

Bài 1: Tí có một số bi không quá 80 viên, trong đó số bi đỏ gấp 5 lần số bi xanh. Nếu Tí có thêm 3 viên bi xanh nữa thì số bi đỏ gấp 4 lần số bi xanh. Hỏi lúc đầu Tí có mấy viên bi đỏ, mấy viên bi xanh ?

Bài giải: Bài này có nhiều cách giải khác nhau, xin nêu một cách giải như sau
Ta thấy: Số bi xanh lúc đầu bằng $\frac{1}{5}$ số bi đỏ.
Sau khi Tí có thêm 3 viên bi xanh nữa thì số bi xanh lúc đó bằng $\frac{1}{4}$ số bi đỏ.
Do đó 3 viên bi ứng với số phần của số bi đỏ là:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \text{ (số bi đỏ)}$$

Vậy số bi đỏ của Tí lúc đầu là:

$$3 : \frac{1}{20} = 60 \text{ (viên)}$$

Số bi xanh của Tí lúc đầu là : $60 : 5 = 12$ (viên)

Vậy lúc đầu Tí có 60 viên bi đỏ và 12 viên bi xanh.

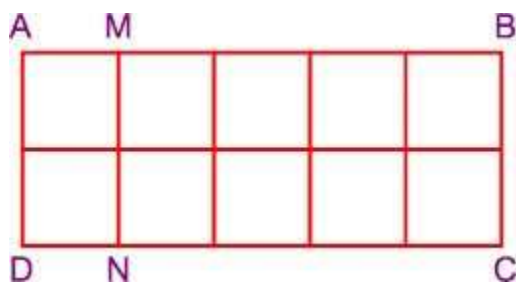
Vì $60 + 12 = 72$ nên kết quả này thỏa mãn giả thiết về số bi của Tí không có quá 80 viên.

Bài 2: Cho tổng : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 49 + 50$. Liệu có thể liên tục thay hai số bất kì bằng hiệu của chúng cho tới khi được kết quả là 0 hay không?

Bài giải: Ta đặt $A = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 49 + 50$. Dãy số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 50 có 50 số, trong đó số các số lẻ bằng số các số chẵn nên có $50 : 2 = 25$ (số lẻ). Vậy A là một số lẻ. Gọi a và b là hai số bất kì của A, khi thay tổng a + b bằng hiệu a - b thì A giảm đi: $(a + b) - (a - b) = 2 \times b$ tức là giảm đi một số chẵn. Hiệu của một số lẻ và một số chẵn luôn là một số lẻ nên sau mỗi lần thay, tổng mới vẫn là một số lẻ. Vì vậy không bao giờ nhận được kết quả là 0.

Bài 3: Bác Hà có hai tấm kính hình chữ nhật. Chiều rộng của mỗi tấm kính bằng $\frac{1}{2}$ chiều dài của nó và chiều dài của tấm kính nhỏ đúng bằng chiều rộng của tấm kính to. Bác ghép hai tấm kính sát vào nhau và đặt lên bàn có diện tích 90 dm² thì vừa khít. Hãy tính kích thước của mỗi tấm kính đó.

Bài giải: Theo đầu bài, coi chiều rộng của tấm kính nhỏ là 1 đoạn thì chiều dài của nó là 2 đoạn như vậy và chiều rộng của tấm kính to cũng là 2 đoạn, khi đó chiều dài của tấm kính to là 4 đoạn như vậy. Nếu bác Hà ghép khít hai tấm kính lại với nhau sẽ được hình chữ nhật ABCD (hình vẽ), trong đó AMND là tấm kính nhỏ, MBCN là tấm kính to. Diện tích ABCD là 90 dm². Chia hình chữ nhật ABCD thành 10 hình vuông nhỏ, mỗi cạnh là chiều rộng của tấm kính nhỏ thì diện tích của mỗi hình vuông nhỏ là $90 : 10 = 9$ (dm²).



Ta có $9 = 3 \times 3$, do đó cạnh hình vuông là 3 dm. Tấm kính nhỏ có chiều rộng 3 dm, chiều dài là $3 \times 2 = 6$ (dm). Tấm kính to có chiều rộng là 6 dm, chiều dài là $6 \times 2 = 12$ (dm).

Bài 4: Cho 7 phân số:

$$\frac{7}{5}; \frac{4}{13}; \frac{2}{13}; \frac{1}{18}; \frac{7}{3}; \frac{4}{5}; \frac{7}{4}$$

Thăng chọn được hai phân số mà tổng có giá trị lớn nhất. Long chọn hai phân số mà tổng có giá trị nhỏ nhất. Tính tổng 4 số mà Thăng và Long đã chọn.

Bài giải:

Ta có $\frac{1}{18} = \frac{2}{36} < \frac{2}{13}$, mặt khác:

$$\frac{2}{13} < \frac{4}{13} < \frac{4}{5} < \frac{7}{5} < \frac{7}{4} < \frac{7}{3}$$

Vậy ta sắp xếp được các phân số như sau:

$$\frac{1}{18} < \frac{2}{13} < \frac{4}{13} < \frac{4}{5} < \frac{7}{5} < \frac{7}{4} < \frac{7}{3}$$

Tổng hai phân số có giá trị lớn nhất là:

$$\frac{7}{4} + \frac{7}{3} = \frac{21+28}{12} = \frac{49}{12}$$

Tổng hai phân số có giá trị nhỏ nhất là:

$$\frac{1}{18} + \frac{2}{13} = \frac{13+36}{234} = \frac{49}{234}$$

Do đó tổng bốn phân số mà Thăng và Long đã chọn là:

$$\frac{49}{12} + \frac{49}{234} = \frac{2009}{468} = 4\frac{137}{468}$$

Bài 5: Tìm các chữ số a và b thỏa mãn:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Bài giải:

Ta có $0 < a < 10$ và $\frac{1}{a} < \frac{1}{3}; \frac{1}{b} < \frac{1}{3}$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{a \times b} + \frac{a}{a \times b} = \frac{a+b}{a \times b} = \frac{1}{3}$$

Vì $1/3$ là phân số tối giản nên a chia hết cho 3 hoặc b chia hết cho 3.
Giả sử a chia hết cho 3, vì $1/a < 1/3$ nên $a > 3$ mà $a < 10$ do đó $a = 6 ; 9$.

$$\text{Nếu } a = 6 \text{ thì } \frac{1}{b} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \text{ suy ra } b = 6.$$

$$\text{Nếu } a = 9 \text{ thì } \frac{1}{b} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \text{ (loại).}$$

Vậy $a = b = 6$.

Bài 6: Viết liên tiếp các số từ trái sang phải theo cách sau : Số đầu tiên là 1, số thứ hai là 2, số thứ ba là chữ số tận cùng của tổng số thứ nhất và số thứ hai, số thứ tư là chữ số tận cùng của tổng số thứ hai và số thứ ba. Cứ tiếp tục như thế ta được dãy các số như sau : 1235831459437.....

Trong dãy trên có xuất hiện số 2005 hay không ?

Bài giải:

Giả sử trong số tạo bởi cách viết như trên có xuất hiện nhóm chữ 2005 thì ta có : $2 + 0$ là số có chữ số tận cùng là 0 (vô lí).

Vậy trong dãy trên không thể xuất hiện số 2005.

Bài 7: Có 5 đội tham gia dự thi toán đồng đội. Tổng số điểm của cả 5 đội là 144 điểm và thật thú vị là cả 5 đội đều đạt một trong ba giải : nhất (30 điểm) ; nhì (29 điểm) ; ba (28 điểm).

Chứng minh số đội đạt giải ba hơn số đội đạt giải nhất đúng một đội.

Bài giải:

Ta thấy trung bình cộng điểm của một đội giải nhất và một đội giải ba chính là số điểm của một đội giải nhì.

Nếu số đội đạt giải nhất bằng số đội đạt giải ba thì tổng số điểm của cả 5 đội là : $29 \times 5 = 145$ (điểm) > 144 điểm, không thỏa mãn.

Nếu số đội giải nhất nhiều hơn số đội giải ba thì tổng điểm 5 đội lớn hơn 145, cũng không thỏa mãn.

Do đó số đội giải nhất phải ít hơn số đội giải ba. Khi đó ta xếp một đội giải nhất và một đội giải ba làm thành một cặp thì cặp này sẽ có tổng số điểm bằng hai đội giải nhì. Số đội giải ba thừa ra (không được xếp cặp với một đội giải nhất) chính là số điểm mà tổng điểm của 5 đội nhỏ hơn 145. Vì vậy số đội giải ba nhiều hơn số đội giải nhất bao nhiêu thì tổng điểm của 5 đội sẽ nhỏ hơn 145 bấy nhiêu.

Vì tổng số điểm của cả 5 đội là 144 điểm nên số đội giải ba nhiều hơn số đội giải nhất là $145 - 144 = 1$.

Bài 8: Viết liên tiếp các số từ trái sang phải theo cách sau: Số đầu tiên là 1, số thứ hai là 2, số thứ ba là chữ số tận cùng của tổng số thứ nhất và số thứ hai, số thứ tư là chữ số tận cùng của tổng số thứ hai và số thứ ba. Cứ tiếp tục như thế

ta được dãy các số như sau: 1235831459437.....
 Trong dãy trên có xuất hiện số 2005 hay không ?

Bài giải:

Giả sử trong số tạo bởi cách viết như trên có xuất hiện nhóm chữ 2005 thì ta có: $2 + 0$ là số có chữ số tận cùng là 0 (vô lí).

Vậy trong dãy trên không thể xuất hiện số 2005.

Bài 9: Có 5 đội tham gia dự thi toán đồng đội. Tổng số điểm của cả 5 đội là 144 điểm và thật thú vị là cả 5 đội đều đạt một trong ba giải: nhất (30 điểm); nhì (29 điểm); ba (28 điểm).

Chứng minh số đội đạt giải ba hơn số đội đạt giải nhất đúng một đội.

Bài giải:

Ta thấy trung bình cộng điểm của một đội giải nhất và một đội giải ba chính là số điểm của một đội giải nhì.

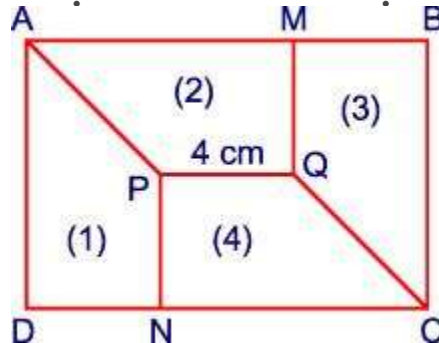
Nếu số đội đạt giải nhất bằng số đội đạt giải ba thì tổng số điểm của cả 5 đội là: $29 \times 5 = 145$ (điểm) > 144 điểm, không thỏa mãn.

Nếu số đội giải nhất nhiều hơn số đội giải ba thì tổng điểm 5 đội lớn hơn 145, cũng không thỏa mãn.

Do đó số đội giải nhất phải ít hơn số đội giải ba. Khi đó ta xếp một đội giải nhất và một đội giải ba làm thành một cặp thì cặp này sẽ có tổng số điểm bằng hai đội giải nhì. Số đội giải ba thừa ra (không được xếp cặp với một đội giải nhất) chính là số điểm mà tổng điểm của 5 đội nhỏ hơn 145. Vì vậy số đội giải ba nhiều hơn số đội giải nhất bao nhiêu thì tổng điểm của 5 đội sẽ nhỏ hơn 145 bấy nhiêu.

Vì tổng số điểm của cả 5 đội là 144 điểm nên số đội giải ba nhiều hơn số đội giải nhất là $145 - 144 = 1$.

Bài 10: Cho (1), (2), (3), (4) là các hình thang vuông có kích thước bằng nhau. Biết rằng $PQ = 4$ cm. Tính diện tích hình chữ nhật ABCD.



Bài giải:

Vì các hình thang vuông PQMA, QMBC, QPNC, PNDA bằng nhau nên: $MQ = NP = QP = 4$ cm và $CN = AD$.

Mặt khác $AD = NP + QM = 4 + 4 = 8$ (cm)

Do đó: $CN = AD = 8 \text{ cm}$.

Diện tích hình thang vuông PQCN là: $(CN + PQ) \times NP : 2 = (8 + 4) \times 4 : 2 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$

Suy ra: Diện tích hình chữ nhật ABCD là: $24 \times 4 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$

Bài 11: Tích sau đây có tận cùng bằng chữ số nào ?

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2 \times 2}_{2003 \text{ thừa số } 2}$$

Bài giải:

Tích của bốn thừa số 2 là $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ và $2003 : 4 = 500 \text{ (dư } 3\text{)}$ nên ta có thể viết tích của 2003 thừa số 2 dưới dạng tích của 500 nhóm (mỗi nhóm là tích của bốn thừa số 2) và tích của ba thừa số 2 còn lại.

Vì tích của các thừa số có tận cùng là 6 cũng là số có tận cùng bằng 6 nên tích của 500 nhóm trên có tận cùng là 6.

Do $2 \times 2 \times 2 = 8$ nên khi nhân số có tận cùng bằng 6 với 8 thì ta được số có tận cùng bằng 8 (vì $6 \times 8 = 48$). Vậy tích của 2003 thừa số 2 sẽ là số có tận cùng bằng 8.

Bài 12: Một người mang cam đi đổi lấy táo và lê. Cứ 9 quả cam thì đổi được 2 quả táo và 1 quả lê, 5 quả táo thì đổi được 2 quả lê. Nếu người đó đổi hết số cam mang đi thì được 17 quả táo và 13 quả lê. Hỏi người đó mang đi bao nhiêu quả cam?

Bài giải:

9 quả cam đổi được 2 quả táo và 1 quả lê nên 18 quả cam đổi được 4 quả táo và 2 quả lê. Vì 5 quả táo đổi được 2 quả lê nên 18 quả cam đổi được: $4 + 5 = 9$ (quả táo).

Do đó 2 quả cam đổi được 1 quả táo. Cứ 5 quả táo đổi được 2 quả lê nên 10 quả cam đổi được 2 quả lê. Vậy 5 quả cam đổi được 1 quả lê. Số cam người đó mang đi để đổi được 17 quả táo và 13 quả lê là: $2 \times 17 + 5 \times 13 = 99$ (quả).

Bài 13: Tìm một số tự nhiên sao cho khi lấy $1/3$ số đó chia cho $1/17$ số đó thì có dư là 100.

Bài giải:

Vì $17 \times 3 = 51$ nên để dễ lí luận, ta giả sử số tự nhiên cần tìm được chia ra thành 51 phần bằng nhau. Khi ấy $1/3$ số đó là $51 : 3 = 17$ (phần); $1/17$ số đó là $51 : 17 = 3$ (phần).

Vì $17 : 3 = 5 \text{ (dư } 2\text{)}$ nên 2 phần của số đó có giá trị là 100 suy ra số đó là: $100 : 2 \times 51 = 2550$.

Bài 14: Tuổi của con hiện nay bằng $1/2$ hiệu tuổi của bố và tuổi con. Bốn năm trước, tuổi con bằng $1/3$ hiệu tuổi của bố và tuổi con. Hỏi khi tuổi con bằng $1/4$ hiệu tuổi của bố và tuổi của con thì tuổi của mỗi người là bao nhiêu?

Bài giải:

Hiệu số tuổi của bố và con không đổi. Trước đây 4 năm tuổi con bằng $\frac{1}{3}$ hiệu này, do đó 4 năm chính là: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ (hiệu số tuổi của bố và con).

Số tuổi bố hơn con là: $4 : \frac{1}{6} = 24$ (tuổi).

Khi tuổi con bằng $\frac{1}{4}$ hiệu số tuổi của bố và con thì tuổi con là: $24 \times \frac{1}{4} = 6$ (tuổi).

Lúc đó tuổi bố là: $6 + 24 = 30$ (tuổi).

Bài 15: Hoa có một sợi dây dài 16 mét. Bây giờ Hoa cần cắt đoạn dây đó để có đoạn dây dài 10 mét mà trong tay Hoa chỉ có một cái kéo. Các bạn có biết Hoa cắt thế nào không?

Bài giải:

Xin nêu 2 cách cắt như sau:

Cách 1: Gập đôi sợi dây liên tiếp 3 lần, khi đó sợi dây sẽ được chia thành 8 phần bằng nhau.

Độ dài mỗi phần chia là: $16 : 8 = 2$ (m)

Cắt đi 3 phần bằng nhau thì còn lại 5 phần.

Khi đó độ dài đoạn dây còn lại là: $2 \times 5 = 10$ (m)

Cách 2: Gập đôi sợi dây liên tiếp 2 lần, khi đó sợi dây sẽ được chia thành 4 phần bằng nhau.

Độ dài mỗi phần chia là: $16 : 4 = 4$ (m)

Đánh dấu một phần chia ở một đầu dây, phần đoạn dây còn lại được gập đôi lại, cắt đi một phần ở đầu bên kia thì độ dài đoạn dây cắt đi là: $(16 - 4) : 2 = 6$ (m)

Do đó độ dài đoạn dây còn lại là: $16 - 6 = 10$ (m)

Bài 16: Một thửa ruộng hình chữ nhật được chia thành 2 mảnh, một mảnh nhỏ trồng rau và mảnh còn lại trồng ngô (hình vẽ). Diện tích của mảnh trồng ngô gấp 6 lần diện tích của mảnh trồng rau. Chu vi mảnh trồng ngô gấp 4 lần chu vi mảnh trồng rau. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu, biết chiều rộng của nó là 5 mét.