frac{x_1 + x_2 - 2a}{(x_1 - a)(x_2 - a)} = \frac{S - 2a}{p - aS + a^2}$

#### 2. Bài tập áp dụng: Không giải Phương trình, tính giá trị của biểu thức nghiệm

a) Cho Phương trình :  $x^2 - 8x + 15 = 0$  Không giải Phương trình, hãy tính

1.  $x_1^2 + x_2^2$  (34)

2.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$   $\left(\frac{8}{15}\right)$

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

$$3. \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \quad \left( \frac{34}{15} \right) \qquad 4. (x_1 + x_2)^2 \qquad (46)$$

b) Cho Phương trình :  $8x^2 - 72x + 64 = 0$  Không giải Phương trình, hãy tính:

$$1. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \left( \frac{9}{8} \right) \qquad 2. x_1^2 + x_2^2 \qquad (65)$$

c) Cho Phương trình :  $x^2 - 14x + 29 = 0$  Không giải Phương trình, hãy tính:

$$1. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \left( \frac{14}{29} \right) \qquad 2. x_1^2 + x_2^2 \qquad (138)$$

d) Cho Phương trình :  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  Không giải Phương trình, hãy tính:

$$1. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad (3) \qquad 2. \frac{1-x_1}{x_1} + \frac{1-x_2}{x_2} \quad (1)$$

$$3. x_1^2 + x_2^2 \quad (1) \qquad 4. \frac{x_1}{x_2+1} + \frac{x_2}{x_1+1} \quad \left( \frac{5}{6} \right)$$

$$5. \frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1}$$

e) Cho Phương trình  $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1 ; x_2$ , không giải Phương trình, tính

$$Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$$

$$\text{HD: } Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2} = \frac{6(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{5x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]} = \frac{6.(4\sqrt{3})^2 - 2.8}{5.8[(4\sqrt{3})^2 - 2.8]} = \frac{17}{80}$$

## VI. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAO CHO HAI NGHIỆM NÀY KHÔNG PHỤ THUỘC (HAY ĐỘC LẬP) VỚI THAM SỐ

Để làm các bài toán loại này, các em làm lần lượt theo các bước sau:

1- Đặt điều kiện cho tham số để Phương trình đó cho có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  (thường là  $a \neq 0$  và  $\Delta \geq 0$ )

2- Áp dụng hệ thức VI-ET:  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

3- Sau đó dựa vào hệ thức VI-ET rút tham số theo tổng nghiệm, theo tích nghiệm sau đó đồng nhất các vế ta sẽ được một biểu thức chứa nghiệm không phụ thuộc vào tham số. Đó chính là hệ thức liên hệ giữa các nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  không phụ thuộc vào tham số  $m$ .

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

Vớ dụ 1: Cho Phương trình :  $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$  (1) cú 2 nghiệm  $x_1; x_2$ . Lập hệ thức liên hệ giữa  $x_1; x_2$  sao cho không phụ thuộc vào  $m$ .

(Bài này đã cho PT có hai nghiệm  $x_1; x_2$  nên ta không biện luận bước 1)

Giải:

Bước 2: Theo hệ thức VI- ET ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m-1} \quad (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{3}{m-1} \quad (2) \end{cases}$$

Bước 2: **Rút**  $m$  từ (1) ta có :

$$\frac{2}{m-1} = x_1 + x_2 - 2 \Leftrightarrow m-1 = \frac{2}{x_1 + x_2 - 2} \quad (3)$$

**Rút**  $m$  từ (2) ta có :

$$\frac{3}{m-1} = 1 - x_1 x_2 \Leftrightarrow m-1 = \frac{3}{1 - x_1 x_2} \quad (4)$$

Bước 3: Đồng nhất các vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{2}{x_1 + x_2 - 2} = \frac{3}{1 - x_1 x_2} \Leftrightarrow 2(1 - x_1 x_2) = 3(x_1 + x_2 - 2) \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 - 8 = 0$$

Vớ dụ 2: Gọi  $x_1; x_2$  là nghiệm của Phương trình :  $(m-1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ . Chứng minh rằng biểu thức  $A = 3(x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 - 8$  không phụ thuộc giá trị của  $m$ .

Theo hệ thức VI- ET ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-4}{m-1} \end{cases} \quad \text{ĐK: } (m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1) ; \text{Thay vào } A \text{ ta có:}$$

$$A = 3(x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 - 8 = 3 \cdot \frac{2m}{m-1} + 2 \cdot \frac{m-4}{m-1} - 8 = \frac{6m + 2m - 8 - 8(m-1)}{m-1} = \frac{0}{m-1} = 0$$

Vậy  $A = 0$  với mọi  $m \neq 1$ . Do đó biểu thức  $A$  không phụ thuộc vào  $m$

**Bài tập áp dụng:**

**s1.** Cho Phương trình :  $x^2 - (m+2)x + (2m-1) = 0$ . Hãy lập hệ thức liên hệ giữa  $x_1; x_2$  sao cho  $x_1; x_2$  độc lập đối với  $m$ .

Hướng dẫn:

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

B1: Dễ thấy  $\Delta = (m+2)^2 - 4(2m-1) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0$ . Do đó Phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$

B2: Theo hệ thức VI- ET ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x_1 + x_2 - 2(1) \\ m = \frac{x_1 x_2 + 1}{2}(2) \end{cases}$$

B3: Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1 + x_2 - 2 = \frac{x_1 x_2 + 1}{2} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 - 5 = 0$$

Cho Phương trình :  $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ .

Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  sao cho chúng không phụ thuộc vào  $m$ .

Hướng dẫn: Dễ thấy  $\Delta = (4m+1)^2 - 4 \cdot 2(m-4) = 16m^2 + 33 > 0$  Do đó Phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$

Theo hệ thức VI-ET ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2(m-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = -(x_1 + x_2) - 1(1) \\ 4m = 2x_1 x_2 + 16(2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$-(x_1 + x_2) - 1 = 2x_1 x_2 + 16 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 17 = 0$$

## VII. TÌM GIÁ TRỊ THAM SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN BIỂU THỨC CHỨA NGHIỆM ĐÃ CHO

Đối với các bài toán dạng này các em làm như sau:

- Đặt điều kiện cho tham số để Phương trình đó cho có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$

(thường là  $a \neq 0$  và  $\Delta \geq 0$ )

- Từ biểu thức nghiệm đó cho, áp dụng hệ thức VI-ET để giải Phương trình (có ẩn là tham số).

- Đối chiếu với điều kiện xác định của tham số để xác định giá trị cần tìm.

Ví dụ 1: Cho Phương trình :  $mx^2 - 6(m-1)x + 9(m-3) = 0$

Tìm giá trị của tham số  $m$  để 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thoả mãn hệ thức :  $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

Bài giải: Điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  là :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = [3(m-21)]^2 - 9(m-3)m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m^2 - 2m + 1) - 9m^2 + 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$$

Theo hệ thức VI- ET ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{9(m-3)}{m} \end{cases}$$
 và từ giả thiết:  $x_1 + x_2 = x_1 x_2$ . Suy ra:

$$\frac{6(m-1)}{m} = \frac{9(m-3)}{m} \Leftrightarrow 6(m-1) = 9(m-3) \Leftrightarrow 6m - 6 = 9m - 27 \Leftrightarrow 3m = 21 \Leftrightarrow m = 7$$

(thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với  $m = 7$  thì Phương trình đó cho có 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn hệ thức :

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

Ví dụ 2: Cho Phương trình :  $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$ .

Tìm  $m$  để 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn hệ thức :  $3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

**Bài giải:** Điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm  $x_1$  &  $x_2$  là :

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2m+1)^2 - 4(m^2 + 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Theo hệ thức VI-ET ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$$
 và từ giả thiết  $3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$ . Suy ra

$$\begin{aligned} 3(m^2 + 2) - 5(2m+1) + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 + 6 - 10m - 5 + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{4}{3}(KTM) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với  $m = 2$  thì Phương trình có 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn hệ thức :

$$3x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$$

### **Bài tập áp dụng**

1. Cho Phương trình :  $mx^2 + 2(m-4)x + m + 7 = 0$

Tìm  $m$  để 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn hệ thức :  $x_1 - 2x_2 = 0$

2. Cho Phương trình :  $x^2 + (m-1)x + 5m - 6 = 0$

Tìm  $m$  để 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn hệ thức:  $4x_1 + 3x_2 = 1$

3. Cho Phương trình :  $3x^2 - (3m-2)x - (3m+1) = 0$ .

Tìm  $m$  để 2 nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn hệ thức :  $3x_1 - 5x_2 = 6$

**Hướng dẫn cách giải:**

Đối với các bài tập dạng này ta thấy có một điều khác biệt so với bài tập ở Ví dụ 1 và ví dụ 2 ở chỗ:

+ Trong ví dụ thì biểu thức nghiệm đã chứa sẵn tổng nghiệm  $x_1 + x_2$  và tích nghiệm  $x_1 x_2$  nên ta có thể vận dụng trực tiếp hệ thức VI-ÉT để tìm tham số  $m$ .

+ Cũng trong 3 bài tập trên thì các biểu thức nghiệm lại không cho sẵn như vậy, do đó vấn đề đặt ra ở đây là làm thế nào để từ biểu thức đó cho biến đổi về biểu thức có chứa tổng nghiệm  $x_1 + x_2$  và tích nghiệm  $x_1 x_2$  rồi từ đó vận dụng tương tự cách làm đó trình bày ở Ví dụ 1 và ví dụ 2.

BT1: - ĐKXĐ:  $m \neq 0$  &  $m \leq \frac{16}{15}$

- Theo VI-ÉT: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(m-4)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m+7}{m} \end{cases} \quad (1)$$

- Từ  $x_1 - 2x_2 = 0$  Suy ra: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_2 \\ 2(x_1 + x_2) = 3x_1 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = 9x_1 x_2 \quad (2)$$

- Thế (1) vào (2) ta đưa được về Phương trình sau:  $m^2 + 127m - 128 = 0 \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = -128$

BT2: - ĐKXĐ:  $\Delta = m^2 - 22m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow 11 - \sqrt{96} \leq m \leq 11 + \sqrt{96}$

- Theo VI-ÉT: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = 5m - 6 \end{cases} \quad (1)$$

- Từ :  $4x_1 + 3x_2 = 1$ . Suy ra: 
$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3(x_1 + x_2) \\ x_2 = 4(x_1 + x_2) - 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = [1 - 3(x_1 + x_2)] \cdot [4(x_1 + x_2) - 1] \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = 7(x_1 + x_2) - 12(x_1 + x_2)^2 - 1$$

- Thế (1) vào (2) ta có Phương trình :  $12m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$  (thỏa mãn ĐKXĐ)

BT3: - Vì  $\Delta = (3m-2)^2 + 4 \cdot 3(3m+1) = 9m^2 + 24m + 16 = (3m+4)^2 \geq 0$  với mọi số thực  $m$  nên Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

- Theo VI-ÉT: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-(3m+1)}{3} \end{cases} \quad (1)$$

- Từ giả thiết:  $3x_1 - 5x_2 = 6$ . Suy ra: 
$$\begin{cases} 8x_1 = 5(x_1 + x_2) + 6 \\ 8x_2 = 3(x_1 + x_2) - 6 \end{cases} \Rightarrow 64x_1x_2 = [5(x_1 + x_2) + 6] \cdot [3(x_1 + x_2) - 6]$$
  

$$\Leftrightarrow 64x_1x_2 = 15(x_1 + x_2)^2 - 12(x_1 + x_2) - 36$$

(2)

- Thế (1) vào (2) ta được Phương trình:  $m(45m + 96) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{32}{15} \end{cases}$  (thỏa mãn)

### VIII. XÁC ĐỊNH DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho Phương trình:  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ). Hãy Tìm điều kiện để Phương trình có 2 nghiệm: *trái dấu, cùng dấu, cùng dương, cùng âm ....*

Ta lập bảng xét dấu sau:

| Dấu nghiệm  | $x_1$ | $x_2$ | $S = x_1 + x_2$ | $P = x_1x_2$ | $\Delta$        | Điều kiện chung                  |
|-------------|-------|-------|-----------------|--------------|-----------------|----------------------------------|
| trái dấu    | $\pm$ | $\mp$ |                 | $P < 0$      | $\Delta \geq 0$ | $\Delta \geq 0 ; P < 0.$         |
| cùng dấu,   | $\pm$ | $\pm$ |                 | $P > 0$      | $\Delta \geq 0$ | $\Delta \geq 0 ; P > 0$          |
| cùng dương, | $+$   | $+$   | $S > 0$         | $P > 0$      | $\Delta \geq 0$ | $\Delta \geq 0 ; P > 0 ; S > 0$  |
| cùng âm     | $-$   | $-$   | $S < 0$         | $P > 0$      | $\Delta \geq 0$ | $\Delta \geq 0 ; P > 0 ; S < 0.$ |

Vớ dụ: Xác định tham số  $m$  sao cho Phương trình:

$$2x^2 - (3m+1)x + m^2 - m - 6 = 0 \text{ cú 2 nghiệm trái dấu.}$$

Để Phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 4.2.(m^2 - m - 6) \geq 0 \\ P = \frac{m^2 - m - 6}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-7)^2 \geq 0 \forall m \\ P = (m-3)(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 3$$

Vậy với  $-2 < m < 3$  thì Phương trình cú 2 nghiệm trái dấu.

#### **Bài tập tham khảo:**

- $mx^2 - 2(m+2)x + 3(m-2) = 0$  có 2 nghiệm cùng dấu.
- $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$  có 2 nghiệm âm.
- $(m-1)x^2 + 2x + m = 0$  có ít nhất một nghiệm không âm.

### IX. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC NGHIỆM

Áp dụng tính chất sau về bất đẳng thức: trong mọi trường hợp nếu ta luôn phân tích được:

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

$$C = \begin{cases} A+m \\ k-B \end{cases} \quad (\text{trong đó } A, B \text{ là các biểu thức không âm ; } m, k \text{ là hằng số}) \quad (*)$$

Thì ta thấy :  $C \geq m$  (vì  $A \geq 0$ )  $\Rightarrow \min C = m \Leftrightarrow A = 0$

$$C \leq k \text{ (vì } B \geq 0) \Rightarrow \max C = k \Leftrightarrow B = 0$$

Ví dụ 1: Cho Phương trình :  $x^2 + (2m-1)x - m = 0$

Gọi  $x_1$  và  $x_2$  là các nghiệm của Phương trình. Tìm  $m$  để :

$$A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 \text{ có giá trị nhỏ nhất.}$$

Bài giải: Theo VI-ET: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-1) \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$$

Theo đề bài :  $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$

$$= (2m-1)^2 + 8m$$

$$= 4m^2 - 12m + 1$$

$$= (2m-3)^2 - 8 \geq -8$$

Suy ra:  $\min A = -8 \Leftrightarrow 2m-3=0$  hay  $m = \frac{3}{2}$

Ví dụ 2: Cho Phương trình :  $x^2 - mx + m - 1 = 0$

Gọi  $x_1$  và  $x_2$  là các nghiệm của Phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$$

Ta có: Theo hệ thức VI-ET thì : 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2x_1x_2 + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{2(m-1) + 3}{m^2 + 2} = \frac{2m+1}{m^2 + 2}$$

**Cách 1:** Thêm bớt để đưa về dạng như phần (\*) đó hướng dẫn

Ta biến đổi B như sau:

$$B = \frac{m^2 + 2 - (m^2 - 2m + 1)}{m^2 + 2} = 1 - \frac{(m-1)^2}{m^2 + 2}$$

$$\text{Vì } (m-1)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m-1)^2}{m^2 + 2} \geq 0 \Rightarrow B \leq 1$$

$$\text{Vậy } \max B = 1 \Leftrightarrow m = 1$$



Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B = \frac{\frac{1}{2}m^2 + 2m + 1 - \frac{1}{2}m^2}{m^2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}(m^2 + 4m + 4) - \frac{1}{2}(m^2 + 2)}{m^2 + 2} = \frac{(m+2)^2}{2(m^2 + 2)} - \frac{1}{2}$$

$$\text{Vì } (m+2)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{(m+2)^2}{2(m^2 + 2)} \geq 0 \Rightarrow B \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$$

**Cách 2:** Đưa về giải Phương trình bậc 2 với ẩn là  $m$  và  $B$  là tham số, ta sẽ tìm điều kiện cho tham số  $B$  để Phương trình đó cho luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

$$B = \frac{2m+1}{m^2+2} \Leftrightarrow Bm^2 - 2m + 2B - 1 = 0 \quad (\text{Với } m \text{ là ẩn, } B \text{ là tham số}) \quad (**)$$

$$\text{Ta có: } \Delta = 1 - B(2B - 1) = 1 - 2B^2 + B$$

Để Phương trình (\*\*) luôn có nghiệm với mọi  $m$  thì  $\Delta \geq 0$

$$\text{hay } -2B^2 + B + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2B^2 - B - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2B+1)(B-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B+1 \leq 0 \\ B-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \leq -\frac{1}{2} \\ B \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq B \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B+1 \geq 0 \\ B-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq -\frac{1}{2} \\ B \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } \max B = 1 \Leftrightarrow m = 1$$

$$\min B = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$$

### Bài tập áp dụng

1. Cho Phương trình :  $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0$ . Tìm  $m$  để biểu thức  $A = (x_1 - x_2)^2$  có giá trị nhỏ nhất.
2. Cho Phương trình  $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$ . Tìm  $m$  sao cho nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn điều kiện  $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$ .
3. Cho Phương trình :  $x^2 - 2(m-4)x + m^2 - 8 = 0$  xác định  $m$  để Phương trình có 2 nghiệm  $x_1; x_2$  thỏa mãn
  - a)  $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$  đạt giá trị lớn nhất
  - b)  $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất
4. Cho Phương trình :  $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$ . Với giá trị nào của  $m$ , biểu thức  $C = x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Cho Phương trình  $x^2 + (m+1)x + m = 0$ . Xác định  $m$  để biểu thức  $E = x_1^2 + x_2^2$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài tập**

**Bài tập 1:**

**Biến đổi các Phương trình sau thành Phương trình bậc hai rồi giải**

a)  $10x^2 + 17x + 3 = 2(2x - 1) - 15$

b)  $x^2 + 7x - 3 = x(x - 1) - 1$

c)  $2x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 1) + 3$

d)  $5x^2 - x - 3 = 2x(x - 1) - 1 + x^2$

e)  $-6x^2 + x - 3 = -3x(x - 1) - 11$

f)  $-4x^2 + x(x - 1) - 3 = x(x + 3) + 5$

g)  $x^2 - x - 3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$

h)  $-x^2 - 4x - 3(2x - 7) = -2x(x + 2) - 7$

i)  $8x^2 - x - 3x(2x - 3) = -x(x - 2)$

k)  $3(2x + 3) = -x(x - 2) - 1$

**Bài tập 2:** Cho Phương trình:  $x^2 - 2(3m + 2)x + 2m^2 - 3m + 5 = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = -2$ ;

b) Tìm các giá trị của  $m$  để Phương trình có một nghiệm  $x = -1$

c) Tìm các giá trị của  $m$  để Phương trình trên có nghiệm kép.

**Bài tập 3** Cho Phương trình:  $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 3m + 5 = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = 3$ ;

b) Tìm các giá trị của  $m$  để Phương trình có một nghiệm  $x = -4$ ;

c) Tìm các giá trị của  $m$  để Phương trình trên có nghiệm kép.

**Bài tập 4:**

Cho Phương trình:  $x^2 - 2(m - 2)x + 2m^2 + 3m = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = -2$ ;

b) Tìm các giá trị của  $m$  để Phương trình có một nghiệm  $x = -3$

c) Tìm các giá trị của  $m$  để Phương trình trên có nghiệm kép.

**Bài tập 5:** Cho Phương trình:  $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = -1$  và  $m = 3$

b) Tìm  $m$  để Phương trình có một nghiệm  $x = 4$

c) Tìm  $m$  để Phương trình có hai nghiệm phân biệt

d) Tìm  $m$  để Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện  $x_1 = x_2$

**Bài tập 6:**

Cho Phương trình:  $(m + 1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = -2$

b) Với giá trị nào của  $m$  thì Phương trình có hai nghiệm phân biệt

c) Tìm  $m$  để Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện  $x_1 = 2x_2$

**Bài tập 7:**

Cho Phương trình:  $2x^2 - 6x + (m + 7) = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = -3$

b) Với giá trị nào của  $m$  thì Phương trình có một nghiệm  $x = -4$

c) Với giá trị nào của  $m$  thì Phương trình đã cho vô nghiệm

d) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện  $x_1 = -2x_2$

**Bài tập 8:**

Cho Phương trình :  $x^2 - 2(m - 1)x + m + 1 = 0$

a) Giải Phương trình với  $m = -4$

b) Với giá trị nào của m thì Phương trình có hai nghiệm phân biệt

d) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện  $x_1 = 3x_2$

**Bài tập 9:**

Biết rằng Phương trình :  $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 5m - 2 = 0$  ( Với m là tham số ) có một nghiệm

$x = 1$ . Tìm nghiệm còn lại

**Bài tập 10:**

Biết rằng Phương trình :  $x^2 - 2(3m + 1)x + 2m^2 - 2m - 5 = 0$  ( Với m là tham số ) có một nghiệm

$x = -1$ . Tìm nghiệm còn lại

$x = -1$ . Tìm nghiệm còn lại.

**Bài tập 11:** Cho Phương trình:  $x^2 - mx + 2m - 3 = 0$

a) Tìm m để Phương trình có nghiệm kép

b) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm trái dấu

c) Tìm hệ thức giữa hai nghiệm của Phương trình không phụ thuộc vào m

**Bài tập 12:** Cho Phương trình bậc hai

$(m - 2)x^2 - 2(m + 2)x + 2(m - 1) = 0$

a) Tìm m để Phương trình có một nghiệm  $x = -2$

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

c) Khi Phương trình có một nghiệm  $x = -1$  tìm giá trị của m và tìm nghiệm còn lại

**Bài tập 13:** Cho Phương trình:  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$

a) Tìm m để Phương trình có một nghiệm  $x = -2$ . Tìm nghiệm còn lại

b) Tìm m để Phương trình có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$  thỏa mãn:  $x_1^2 + x_2^2 = 8$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $A = x_1^2 + x_2^2$

**Bài tập 14:** Cho Phương trình:  $mx^2 - (m + 3)x + 2m + 1 = 0$

a) Tìm m để Phương trình có hiệu hai nghiệm bằng 2

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa  $x_1$  và  $x_2$  không phụ thuộc m

**Bài tập 15:** Cho Phương trình:  $x^2 - (2a - 1)x - 4a - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng Phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của a

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào a

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2$

**Bài tập 16:** Cho Phương trình:  $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$

a) Tìm m để  $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2$  đạt giá trị nhỏ nhất

b) Tìm m để  $B = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$  đạt giá trị lớn nhất

c) Tìm m để  $C = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

**Bài tập 17:** Tìm giá trị của m để các nghiệm  $x_1, x_2$  của Phương trình

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

$$mx^2 - 2(m - 2)x + (m - 3) = 0 \text{ thoả mãn điều kiện } x_1^2 + x_2^2 = 1$$

**Bài tập 18:**

Cho Phương trình  $x^2 - 2(m - 2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0$ . Tìm m để Phương trình có 2 nghiệm

$$x_1, x_2 \text{ phân biệt thoả mãn } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$$

**Bài tập 19:**

Cho Phương trình:  $mx^2 - 2(m + 1)x + (m - 4) = 0$  (m là tham số).

a) Xác định m để các nghiệm  $x_1; x_2$  của Phương trình thoả mãn  $x_1 + 4x_2 = 3$

b) Tìm một hệ thức giữa  $x_1; x_2$  mà không phụ thuộc vào m

**Bài tập 20:**

a) Với giá trị nào m thì hai Phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung. Tìm nghiệm chung đó?

$$x^2 - (m + 4)x + m + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0 \quad (2)$$

b) Tìm giá trị của m để nghiệm của Phương trình (1) là nghiệm của Phương trình (2) và ngược lại.

**d. Một số Phương trình thường gặp:**

**1. Phương trình tích:** Dạng:  $A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

**Ví dụ:** Giải Phương trình:  $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$ . Phân tích vế trái thành nhân tử bằng Phương pháp nhẩm nghiệm. (nghiệm thuộc ước của 6) ta được:

$$(x - 2)(2x^2 + 5x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

**Bài tập:**

**Bài 1:**  $x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = 0$

**Bài 2:**  $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$

**2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu:**

**Ví dụ:** Giải và biện luận Phương trình sau:  $\frac{1+x^2}{1+mx} = 1-x$  (\*)

ĐKXĐ:  $1+mx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{m} (m \neq 0)$

Khi đó Phương trình (\*)  $\Leftrightarrow 1+x^2 = (1-x)(1+mx) \Leftrightarrow x^2 - mx^2 + x - mx = 0$   
 $\Leftrightarrow (1-m)x^2 + (1-m)x = 0 \Leftrightarrow x[(1-m)x + 1 - m] = 0$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (1-m)x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow (1-m)x = m - 1 \end{cases}$

Nếu  $m \neq 1$ ; thì Phương trình có nghiệm :  $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{m-1}{1-m} = -1 \end{cases}$

Nếu  $m = 1$  thì Phương trình có nghiệm:  $x = 0$ .

**Bài tập:**

**Bài 1:**  $\frac{2}{x+3} - \frac{x+2}{3x-x^2} = \frac{10}{x(x^2-9)}$

**Bài 2:**  $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{3-6x+3x^2} = 3$

**3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối**

**Ví dụ:** Giải Phương trình:  $|3x-2| + |3x-1| = 3$

Ta có thể giải như sau: Lập bảng xét vế trái:

|                  |         |               |         |               |        |
|------------------|---------|---------------|---------|---------------|--------|
| $x$              |         | $\frac{1}{3}$ |         | $\frac{2}{3}$ |        |
| $ 3x-2 $         | $-3x+2$ |               | $-3x+2$ |               | $3x-2$ |
| $ 3x-1 $         | $-3x+1$ |               | $3x-1$  |               | $3x-1$ |
| Vế trái cộng lại | $-6x+3$ |               | $0x+1$  |               | $6x-3$ |

Vậy: + Với  $x \leq \frac{1}{3}$  thì Phương trình (1)  $\Leftrightarrow -6x+3 = 3 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (thỏa mãn)

+ Với  $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$  thì Phương trình (1)  $\Leftrightarrow 0x+1 = 3$  Phương trình vô nghiệm.

+ Với  $x \geq \frac{2}{3}$  thì Phương trình (1)  $\Leftrightarrow 6x-3 = 3 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$  thỏa mãn.

**Bài tập:**

**Bài 1:**  $|x-2| + |2x+1| = 5$

**Bài 2:**  $||x|+3| + 2x = 4$

**4. Phương trình vô tỉ:**

**Ví dụ: a)** Giải Phương trình:  $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1-2x}$

Truy cập Website : [hoc360.net](http://hoc360.net) – Tải tài liệu học tập miễn phí

$$\text{PP: + ĐKXD: } \left\{ \begin{array}{l} x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \\ 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

+ Bình Phương hai vế để làm mất căn.

$$\text{b) Giải Phương trình: } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$$

$$\text{PP: + ĐKXD: } 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

+ Tạo ra bình Phương của một tổng hoặc một hiệu của biểu thức dưới căn để đưa ra ngoài căn.

Do thiếu 2 lần tích nên ta nhân cả hai vế của Phương trình với  $\sqrt{2}$ .

+ Xét xem biểu thức dưới căn dương hay không để đặt trong dấu giá trị tuyệt đối rồi giải Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

**Bài tập:**

$$\text{Bài 1: } \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$$

$$\text{Bài 2: } \sqrt{x+2\sqrt{x-3}} - 2 + \sqrt{x-2\sqrt{x-3}} - 2 = 3$$