Bài toán thực tế liên quan đến hình học

A. Nội dung kiến thức.

Bài toán thực tế liên quan đến hình học thường xoay quanh một số nội dung như sau: Tính toán để đường đi được ngắn nhất, tính toán để diện tích được lớn nhất, hay cũng có thể đơn giản là tính diện tích hoặc thể tích của một vật…

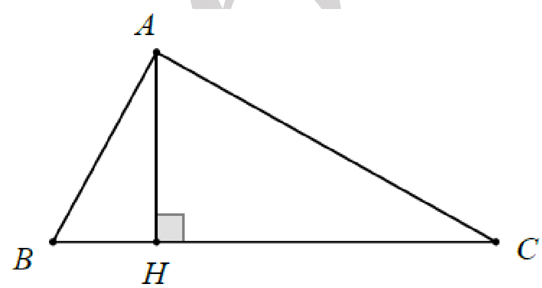
Ta chú ý một số kiến thức sau:

1. Công thức tính chu vi, diện tích của các hình, thể tích của các khối hình.

* **Hình tam giác:** Cho tam giác *ABC* đường cao *AH*, đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $h = AH$.

Chu vi tam giác là : $P = a + b + c$.

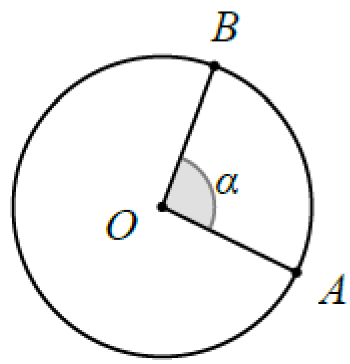
Diện tích tam giác là :



$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab.\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(với $p = \frac{P}{2}$).

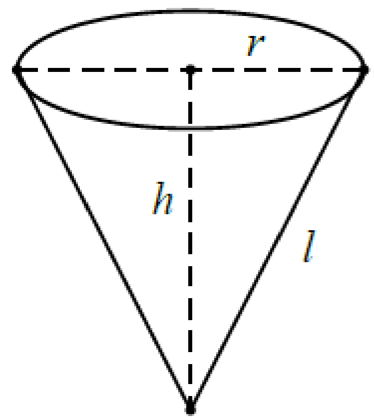
* **Hình quạt:** Xét hình quạt *OAB* có bán kính *R*, góc ở tâm bằng α (tính theo radian).



Chu vi của hình quạt là : $P = 2\pi R.\dfrac{\alpha}{2\pi} \Leftrightarrow P = \alpha R.$

Diện tích của hình quạt là : $S = 2\pi R^2.\dfrac{\alpha}{2\pi} \Leftrightarrow S = \alpha R^2.$

*** Hình nón, khối nón:**

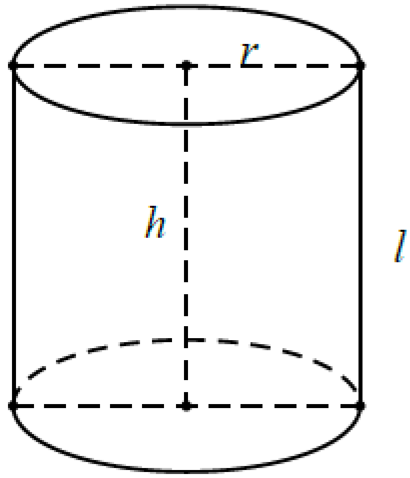


Diện tích xuang quanh của hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng r và có độ dài đường sinh bằng l là: $S_{xq} = \pi rl.$

Diện tích toàn phần của hình nón tròn xoay bằng diện tích xung quanh của hình nón cộng với diện tích đáy của hình nón: $S_{tp} = \pi rl + \pi r^2$

Thể tích của khối nón tròn xoay có có chiều cao h và bán kính đáy bằng r là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$

***Hình trụ, khối trụ:**



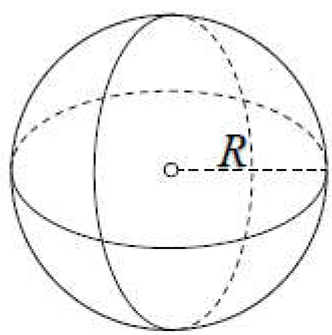
Diện tích xuang quanh của hình trụ có bán kính đáy bằng r và có đường sinh bằng l là: $S_{xq} = 2\pi rl$.

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng diện tích xung quanh của hình trụ đó cộng với diện tích hai đáy của hình trụ: $S_{tp} = 2\pi rl + 2\pi r^2$.

Thể tích của khối trụ có chiều cao h và có bán kính đáy bằng r là: $V = \pi r^2 h$.

Chú ý: Trường hợp hình lăng trụ đứng và khối lăng trụ đứng (như hình vẽ) thì $h = l$.

***Mặt cầu, khối cầu:**



Mặt cầu bán kính R có diện tích là: $S = 4\pi R^2$.

Khối cầu bán kính R có thể tích là: $S = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2. Cách tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn, khoảng, nửa đoạn, nửa khoảng.

Có lẽ đây là một bài toán khá quen thuộc với rất nhiều bạn đọc, tác giả sẽ không nhắc lại phương pháp khảo sát hàm số để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Tác giả cung cấp thêm cho bạn đọc một số công thức sau:

- Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$, nếu a > 0 thì hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$.
- Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$, nếu a < 0 thì hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ khi $x = \frac{-b}{2a}$.
- Với a , b là các số thực dương thì ta có: $\sqrt{ab} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{a+b}{2} \Rightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ Đẳng thức xảy ra khi a = b.
- Vớia , b, c là các số thực dương thì ta có:
  $\sqrt[3]{abc} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$ Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Phần chứng minh xin để lại cho bạn đọc.

3. Ứng dụng của tích phân trong việc tính diện tích hình phẳng, tính thể tích của khối tròn xoay.

- Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi các đường : $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ là $S = \int_a^b |f(x)|dx$.
- Diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x) = g(x)$ liên tục trên đoạn [a; b] và hai đường thẳng x = a, x = b là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$
- Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a , b]. Thể tích *V* của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b,$: khi quay xung quanh trục hoành được tính theo công thức : $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

- Thể tích V của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), (0 \le f(x) \le g(x); f; g$ liên tục trên đoạn [a;b]), x = a, x = b , khi quay xung quanh trục Ox được tính theo công thức : $V = \pi\int_a^b \left|g^2(x) - f^2(x)\right| dx.$

B. Ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 1. Một đường dây điện được nối từ nhà máy điện trên bờ biển ở vị trí A đến vị trí C trên một hòn đảo. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến đất liền là đoạn BC có độ dài 1 km, khoảng cách từ A đến B là 4 km. Người ta chọn một vị trí là điểm S nằm giữa A và B để mắc đường dây điện từ A đến S, rồi từ S đến C như hình vẽ dưới đây. Chi phí mỗi km dây điện trên đất liền mất 3000USD, mỗi km dây điện đặt ngầm dưới biển mất 5000USD. Hỏi điểm S phải cách điểm A bao nhiêu km để chi phí mắc đường dây điện là ít nhất.

A. 3,25 km. **B.** 1 km. **C.** 2 km. **D.** 1,5 km.

Lời giải

Giả sử $AS = x, 0 < x < 4 \Rightarrow BS = 4 - x.$

Tổng chi phí mắc đường dây điện là : $f(x) = 300x + 500\sqrt{1+(4-x)^2}$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên (0;4).

Cách 1: Ta có:

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 300 + 500\frac{-(4-x)}{\sqrt{1+(4-x)^2}} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{1+(4-x)^2} = 5(4-x) \Leftrightarrow (x-4)^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{13}{4} \\ x = \dfrac{19}{4} \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta có $x=\frac{13}{4}=3,25.$

Đáp án A.

Cách 2:

Ta có: Ta có: $f(3,25)=1600; f(1)=1881,13883; f(2)=1718,033989; f(1,5)$ $=1796,291202.$

Như vậy ta cũng tìm ra A là đáp án.

Bình luận: Không ít bạn đọc cho rằng cách giải thứ hai không được khoa học và làm mất đi vẻ

đẹp của toán học. Quan điểm của tác giả về Cách 1 và Cách 2 như sau:

- Cả hai cách đều phải tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $(0;4)$.
- Cách 1: Chúng ta giải quyết bằng cách khảo sát hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;4)$ để tìm ra

giá trị của x mà tại đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất; tiếp theo, so sánh kết quả tìm được với các đáp án A, B, C, D để tìm ra câu trả lời đúng cho câu hỏi.

- Cách 2: Sau khi lập được hàm số $f(x)$ như Cách 1, tính $f(3,25), f(1), f(2), f(1,5)$; số

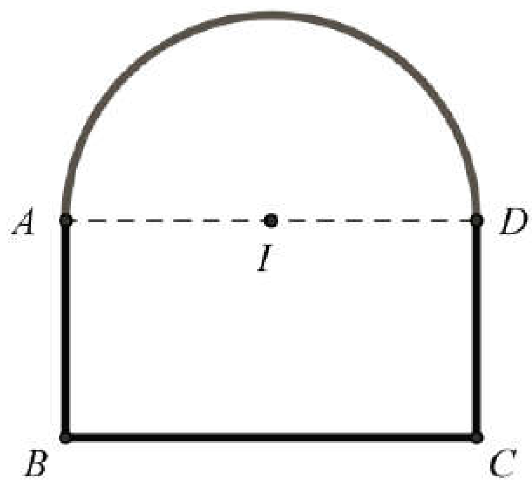
lớn nhất trong bốn số tính được sẽ là giá trị lớn nhất của $f(x)$. Từ đó, hiển nhiên, dễ dàng tìm ra câu trả lời đúng cho câu hỏi.

Có thể thấy, rõ ràng Cách 2 giúp ta tìm đáp án nhanh hơn cách 1. Sự khác biệt giữa Cách 1 và Cách 2 nêu trên nằm ở quan niệm về tình huống đặt ra. Với Cách 1, ta coi **các phương**

án A, B, C, D chỉ là **các dữ liệu đưa ra để đối chiếu**; với Cách 2, ta coi **các phương án A, B, C, D** là **giả thiết của tình huống đặt ra**.

- Có lẽ những bài tập trắc nghiệm có thể làm theo Cách 2 đôi phần là hạn chế của việc kiểm tra theo hình thức trắc nghiệm, tuy nhiên trong quá trình làm bài thi mỗi câu hỏi đã được người ra đề đã ngầm ấn định khoảng thời gian làm bài, do vậy theo tác giả nếu gặp câu hỏi này trong phòng thi học sinh nên làm theo Cách 2.

Ví dụ 2. Một cửa sổ có dạng như hình vẽ, bao gồm: một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có tâm nằm trên cạnh hình chữ nhật. Biết rằng chu vi cho phép của cửa sổ là 4 m. Hỏi diện tích lớn nhất của cửa sổ là bao nhiêu.



A. $\frac{4}{4+\pi}m^2$. **B.** $\frac{8}{4+\pi}m^2$. **C.** $2m^2$. **D.** $\frac{8}{4+3\pi}m^2$.

Lời giải

Gọi độ dài IA và AB lần lượt là a và b (0 < a, b < 4).

Vì chu vi của cửa sổ bằng 4m nên ta có: $\pi a+(2a+2b)=4 \Leftrightarrow b=\frac{4-\pi a-2a}{2}$ (1).

Diện tích của cửa sổ là:

$$S(a)=\frac{\pi a^2}{2}+2a.\frac{4-\pi a-2a}{2} \Leftrightarrow S(a)=4a-2a^2-\frac{\pi a^2}{2}=-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)a^2+4a.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của *S(a)* trên (0;4).

Cách 1:

Ta có: $S'(a)=0 \Leftrightarrow 4-4a-\pi a=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{4}{4+\pi}$. Suy ra : $\max\limits_{0<x<4} S(a)=S\left(\dfrac{4}{4+\pi}\right)=\dfrac{8}{4+\pi}$.

Đáp án B.

Cách 2:

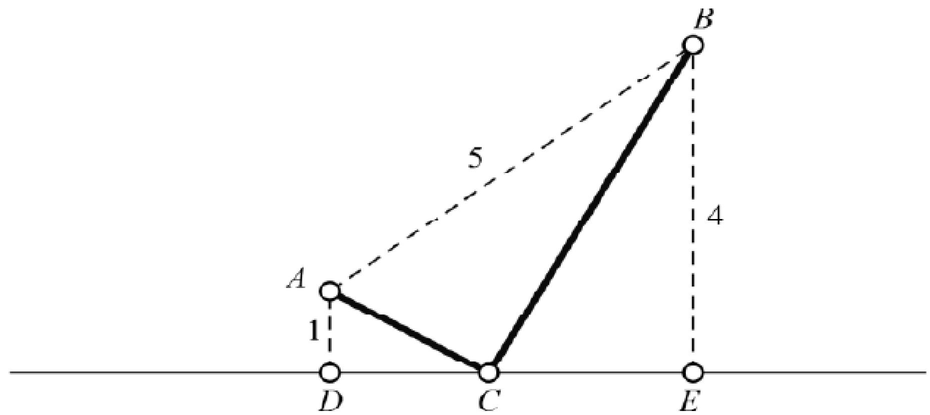
Do S(a) là hàm số bậc hai có hệ số của a^2 âm nên nó đạt giá trị lớn nhất khi:

$$a=-\frac{4}{2.\left[-\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]} \Leftrightarrow a=\frac{4}{4+\pi} \Rightarrow \max_{0<x<4} S(a)=S\left(\frac{4}{4+\pi}\right)=\frac{8}{4+\pi}.$$

Đáp án B.

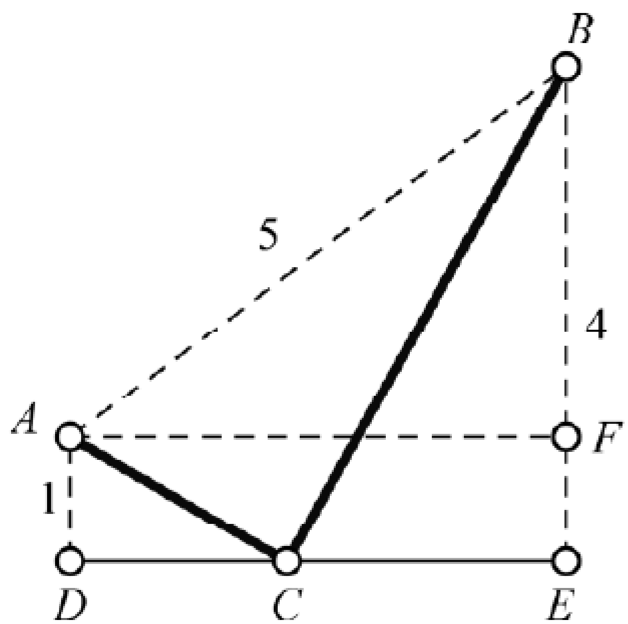
Bình luận: Vì sao tại (1) chúng ta không biểu diễn *a* theo *b* mà lại biểu diễn *b* theo *a*? Đâu đó có bạn đọc nghĩ rằng việc biểu diễn *a* theo *b* hay biểu diễn *b* theo *a* thì các bước làm vẫn vậy và không ảnh hưởng đến quá trình làm bài. Liệu điều này có đúng? Câu trả lời là không? Chúng ta biết rằng cửa gồm hai bộ phận (bộ phận hình chữ nhật và bộ phận có dạng nửa đường tròn), nhưng cả hai bộ phận này khi tính diện tích đều phải tính theo *a*. Như vậy nếu chúng ta biểu diễn *a* theo *b* thì việc tính toán sẽ phức tạp hơn khi biểu diễn *b* theo *a*. Công việc tưởng chừng như rất đơn giản này nhưng nó có thể giúp ích rất nhiều cho bạn đọc trong khi tính toán.

Ví dụ 3. Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1 m và 4 m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5 m. Người ta cần chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) và giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như mô hình bên dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.



A. $\sqrt{41}m.$ **B.** $\sqrt{37}m.$ **C.** $\sqrt{29}m.$ **D.** $3\sqrt{5}m.$

Lời giải



Kẻ AF $\perp BE \Rightarrow DE =$ AF=$\sqrt{5^2-3^2}=4$

Đặt $DC = x,(0 < x < 4) \Rightarrow CE = 4 - x.$

Độ dài đoạn dây cần giăng là :

$f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{16+(4-x)^2}$

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2-8x+32}$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của f(x) trên (0;4)

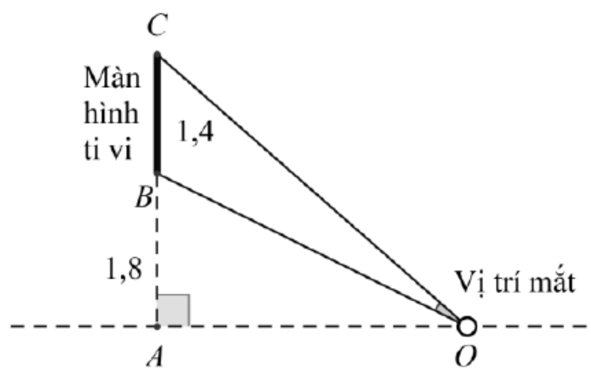
Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}=0$

Dùng MTCT sử dụng tính năng nhẩm nghiệm ta tính được:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,8 \Rightarrow \min f(x)=f(0,8)=\sqrt{41}.$

Đáp án A.

Ví dụ 4. Một màn hình ti vi hình chữ nhật cao 1,4 m được đặt ở độ cao 1,8 m so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất (là góc nhìn). Hãy xác định độ dài AO để nhìn được rõ nhất. BOC



A. AO = 2,4 m. **B.** AO = 2 m. **C.** AO = 2,6 m. **D.** AO = 3 m.

Lời giải

Đặt : $AO=x,(x>0)\Rightarrow OB=\sqrt{x^2+3,24}, OC=\sqrt{x^2+10,24}.$ Ta

có: $cosBOC=\dfrac{OB^2+OC^2-BC^2}{2OB.OC}=\dfrac{x^2+3,24+x^2+10,24-1,96}{2\sqrt{x^2+3,24}.\sqrt{x^2+10,24}}=\dfrac{x^2+5,76}{\sqrt{x^2+3,24}.\sqrt{x^2+10,24}}$

Góc nhìn BOC lớn nhất khi bé nhất. cosBOC

Cách 1:

Đặt: $t=x^2, t>0$. Xét: $f(t)=\dfrac{t+5,76}{\sqrt{t+3,24}.\sqrt{t+10,24}}=\dfrac{t+5,76}{\sqrt{t^2+13,48t+33,1776}}$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+13,48t+33,1776}-\dfrac{t+6,74}{\sqrt{t^2+13,48t+33,1776}}.(t+5,76)}{t^2+13,48t+33,1776}$

$$f'(t)=\frac{0,98t-5,6448}{\left(\sqrt{t^2+13,48t+33,1776}\right)^3}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=5,76.$$

Suy ra cos BOC lớn nhất khi $x=\sqrt{5,76}=2,4.$

Đáp án A.

Cách 2:

Ta sẽ thử xem trong 4 đáp án đã cho đáp án nào làm nhỏ nhất thì đó là đáp án cần tìm.

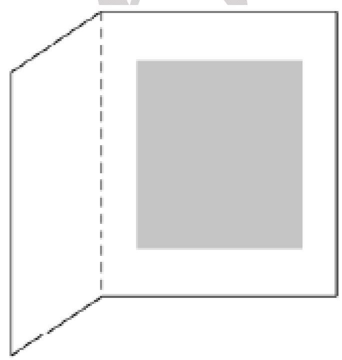
cosBOC

Đặt: $f(x)=\dfrac{x^2+5,76}{\sqrt{x^2+3,24}.\sqrt{x^2+10,24}}$ .Ta có:

$$f(2,4)=\frac{24}{25}=0,96; f(2)=0,9612260675; f(2,6)=0,960240166; f(3)=0,960240166.$$

Từ đó suy ra A là đáp án.

Ví dụ 5. Mỗi trang giấy của cuốn sách giáo khoa cần diện tích 384 cm^2. Lề trên và lề dưới là 3cm, lề trái và lề phải là 2 cm. Hãy cho biết kích thước tối ưu của trang giấy.



A. Dài 24 cm; rộng 16 cm.

B. Dài 23,5 cm; rộng 17 cm.

C. Dài 25 cm; rộng 15,36 cm.

D. Dài 25,6 cm; rộng 15 cm.

Lời giải

Trang giấy có kích thước tối ưu khi diện tích phần trình bày nội dung là lớn nhất.

Gọi chiều dài của trang giấy là $x,(x>8\sqrt{6}),$ suy ra chiều rộng là $\dfrac{384}{x}$.

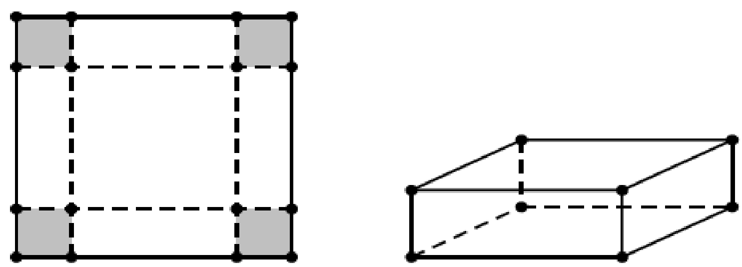
Diện tích để trình bày nội dung là: $f(x)=(x-6).\left(\frac{384}{x}-4\right)=-4x-\frac{2304}{x}+408.$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ với $x>8\sqrt{6}$

Ta có : $f'(x)=-4+\frac{2304}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=24$

Đáp án A.

Ví dụ 6. *(Đề minh hoạ lần 1 kỳ thi THPTQG năm 2017)* Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng *x* (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm *x* để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. x = 6. **B.** x = 3. **C.** x = 2. **D.** x = 4.

Lời giải

Thể tích của hộp là: $V(x)=x(12-2x)^2$. Ta cần tìm x để V(x) đạt giá trị lớn nhất với 0 < x < 6.

Cách 1:

Ta có: *V(6) = 0; V(3) = 108; V(2) = 128; V(4) = 64.*

Suy ra C là đáp án.

Cách 2:

Ta có: $V(x)=4x(x^2-12x+36)=4x^3-48x^2+144x.$

Suy ra: $V'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-96x+144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=2 \end{array}\right.$

Mà V(6) = 0; V(2) = 128 nên x = 2 thỏa mãn đề bài.

Đáp án C.

Cách 3:

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$V(x)=2.2x(6-x)(6-x) \overset{AM-GM}{\leq} 2.\left[\frac{2x+(6-x)+(6-x)}{3}\right]^3=2.64=128.$$

Đẳng thức xảy ra khi : 2x = 6 – x => x = 2.

Đáp án C.

Cách 4:

Sử dụng chức năng TABLE của MTCT (*fx-570ES PLUS*) ta thực hiện như sau:

Bước 1: Nhấn MODE chọn chức năng TABLE bằng cách nhấn số 7.

Bước 2: Màn hình yêu cầu nhập hàm số f(x) bạn đọc hãy nhập V(x) vào sau đó nhấn dấu "=".

Bước 3: Màn hình hiện "Start?" đây là giá trị bắt đầu, bọn đọc nhấn số 1 sau đó nhấn dấu "=". Màn hình hiện tiếp "End?" đây là giá trị kết thúc, bạn đọc nhấn số 6 sau đó nhấn dấu "=". Màn hình lại hiện tiếp "Step?" đây là khoảng cách mà bạn đọc cần chọn để đặt khoảng cách cho các giá trị của *x*, với bài này bạn đọc nhấn số 1 sau đó nhấn dấu "=".

Bước 4: Màn hình hiện lên cho ta một bảng gồm hai cột, cột bên trái là giá trị của *x* kèm theo đó là các giá trị tương ứng của V(x) ở bên phải. Dựa vào bảng này bạn đọc sẽ suy ra x = 2 thì V(x) lớn nhất.

Đáp số C.

Bình luận: Sau khi xem 4 cách giải trên đâu đó sẽ có bạn đọc cho rằng cách giải thứ nhất hoặc
cách giải thứ tư là nhanh chóng và đơn giản nhất. Tuy nhiên quan điểm của tác giả như sau:

- Cách giải thứ nhất không phải bài nào cũng áp dụng được.
- Cách giải thứ tư không hữu ích trong các bài toán các biến số là số lẻ (hay bạn đọc còn gọi

là số xấu) vì giá trị của $f(x)$ trong bảng có thể là lớn nhất (nhỏ nhất) nhưng chưa hẳn đã lớn nhất (nhỏ nhất) trên miền ta đang xét. Ở ví dụ này các giá trị của x đưa ra ở các phương
án A, B, C, D là số nguyên nên ta mới có thể nhanh chóng so sánh và đối chiếu với các giá
trị trong máy tính.

- Theo tác giả cách giải thứ ba là nhanh chóng và khoa học nhất, bài làm ở trên tác giả đã

giải chi tiết, tác giả đã đi tìm giá trị lớn nhất của $V(x)$. Tuy nhiên nếu chỉ tìm x để $V(x)$ lớn nhất thì ta có thể tìm được ngay nhờ việc giải phương trình: $4x = 12 - 2x$ hoặc $2x = 6 - x$, cả hai phương trình này đều cho ta nghiệm $x = 2$.

- Câu hỏi: *Tại sao tác giả lại tìm được một trong hai phương trình* $4x = 12 - 2x$ *hoặc* $2x = 6 - x$ *?* Câu trả lời rất đơn giản, trong mục A (kiến thức cần nhớ) tác giả đã cung cấp cho bạn đọc một dẫn xuất của bất đẳng thức *AM-GM* đó là:

Ta có: $\sqrt[3]{abc} \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{a+b+c}{3} \Rightarrow abc \leq \dfrac{(a+b+c)^3}{27}$, với a, b, c là các số thực dương.

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c.

Dẫn xuất của bất đẳng thức *AM-GM* trong phần tác giả đóng khung rất mạnh đối với bài toán này vì nó chuyển trạng thái liên kiết của *a*, *b*, *c* từ liên kết nhân sang liên kết cộng. Trở lại với bài toán Ta cần tìm *x* để 2 $V(x) = x(12\text{-}2x)^2$ đạt giá trị lớn nhất với $0 < x < 6$. Trong biểu thức $V(x)$ đang có các liên kết nhân cụ thể là các liên kết nhân của *x*, 12 - 2*x* và 12 - 2*x*, nếu ta dùng ngay *AM-GM* để chuyển sang liên kết cộng thì sẽ được tổng:

$V(x) = x(12-2x)(12-2x) \overset{AM-GM}{\leq} \left(\dfrac{x+(12-2x)+(12-2x)}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{24-3x}{3}\right)^3$, rõ ràng rằng ta không thử được x . Tuy nhiên nếu ta chỉ nhận thêm 4 vào thì mọi chuyện sẽ khác:

$V(x) = \dfrac{1}{4}.4x(12-2x)(12-2x) \overset{AM-GM}{\leq} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4x+(12-2x)+(12-2x)}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{4}.512 = 128,$ đẳng thức xảy ra khi : $4x = 12-2x \Leftrightarrow x = 2.$

Như vậy để giải bài toán này bạn đọc chỉ cần giải phương trình 4*x* = 12-2*x* hoặc 2*x* = 6 - *x* là tìm ran gay đáp án. Việc tìm ra một trong hai phương trình trên không khó vì nó chỉ là các bước xác định điểm rơi đơn giản của bất đẳng thức *AM-GM*.

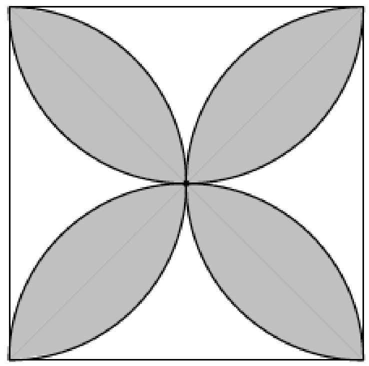
- Câu hỏi: *Nếu đề bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất của V(x) thì liệu việc tính toán có mất thời gian và gây sai lầm khi tính toán không, vì đây có số mũ chưa kể khả năng số xấu?* Rõ ràng việc tìm giá trị lớn nhất như ở trên biểu thức có vẻ khá dài và có lẽ cũng là trở ngại nhất định cho một số bạn đọc, để giải quyết vấn đề này (cách làm này chỉ được áp dụng cho hình thức thi trắc nghiệm) bạn đọc làm như sau: Đầu tiên bạn đọc xác định điểm rơi để tìm *x* với mục đích xác định xem *x* bằng bao nhiêu thì V(x) lớn nhất (giả sử x =x_0), sau đó bạn đọc tính V(x_0)như vậy là bạn đọc đã tìm ra giá trị lớn nhất của V(x).

  Cụ thể ta có thể tìm giá trị lớn nhất của V(x) trong ví dụ trên như sau:

  Bước 1: Giải phương trình 4x = 12 – 2x ta có x = 2.

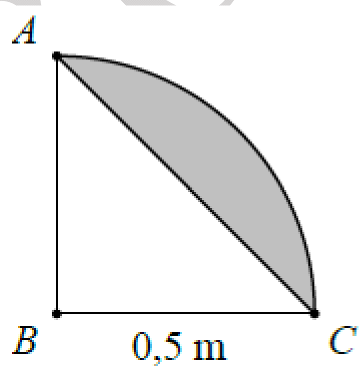
  Bước 2: Tính V(2) ta có ngay giá trị lớn nhất của V(x) = 128.

Ví dụ 7: Một người thợ cơ khí vẽ bốn nửa đường tròn trên tấm nhôm hình vuông cạnh 1 m, sau đó cắt thành hình bông hoa (phần tô đậm trong hình vẽ). Hãy tính diện tích của bông hoa cắt được.



A. $0,56m^2$. **B.** $0,43m^2$. **C.** $0,57m^2$. **D.** $0,44m^2$.

Lời giải



Nhận xét: Diện tích của nửa cánh hoa sẽ bằng diện tích của một phần tư đường tròn trừ đi diện tích tam giác ABC (xem hình vẽ bên).

Diện tích của nửa cánh hoa là: $\frac{1}{4}.3,14.0,5^2 - \frac{1}{2}.0,5^2 = 0,07125(m^2)$.

Diện tích của bông hoa cắt được là: $0,07125.8 = 0,57(m^2)$.

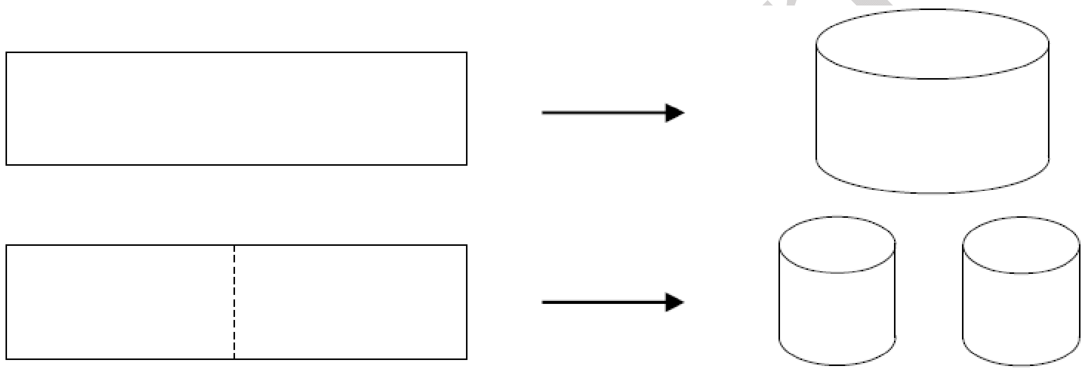
Đáp án C.

Ví dụ 8. *(Đề minh hoạ kỳ thi THPTQG năm 2017)* Từ một tấm nhôm hình chữ nhật có kích thước 50 cm x 240 cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50 cm, theo hai cách sau (xem hình minh hoạ dưới đây):

Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quang của một thùng.

Kí hiệu là thể tích V_1 của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Lời giải

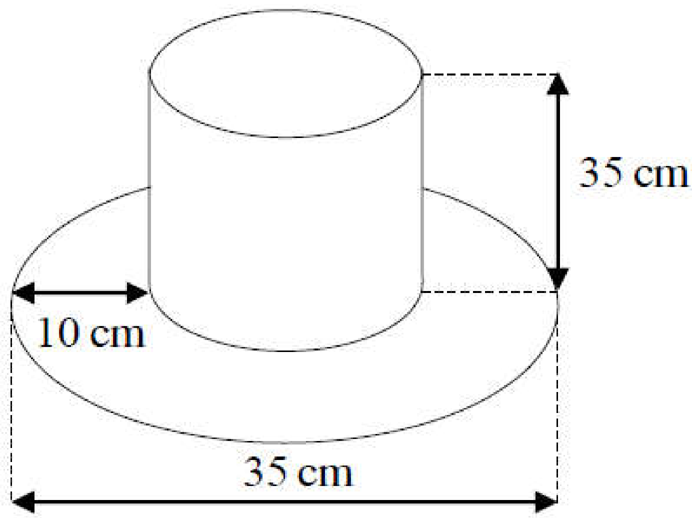
Gọi bán kính đáy của thùng gò theo cách 1 là R_1 và bán kính đáy của thùng được gò theo cách 2 là R_2. Ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{50.\pi R_1^2}{2.50.\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{2R_2^2}$.

Mà: $240=2\pi R_1=4\pi R_2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2}=2 \Rightarrow \frac{R_1^{\,2}}{R_2^{\,2}}=4$

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{2}=2.$

Đáp án C.

Ví dụ 9. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần để làm cái mũ đó biết rằng vành mũ hình tròn và ống mũ hình trụ.



A. $700\pi cm^2$ **B.** $754,25\pi cm^2$ **C.** $750,25\pi cm^2$ **D.** $756,25\pi cm^2$

Lời giải

Ống mũ là hình trụ với chiều cao h = 30 cm, bán kính đáy $R=\frac{35-2.10}{2}=7,5cm.$

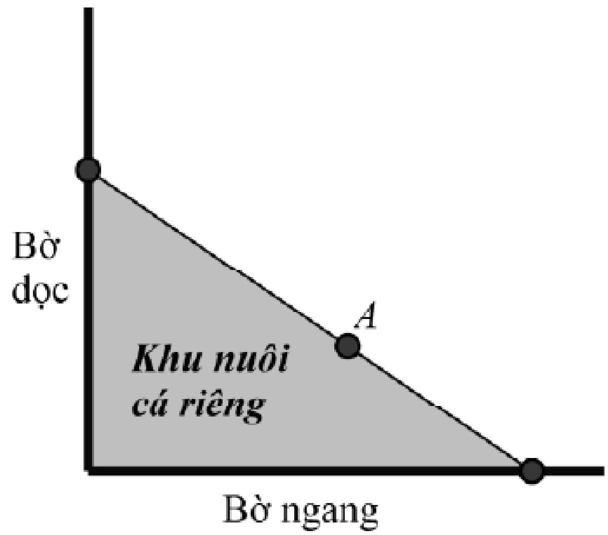
Diện tích vải để làm ống mũ là: $S_1=2\pi Rh+\pi h^2=2\pi.7,5.30+\pi.7,5^2=506,25\pi(cm^2).$

Diện tích vải để là vành mũ là: $S_2=\pi.17,5^2-\pi.7,5^2=250\pi(cm^2).$

Tổng diện tích vải cần để là cái mũ là: $506,25\pi+250\pi=756,25\pi(cm^2)$

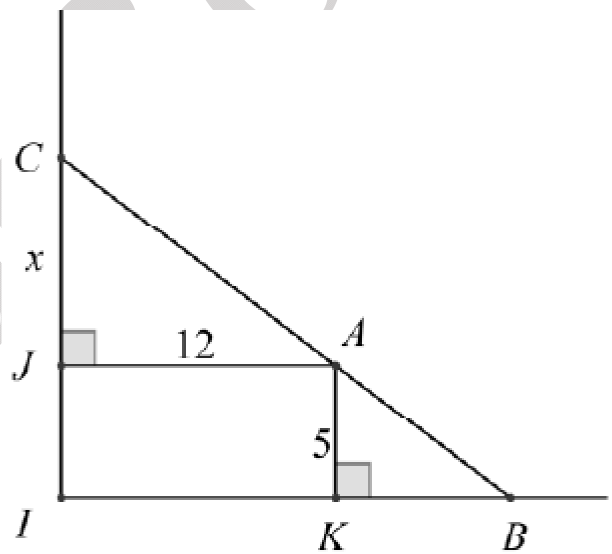
Đáp án D.

Ví dụ 10. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí *A*. Hỏi diện nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



A. $120m^2$ **B.** $156m^2$ **C.** $238,008(3)m^2$ **D.** $283,003(8)m^2$

Lời giải



Đặt tên các điểm như hình vẽ. Đặt $CJ = x, (x > 0)$.

Vì hai tam giác AJC và BKA là hai tam giác đồng dạng nên: $\frac{x}{5} = \frac{12}{KB} \Leftrightarrow KB = \frac{60}{x}$.

Diện tích của khu nuôi cá là: $S(x)=\frac{1}{2}(x+5).(\frac{60}{x}+12)$

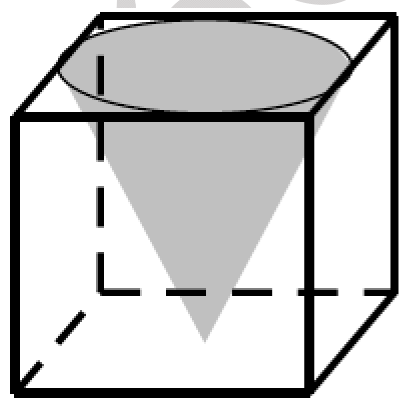
$\Leftrightarrow S(x)=\frac{1}{2}\left(60+12x+\frac{300}{x}+60\right)\Leftrightarrow S(x)=6x+\frac{150}{x}+60$

Ta có: $S'(x)=0\Leftrightarrow 6-\frac{150}{x^2}=0\Leftrightarrow x=5.$

Suy ra diện tích nhỏ nhất có thể giăng là: $S(5)=120(m^2)$

Đáp án A.

Ví dụ 11. Một khối lập phương có cạnh 1 m chứa đầy nước. Đặt vào trong khối đó một khối nón có đỉnh trùng với tâm một mặt của lập phương, đáy khối nón tiếp xúc với các cạnh của mặt đối diện. Tính tỉ số thể tích của lượng nước tràn ra ngoài và lượng nước ban đầu trong khối hộp.



A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{12}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{\pi}$.

Lời giải

Thể tích của lượng nước tràn ra ngoài bằng thể tích của khối nón.

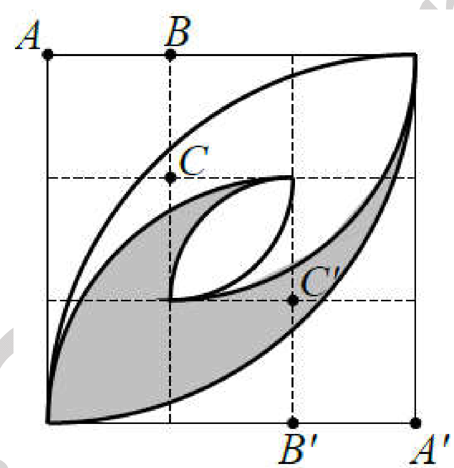
Thể tích của khối nón là: $S_1=\frac{1}{3}.1.\pi.0,5^2\Leftrightarrow S_1=\frac{\pi}{12}.$

Thể tích của khối lập phương là: $S_2 = 1.1.1 \Leftrightarrow S_2 = 1$.

Do đó tỉ số cần tìm là: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{12} : 1 = \frac{\pi}{12}$.

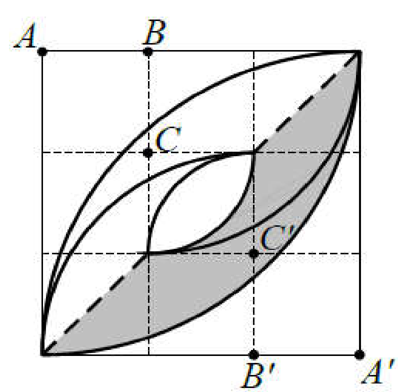
Đáp án A.

Ví dụ 12. Một miếng nhôm hình vuông cạnh 1,2 m được người thợ kẻ lưới thành 9 ô vuông nhỏ có diện tích bằng nhau. Sau đó tại vị trí điểm A và A' vẽ hai cung tròn bán kính 1,2 m; tại vị trí điểm B và B' vẽ hai cung tròn bán kính 0,8 m; tại vị trí điểm C và C' vẽ hai cung tròn bán kính 0,4 m. Người này cắt được hai cánh hoa (quan sát một cánh hoa được tô đậm trong hình). Hãy tính diện tích phần tôn dùng để tạo ra một cánh hoa.



A. $0,3648m^2$ **B.** $0,3637m^2$ **C.** $0,2347m^2$ **D.** $0,2147m^2$

Lời giải



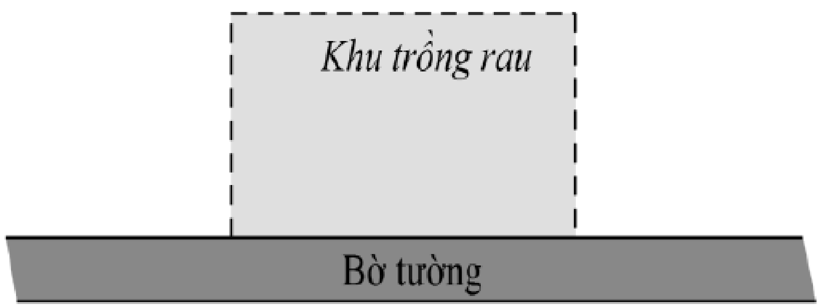
Tổng diện tích của hai cánh hoa bằng hai lần diện tích của phần tô đậm trong hình vẽ. Do đó diện tích của một cách hoa bằng diện tích của phần tô đậm trong hình vẽ.

Suy ra diện tích của cánh hoa là:

$$S=\left(\frac{\pi.1,2^2}{4}-\frac{1}{2}.1,2^2\right)-\left(\frac{\pi.0,4^2}{4}-\frac{1}{2}.0,4^2\right)=0,3648(m^2)$$

Đáp án A.

Ví dụ 13. Bác nông dân làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với bờ tường. Bác chỉ làm ba mặt vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 180 m lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Hỏi diện tích lớn nhất bác có thể rào là bao nhiêu.



A. $3600m^2$ **B.** $4000m^2$ **C.** $8100m^2$ **D.** $4050m^2$

Lời giải

Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ tường, y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ tường. Theo bài ra ta có: $x+2y=180 \Leftrightarrow x=180-2y$.

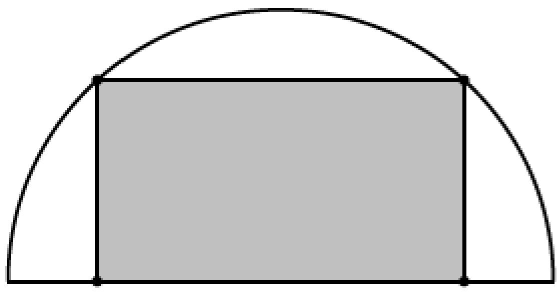
Diện tích của khu trồng rau là: $S=x.y=(180-2y).y$.

Ta có: $S=\frac{1}{2}.2y.(180-2y)\le\frac{1}{2}.\frac{(2y+180-2y)^2}{4}\Leftrightarrow S\le 4050$

Đẳng thức xảy ra khi: $2y = 180 - 2y \Leftrightarrow y = 45(m)$

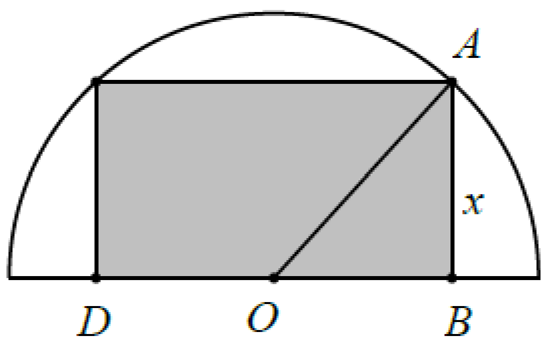
Đáp án D.

Ví dụ 14. Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa đường tròn bán kính 1 m, người ta cắt ra một hình chữ nhật (phần tô đậm trong hình vẽ). Hỏi có thể cắt được miếng tôn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu.



A. $0,8m^2$ **B.** $1m^2$ **C.** $1,6m^2$ **D.** $2m^2$

Lời giải



Đặt: $AB = x, (0 < x < 1)$. Suy ra: $BD = 2OB = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích của hình chữ nhật là: $f(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

Ta có: $f^2(x) = 4x^2.(1 - x^2)$.

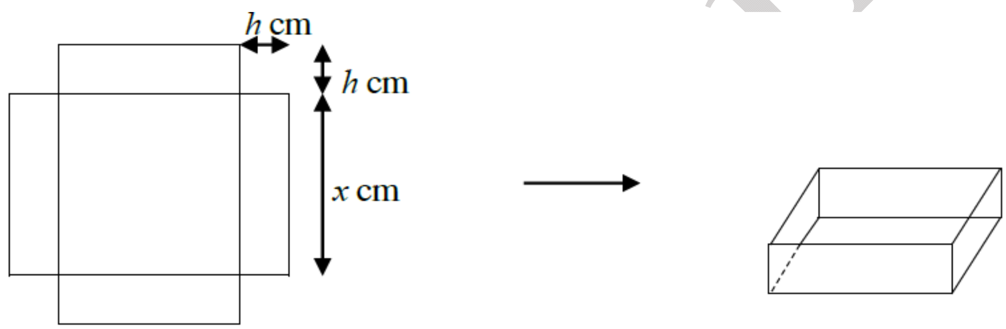
Đặt: $y = x^2, (0 < y < 1)$. Xét $g(y) = 4y(1 - y) = -4y^2 + 4y$.

Ta có f(x) lớn nhất khi y(y) lớn nhất, mà g(y) lớn nhất khi:

$y=-\frac{4}{2.(-4)}=\frac{1}{2}$ .Suy ra f(x) lớn nhất khi $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \max f(x)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$

Đáp án B.

Ví dụ 15. Một hộp không nắp được làm từ một tấm bìa các tông. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), đường cao là h (cm) và có thể tích là 500 cm^3 . Tìm x sao cho diện tích của mảnh bìa các tông là nhỏ nhất.



A. 5 cm **B.** 10 cm **C.** 15 cm **D.** 20 cm

Lời giải

Ta có thể tích của cái hộp là: $V=x^2.h.$

Do hộp có thể tích bằng 500 cm^3 nên ta có: $x^2.h=500\Rightarrow h=\frac{500}{x^2}.$

Tổng diện tích của tấm bìa các tông là: $S(x)=x^2+4xh\Rightarrow S(x)=x^2+\frac{200}{x}.$

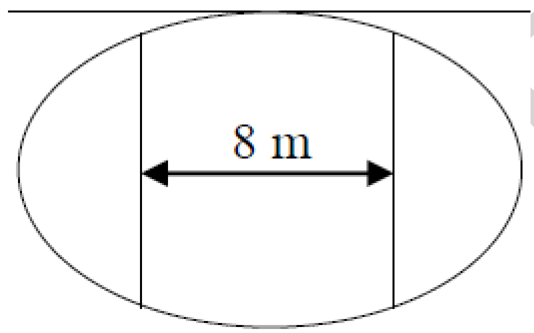
Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $S(x)=x^2+\frac{200}{x}$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $S(x)=x^2+\frac{100}{x}+\frac{100}{x}\overset{AM-GM}{\geq}3\sqrt[3]{x^2.\frac{100}{x}.\frac{100}{x}}\Rightarrow S(x)\geq 300.$

Đẳng thức xảy ra khi: $x^2 = \frac{100}{x} \Leftrightarrow x = 10(cm)$.

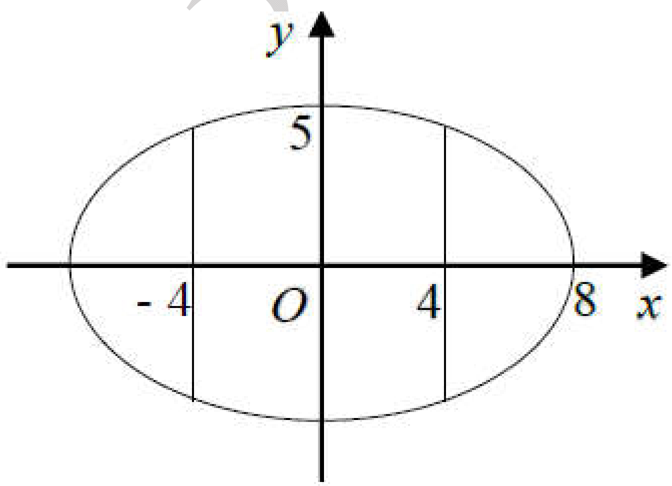
Đáp án B.

Ví dụ 16. *(Đề thi thử nghiệm kỳ thi THPTQG năm 2017)* Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một mảnh đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng như hình vẽ. Biết kinh phí trồng hoa là 100000 đồng/ 1 m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên mảnh đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7862000 đồng. **B.** 7653000 đồng. **C.** 7128000 đồng. **D.** 7826000 đồng.

Lời giải



Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Ta có phương trình đường elip là: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Phần đường cong phía trên trục Ox có phương trình là: $y = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}$

Suy ra diện tích mảnh đất trồng hoa là: $S = 2\int_{-4}^{4} 5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}dx.$

Sử dụng MTCT ta tính được 2S = 76,5289182 (m^2)

Suy ra số tiền để trên mảnh đất này là: 2S. 100000 = 7652891,82 (đồng).

Do làm tròn đến hàng nghìn nên số tiền là 7653000 đồng.

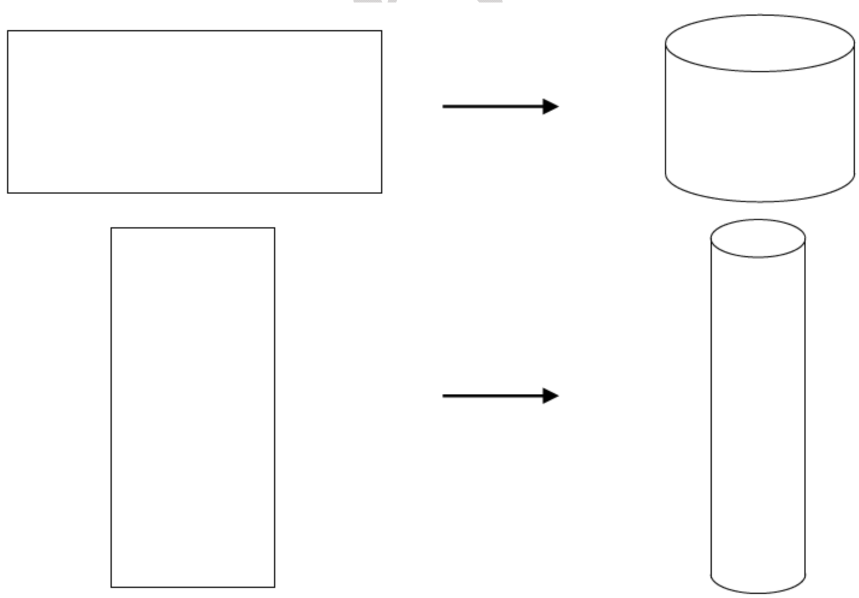
Đáp án B.

Ví dụ 17. Từ tấm nhôm hình chữ nhật có cùng kích thước 50 cm x 120 cm người thợ muốn làm một cái thùng hình trụ bằng cách gò tấm tôn thành mặt xung quanh của cái thùng (đáy của thùng được cắt bổ sung từ một miếng tôn khác). Có hai cách gò sau đây (quan sát hình vẽ minh hoạ):

Cách 1: Gò sao cho cái thùng có chiều cao 50 cm.

Cách 2: Gò sao cho cái thùng có chiều cao 120 cm.

Gọi V_1 là thể tích của thùng nếu gò theo cách 1, V_2 là thể tích của thùng nếu gò theo cách 2. Kết luận nào sau đây là đúng.



A. $V_1 = V_2$ **B.** $V_1 < V_2$ **C.** $V_1 > V_2$ **D.** $V_1 = \frac{5}{12}V_2.$

Lời giải

Bán kính đáy của thùng nếu gò theo cách 1 là: $2\pi R_1 = 120 \Leftrightarrow R_1 = \frac{60}{\pi}$

Thể tích của thùng nếu gò theo cách 1 là: $V_1 = \pi R_1{}^2.h_1 = \pi\left(\frac{60}{\pi}\right)^2.50 = \frac{180000}{\pi}$.

Bán kính đáy của thùng nếu gò theo cách 2 là: $2\pi R_2 = 50 \Leftrightarrow R_2 = \frac{25}{\pi}$.

Thể tích của thùng nếu gò theo cách 2 là: $V_2 = \pi R_2{}^2.h_2 = \pi\left(\frac{25}{\pi}\right)^2.120 = 75000$.

Suy ra: $V_1 > V_2$.

Đáp án C.