Câu 29. Giả sử F là một nguyên hàm của hàm số $y = x^6 \sin^5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khi đó $\int_1^2 x^6 \sin^5 x dx$ có giá trị bằng

A. $F(2) - F(1)$. **B.** $-F(1)$. **C.** $F(2)$. **D.** $F(1) - F(2)$.

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a;b]$, ta có $\int_1^2 x^6 \sin^5 x dx = F(2) - F(1)$.

Câu 30. Giá trị của tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x - \frac{2\pi}{3})dx$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $u = 3x - \frac{2\pi}{3}$. Khi $x = \frac{\pi}{3}$ thì $u = \frac{\pi}{3}$, khi $x = \frac{2\pi}{3}$ thì $u = \frac{4\pi}{3}$.

Ta có $du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$.

Do đó:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x - \frac{2\pi}{3})dx = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos u du = \frac{1}{3}\sin u \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 31. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. **B.** $V = \frac{124\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{124}{3}$. **D.** $V = \left(32 + 2\sqrt{15}\right)\pi$.

Lời giải

Chọn C.

Diện tích thiết diện là $S(x) = 3x\sqrt{3x^2 - 2}$.

Suy ra thể tích vật thể tạo thành là: $V = \int_1^3 S(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 3x\sqrt{3x^2 - 2}\mathrm{d}x = \frac{124}{3}$.

Câu 32. Chị Tiên Huyền gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian nhanh nhất là bao lâu để Chị Tiên Huyền có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

A. 19 quý. **B.** 15 quý. **C.** 4 năm. **D.** 5 năm.

Lời giải

Chọn C.

Gọi n là số quý cần tìm, từ giả thiết ta có n là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa $27(1+0,0185)^n > 36$.

Ta có: $n=16$ quý, tức là 4 năm.

Đáp án: **C.**

Câu 33. Tới cuối năm 2013, dân số Nhật Bản đã giảm 0,17% xuống còn 127.298.000 người. Hỏi với tốc độ giảm dân số như vậy thì đến cuối năm 2023 dân số Nhật Bản còn bao nhiêu người?

A. 125.150.414 người. **B.** 125.363.532 người.
C. 125.154.031 người. **D.** 124.937.658 người.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n$

Trong đó: $A = 127.298.000, r = -0,17; n = 10$

Ta được dân số đến cuối năm 2023 là: 125.150.414.

Đáp án: **A.**

Câu 34. Cho số phức $z = 5-4i$. Môđun của số phức z là

A. 3. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$z = 5-4i \Rightarrow |z| = \sqrt{5^2+(-4)^2} = \sqrt{41}$

Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(2+i)z + \dfrac{1-i}{1+i} = 5-i$. Môđun của số phức $w = 1+2z+z^2$ có giá trị là

A. 10. **B.** -10. **C.** 100. **D.** -100.

Lời giải

Chọn A.

$(2+i)z+\frac{1-i}{1+i}=5-i$

$\Leftrightarrow (2+i)z+\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=5-i$

$\Leftrightarrow (2+i)z+\frac{-2i}{2}=5-i$

$\Leftrightarrow (2+i)z=5 \Leftrightarrow z=\frac{5}{2+i}=2-i$

$\Rightarrow w=1+2z+z^2=(1+z)^2=(3-i)^2=8-6i \Leftrightarrow |w|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$.

Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 36. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn : $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$. Giá trị của $ab+1$ là :

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

$z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Vậy ta có

$a+bi-(2+3i)(a-bi)=1-9i \Leftrightarrow \begin{cases}-a-3b=1\\3a-3b=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases} \Rightarrow ab+1=-1$

Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 37. Tìm nghiệm phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases}|z-1|=|z-i|\\ \left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1\end{cases}$

A. $z=2+i$. **B.** $z=1-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=1+i$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi(x,y\in R)$

Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn số phức 1 và i

Gọi C,D lần lượt là điểm biểu diễn số phức $-i$ và $3i$

Ta có: $|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow MA=MB$ với $A(1,0);B(0,1)$ $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực Δ_1 của AB

$\left|\frac{z-3i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z+i|=|z-3i| \Leftrightarrow MC=MD$ với $C(0,-1);D(0,3)$ $\Rightarrow M$ thuộc đường trung trực Δ_2 của CD

M là giao điểm của $\Delta_1;\Delta_2$ $\Rightarrow M$ thỏa hệ: $\begin{cases}y=x\\y=1\end{cases} \Leftrightarrow M(1,1) \Rightarrow z=1+i$

=> Đáp án D.

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Hãy tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}; V = \dfrac{\pi a^3}{12}$.

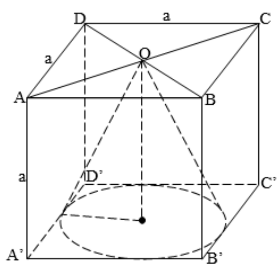
B. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}; V = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

C. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}; V = \dfrac{\pi a^3}{6}$.

D. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{5}; V = \dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A.



Khối nón có chiều cao bằng a và bán kính đáy $r = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích xung quanh khối nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{a}{2}.\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}$ (đvdt)

Thể tích của khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 a = \dfrac{\pi a^3}{12}$ (đvtt).

Câu 39. Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $R\sqrt{3}$.

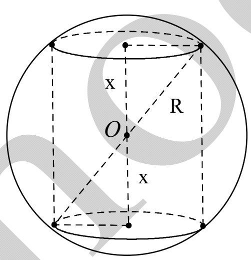
B. $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$.

D. $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ $(0 < x < R)$ (xem hình vẽ)

Bán kính của khối trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Thể tích khối trụ là:
$V = \pi(R^2 - x^2)2x$. Xét hàm số $V(x) = \pi(R^2 - x^2)2x,\ 0 < x < R$

Ta có $V'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$	R

$V'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$V(x)$	$0 \nearrow \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9} \searrow 0$

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$; $V_{\max} = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 40. Khoảng cách từ điểm $M(-4;-5;6)$ đến mặt phẳng (Oxy), (Oyz) lần lượt bằng:

A. 6 và 4. **B.** 6 và 5. **C.** 5 và 4. **D.** 4 và 6.

Lời giải

Chọn A.

$d(M,(Oxy)) = |z_M| = 6$; $d(M,(Oyz)) = |x_M| = 4$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3;-2;4)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{-2}$. Điểm M thuộc đường thẳng d sao cho M cách A một khoảng bằng $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm M là

A. $(5;1;2)$ và $(6;9;2)$. **B.** $(5;1;2)$ và $(-1;-8;-4)$.

C. $(5;-1;2)$ và $(1;-5;6)$. **D.** $(5;1;2)$ và $(1;-5;6)$.

Lời giải

Chọn D.

$M(5+2t;1+3t;2-2t) \in d$;

$\overrightarrow{AM}(2+2m;3+3m;-2-2m) \Rightarrow AM = \sqrt{17} \Leftrightarrow 17(1+m)^2 = 17 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(5;1;2) \\ M(1;-5;6) \end{array}\right.$

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+2y+2z+m=0$ vàđiểm $A(1;1;1)$. Khi đó m nhận giá trị nào sau đây để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) bằng 1?

A. -2. **B.** -8. **C.** -2 hoặc -8. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C.

$d(A,(\alpha)) = \dfrac{|5+m|}{3} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+5=3 \\ m+5=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-8 \end{array}\right.$

Câu 43. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc $mp(P)$?

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $\vec{n}(a;b;c);\vec{n}\neq\vec{0}$ là VTPT của (P); α là góc tạo bởi (P) và Oy, α lớn nhất khi $sin\alpha$ lớn nhất. Ta có $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}_d$ nên $\vec{n}(b+2c;b;c)$

$$\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{j}\right)\right|=\frac{|b|}{\sqrt{2b^2+5c^2+4bc}}$$

Nếu $b=0$ thì $\sin\alpha=0$.

Nếu $b\neq0$ thì $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}c}{b}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{6}{5}}}$. Khi đó, $sin\alpha$ lớn nhất khi $\dfrac{c}{b}=-\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow$ chọn $b=5;c=-2$

Vậy, phương trình mp(P) là $x+5y-2z+9=0$. Do đó ta có $N\in(P)$.

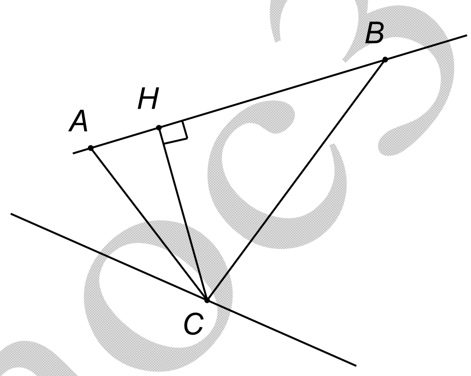
Câu 44. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;5;0);B(3;3;6)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi C là điểm trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là

A. 29. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Ta có 2 đường thẳng AB và d chéo nhau.



Gọi C là điểm trên d và H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB.

Vì $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CH=\sqrt{11}\cdot CH$ nên S_{ABC} nhỏ nhất khi CH nhỏ nhất $\Leftrightarrow CH$ là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng AB và d.

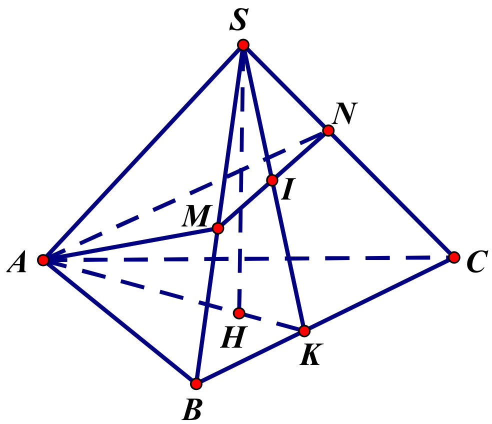
Ta có $C(1;\,0;\,2)\Rightarrow AC=\sqrt{29}$.

Câu 45. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$, biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

A. $V = \dfrac{\sqrt{15}a^3}{32}$. **B.** $V = \dfrac{3\sqrt{15}a^3}{32}$. **C.** $V = \dfrac{3\sqrt{13}a^3}{64}$. **D.** $V = \dfrac{3\sqrt{13}a^3}{32}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của BC nên $SK \perp (AMN)$ nên $AI \perp SK$ hay tam giác SAK cân tại A.

$S_{ABC} = \dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$; $SA = AK = \dfrac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$;

$AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3a}{2} = a$, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - a^2} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$;

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{5}a}{2}.\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{\sqrt{15}a^3}{8}$

$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SAMN} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{32}$.

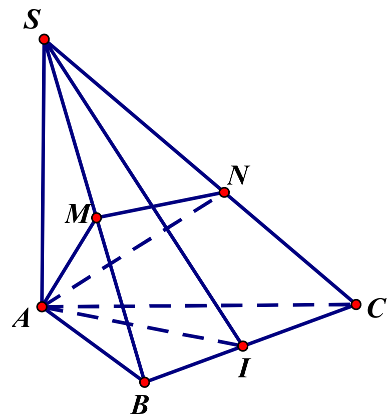
Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SB, SC. Cạnh SA vuông góc với mặt đáy, góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.AMN$.

A. $V = \dfrac{a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{32}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi điểm I là trung điểm BC nên $AI \perp BC$



Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SI$

Vậy $\left((SBC),(ABC)\right) = \widehat{AIS} = 45^0$; $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$,

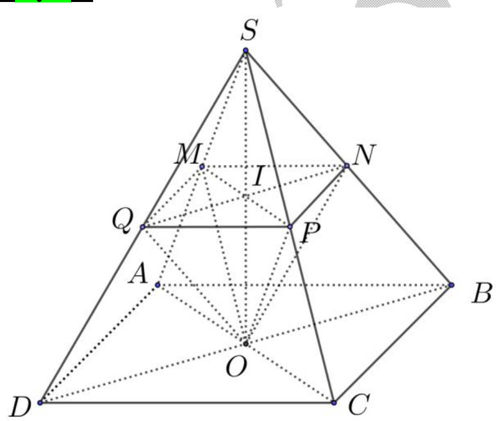
$\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow V_{SAMN} = \dfrac{1}{4}V_{SABC} = \dfrac{a^3}{32}$.

Câu 47. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a; $O = AC \cap BD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích V của khối chóp $O.MNPQ$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{32}$.

Lời giải

Chọn A

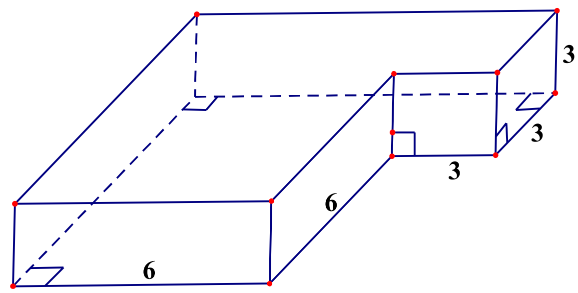


Ta có: $S_{MNPQ} = MN^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

$OI = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{SC^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

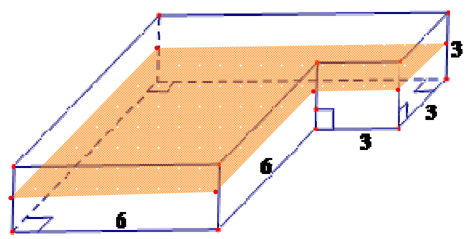
Suy ra: $V = \dfrac{1}{3}S_{MNPQ}OI = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 48. Hình đa diện dưới đây có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?



A. 1 mặt phẳng. **B.** 3 mặt phẳng. **C.** 6 mặt phẳng. **D.** 9 mặt phẳng.

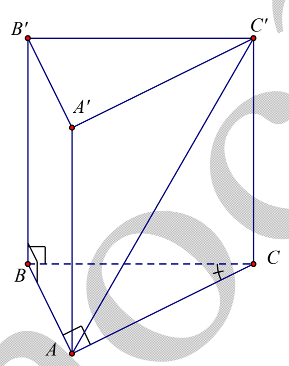
Lời giải



Câu 49. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc $\widehat{ACB} = 60^0$, $AC = a$, $AC' = 3a$. Khi đó thể tích khối lăng trụ bằng

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{6}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Chọn **A**.

Ta có $AB = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \Leftrightarrow 9a^2 = a^2 + CC'^2 \Rightarrow CC' = 2\sqrt{2}a$.

Do đó thể tích khối lăng trụ là.

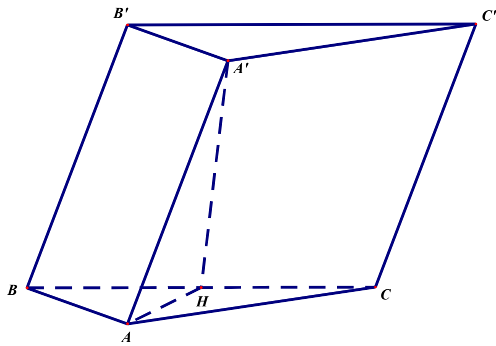
$V = S_{ABC}.CC' = \frac{1}{2}.AB.AC.CC' = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a.2\sqrt{2}a = a^3\sqrt{6}$.

Câu 50. Đáy của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên với mặt đáy của lăng trụ là 30^o. Hình chiếu vuông góc của A' xuống đáy (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải.

Chọn **D**.



Ta có: $\widehat{A'AH} = 30^o \Rightarrow A'H = AH.\tan 30^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$