

Dạng I: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Có chứa căn thức bậc hai

I/ Biểu thức số học

Phương pháp:

Dùng các Phương pháp biến đổi căn thức(đưa ra ; đưa vào; ;khử; trục; cộng,trừ căn thức đồng dạng; rút gọn phân số...) để rút gọn biểu thức.

Bài tập: Thực hiện phép tính:

1) $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$;

2) $\frac{10+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{8}{1-\sqrt{5}}$;

3) $\sqrt{15-\sqrt{216}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$;

4) $\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{18}-\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5}+\sqrt{27}}{\sqrt{30}+\sqrt{162}}$;

5) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$;

6) $2\sqrt{\frac{16}{3}} - 3\sqrt{\frac{1}{27}} - 6\sqrt{\frac{4}{75}}$;

7) $2\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}\sqrt{75}$;

8) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$

9) $\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$;

10) $\sqrt{2-\sqrt{3}}(\sqrt{5}+\sqrt{2})$;

11) $\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}$;

12) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$;

13) $(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

14) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

15) $\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}} + \frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}$;

16) $\frac{(\sqrt{5}+2)^2 - 8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-4}$;

18) $\frac{4}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{6}{\sqrt{3}-3}$;

19) $(\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3$

20) $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{\sqrt{3}+1}} + \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{\sqrt{3}+1}}$.

II/ Biểu thức đại số:

Phương pháp:

- Phân tích đa thức tử và mẫu thành nhân tử;
- Tìm ĐKXĐ (Nếu bài toán chưa cho ĐKXĐ)
- Rút gọn từng phân thức(nếu được)
- Thực hiện các phép biến đổi đồng nhất như:
 - + Quy đồng(đối với phép cộng trừ) ; nhân ,chia.
 - + Bỏ ngoặc: bằng cách nhân đơn ; đa thức hoặc dùng hằng đẳng thức
 - + Thu gọn: cộng, trừ các hạng tử đồng dạng.
 - + Phân tích thành nhân tử – rút gọn

Chú ý: - Trong mỗi bài toán rút gọn thường có các câu thuộc các loại toán: Tính giá trị biểu thức; giải Phương trình; bất Phương trình; tìm giá trị của biến để biểu thức có giá trị nguyên; tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất... Do vậy ta phải áp dụng các Phương pháp giải tương ứng, thích hợp cho từng loại bài.

ví dụ: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}$

a/ Rút gọn P.

b/ Tìm giá trị của a để biểu thức P có giá trị nguyên.

Giải: a/ Rút gọn P:

- Phân tích: $P = \left[\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right] : \frac{\sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)^2}$

- ĐKXD: $\left\{ \begin{array}{l} a > 0; \\ \sqrt{a} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \end{array} \right.$

- Quy đồng: $P = \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a} + 1}$

- Rút gọn: $P = \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$.

b/ Tìm giá trị của a để P có giá trị nguyên:

- Chia tử cho mẫu ta được: $P = 1 - \frac{1}{\sqrt{a}}$.

- Lý luận: P nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}}$ nguyên $\Leftrightarrow \sqrt{a}$ là ước của 1 là $\pm 1 \Rightarrow \sqrt{a} = \begin{cases} -1 (ktm) \\ 1 \Leftrightarrow a = 1 \end{cases}$

Vậy với $a = 1$ thì biểu thức P có giá trị nguyên.

Bài tập:

Bài 1: Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm giá trị của x để $A > -6$.

Bài 2: Cho biểu thức

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{2}{2 - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \right) : \left(\sqrt{x} - 2 + \frac{10 - x}{\sqrt{x} + 2} \right)$$

a) Rút gọn biểu thức B;

b) Tìm giá trị của x để $A > 0$.

Bài 3: Cho biểu thức

$$C = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{3}{x\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$$

a) Rút gọn biểu thức C;

b) Tìm giá trị của x để $C < 1$.

Bài 4: Rút gọn biểu thức :
$$D = \frac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2-\sqrt{x^2-4}} + \frac{x+2-\sqrt{x^2-4}}{x+2+\sqrt{x^2-4}}$$

Bài 5: Cho các biểu thức:
$$P = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \text{ và } Q = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$$

- Rút gọn biểu thức P và Q;
- Tìm giá trị của x để P = Q.

Bài 6: Cho biểu thức:
$$P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$$

- Rút gọn biểu thức P
- So sánh P với 5.
- Với mọi giá trị của x làm P có nghĩa, chứng minh biểu thức $\frac{8}{P}$ chỉ nhận đúng một giá trị nguyên.

Bài 7: Cho biểu thức:
$$P = \left(\frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{1}{x-1}$$

- Tìm điều kiện để P có nghĩa, rút gọn biểu thức P;
- Tìm các số tự nhiên x để $\frac{1}{P}$ là số tự nhiên;
- Tính giá trị của P với $x = 4 - 2\sqrt{3}$.

Bài 8: Cho biểu thức :
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

- Rút gọn biểu thức P;

Tìm x để $\frac{1}{P} \leq -\frac{5}{2}$

Bài 9: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} - \sqrt{a} \right)$$

- Rút gọn P
- Tìm a để $P < 7 - 4\sqrt{3}$

Bài 10: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - 1 \right)$$

- Rút gọn P
- Tìm x để $P < \frac{1}{2}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Bài 11: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} - 1 \right) : \left(\frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \right)$$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị của x để $P < 1$

Bài 12: Cho biểu thức :

$$P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

- Rút gọn P
- Tìm các giá trị của x để $P = \frac{1}{2}$
- Chứng minh $P \leq \frac{2}{3}$

Bài 13: Cho biểu thức:

$$P = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+m} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-m} - \frac{m^2}{4x-4m^2} \quad \text{với } m > 0$$

- Rút gọn P
- Tính x theo m để $P = 0$.
- Xác định các giá trị của m để x tìm được ở câu b thỏa mãn điều kiện $x > 1$

Bài 14: Cho biểu thức :

$$P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$$

- Rút gọn P
- Tìm a để $P = 2$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P ?

Bài 15: Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$$

- Rút gọn P
- Tính giá trị của P nếu $a = 2 - \sqrt{3}$ và $b = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$
- Tìm giá trị nhỏ nhất của P nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$

Bài 16: Cho biểu thức :

$$P = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right)$$

- Rút gọn P
- Với giá trị nào của a thì $P = 7$
- Với giá trị nào của a thì $P > 6$

Bài 17: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$$

- Rút gọn P
- Tìm các giá trị của a để $P < 0$
- Tìm các giá trị của a để $P = -2$

Bài 18: Cho biểu thức:

$$P = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$$

- Tìm điều kiện để P có nghĩa.
- Rút gọn P
- Tính giá trị của P khi $a = 2\sqrt{3}$ và $b = \sqrt{3}$

Bài 19: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

- Rút gọn P
- Chứng minh rằng $P > 0 \quad \forall x \neq 1$

Bài 20: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x}+x}{x\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \right)$$

- a) Rút gọn P
b) Tính \sqrt{P} khi $x = 5 + 2\sqrt{3}$

Bài 21: Cho biểu thức:

$$P = 1 : \left(\frac{1}{2 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{3x}{2}}{4 - x} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{4 - 2\sqrt{x}}$$

- a) Rút gọn P
b) Tìm giá trị của x để P = 20

Bài 22: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{y - x} \right) : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

- a) Rút gọn P
b) Chứng minh $P \geq 0$

Bài 23: Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} \right) \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} \right) : \frac{a - b}{a + \sqrt{ab} + b} \right]$$

- a) Rút gọn P
b) Tính P khi a = 16 và b = 4

Bài 24: Cho biểu thức:

$$P = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) : \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1}$$

- a) Rút gọn P
b) Cho $P = \frac{\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$ tìm giá trị của a
c) Chứng minh rằng $P > \frac{2}{3}$

Bài 25: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{x - 5\sqrt{x}}{x - 25} - 1 \right) : \left(\frac{25 - x}{x + 2\sqrt{x} - 15} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 5} + \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3} \right)$$

- a) Rút gọn P
b) Với giá trị nào của x thì $P < 1$

Bài 26: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{3\sqrt{a}}{a + \sqrt{ab} + b} - \frac{3a}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) : \frac{(a-1)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{2a + 2\sqrt{ab} + 2b}$$

- Rút gọn P
- Tìm những giá trị nguyên của a để P có giá trị nguyên

Bài 27: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1} \right)$$

- Rút gọn P
- Tìm giá trị của a để $P > \frac{1}{6}$

Bài 28: Cho biểu thức:

$$P = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

- Rút gọn P
- Cho $x \cdot y = 16$. Xác định x, y để P có giá trị nhỏ nhất

Bài 29: Cho biểu thức :

$$P = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy} - 2y} - \frac{2x}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

- Rút gọn P
- Tìm tất cả các số nguyên dương x để $y=625$ và $P < 0,2$

Bài 30: Cho biểu thức:

$$P = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right)$$

- Rút gọn P
- So sánh P với 3