

## CHUYÊN ĐỀ 1: LƯỢNG GIÁC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Phương trình lượng giác cơ bản

1,  $\text{Cos}x = \text{Cos}\alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

#### Đặc biệt:

❖  $\text{Cos}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

❖  $\text{Cos}x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

❖  $\text{Cos}x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

2,  $\text{Sin}x = \text{Sin}\alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

#### Đặc biệt:

❖  $\text{Sin}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

❖  $\text{Sin}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

❖  $\text{Sin}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

#### 2. Công thức lượng giác cơ bản

1.  $\text{Sin}^2x + \text{Cos}^2x = 1$

2.  $\frac{1}{\text{Cos}^2x} = 1 + \text{Tan}^2x$

3.  $\frac{1}{\text{Sin}^2x} = 1 + \text{Cotg}^2x$

4.  $\text{Cotg}x \cdot \text{tan}x = 1$

5.  $\text{Sin}^2x = (1 - \text{Cos}x)(1 + \text{Cos}x)$

6.  $\frac{1}{\text{Cos}^2x} = 1 + \text{Tan}^2x$

7.  $\text{Sin}(a \pm b) = \text{Sin}a\text{Cos}b \pm \text{Cos}a\text{Sin}b$

8.  $\text{Cos}(a + b) = \text{Cos}a\text{Cos}b \mp \text{Sin}a\text{Sin}b$

3,  $\text{Tan}x = \text{Tan}\alpha$

$$\Leftrightarrow x = -\alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

#### Đặc biệt:

❖  $\text{Tan}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

❖ **Tanx không xác định khi**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$   
( $\text{Cos}x = 0$ )

4,  $\text{Cotg}x = \text{Cotg}\alpha$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

#### Đặc biệt:

❖  $\text{Cotg}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

❖ **Cotgx không xác định khi:**  
 $x = k\pi (\text{Sin}x = 0)$

13.  $\text{Sin}^2x = \frac{\text{Tan}^2x}{1 + \text{Tan}^2x}$

14.  $\text{Tan}^2x = \frac{1 - \text{Cos}2x}{1 + \text{Cos}2x}$

❖  $\text{Cos}x\text{Cos}y =$

$$\frac{1}{2} [\text{Cos}(x+y) + \text{Cos}(x-y)]$$

❖  $\text{Sin}x\text{Cos}y = \frac{1}{2} [\text{Sin}(x+y) + \text{Sin}(x-y)]$

❖  $\text{Sin}x\text{Sin}y = -\frac{1}{2} [\text{Cos}(x+y) - \text{Cos}(x-y)]$

$$9. \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$10. \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ = 1 - 2\sin^2 x$$

$$11. \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

$$12. \sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\diamond \sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\diamond \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\diamond \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\diamond \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

### 3. Cách giải một số phương trình lượng giác thường gặp

a) Phương trình bậc 2 đối với một hàm số lượng giác

Dạng  $at^2 + bt + c = 0$  (với  $t =$  một trong 4 hàm  $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ )

Giải phương trình bậc 2 tìm  $t$  thuộc  $[-1; 1]$

b) Phương trình bậc nhất đối với  $\sin x$  và  $\cos x$

Dạng  $a\sin x + b\cos x = c$

- Nếu  $a^2 + b^2 < c^2$  thì phương trình vô nghiệm

- Nếu  $a^2 + b^2 \geq c^2$  thì chia cả 2 vế cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$

Biến đổi phương trình về  $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  với  $\alpha$  là góc có  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

c) Phương trình đẳng cấp bậc 2

Dạng  $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x + d = 0$

TH1:  $\cos x = 0$  thay vào pt xem có thỏa mãn không

TH2:  $\cos x \neq 0 \leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Chia cả 2 vế cho  $\cos^2 x$  đưa phương trình về theo  $\tan x$  rồi giải tiếp.

## B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### I. TRẮC NGHIỆM

#### DẠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

**Câu 1:** Tập xác định của hàm số  $y = \sin \frac{x}{x+1}$  là:

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$       B.  $D = (-1; +\infty)$       C.  $D = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$       D.  $D = \mathbb{R}$

**Câu 2:** Tập xác định của hàm số  $y = \cos \sqrt{\frac{x+1}{x}}$  là:

- A.  $D = [-1; 0)$       B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$       C.  $D = (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$       D.  $D = (0; +\infty)$

**Câu 3:** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1 - \cos^2 x$  là:

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$       B.  $D = \{0\}$       C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{R}\}$       D.  $D = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{R}\}$

**Câu 4:** Tập  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$  là tập xác định của hàm số nào sau đây?

- A.  $y = \tan x$       B.  $y = \cot x$       C.  $y = \cot 2x$       D.  $y = \tan 2x$

**Câu 5:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$  là:

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$       B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$   
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$       D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

**Câu 6:** Xét hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; 0]$ . Câu khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Trên các khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  hàm số luôn đồng biến,  
B. Trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  hàm số đồng biến và trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  hàm số nghịch biến  
C. Trên khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$  hàm số nghịch biến và trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  hàm số đồng biến.  
D. Trên các khoảng  $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  hàm số luôn nghịch biến.

**Câu 9:** Xét hàm số  $y = \tan x$  trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Câu khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  hàm số luôn đồng biến.
- B. Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  hàm số đồng biến và trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  hàm số nghịch biến.
- C. Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  hàm số nghịch biến và trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  hàm số đồng biến.
- D. Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  hàm số luôn nghịch biến.

**Câu 10:** Chọn khẳng định **sai** về tính chẵn lẻ của hàm số trong các khẳng định sau.

- A. Hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.      B. Hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn
- C. Hàm số  $y = \tan x$  là hàm số chẵn      D. Hàm số  $y = \cot x$  là hàm số lẻ

**Câu 11:** Trong các hàm số sau đâu là hàm số chẵn?

- A.  $y = \sin 2x$       B.  $y = 3\sin x + 1$       C.  $y = \sin x + \cos x$       D.  $y = \cos 2x$

**Câu 12:** Hàm số  $y = \sin 2x$  tuần hoàn với chu kỳ:

- A.  $2\pi$       B.  $\pi$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $\frac{\pi}{4}$

**Câu 13:** Hàm số  $y = \cos \frac{x}{3}$  tuần hoàn với chu kỳ:

- A.  $2\pi$       B.  $\frac{\pi}{3}$       C.  $6\pi$       D.  $3\pi$

**Câu 14:** Hàm số tuần hoàn với chu kỳ:

- A.  $2\pi$       B.  $\pi$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $4\pi$

## DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

**Câu 1:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = 1$  là:

- A.  $x = k\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$       C.  $x = k2\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Câu 2:** Nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$       C.  $x = k\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  là:

- A.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$       B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$       C.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$       D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

**Câu 4:** Nghiệm của phương trình  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$  là:

- A.  $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$       B.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$       C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$       D.  $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$

**Câu 5:** Nghiệm của phương trình  $\sin 3x = \cos x$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$       B.  $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$   
 C.  $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$       D.  $x = k\pi; x = k\frac{\pi}{2}$

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\sin^2 x + \sin x = 0$  thỏa mãn điều kiện  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

- A.  $x = 0$       B.  $x = \pi$       C.  $x = \frac{\pi}{3}$       D.  $x = \frac{\pi}{2}$

**Câu 7:** Nghiệm của phương trình  $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$  là:

- A.  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$       B.  $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$   
 C.  $x = k\pi; x = \pi + k2\pi$       D.  $x = k2\pi; x = k\frac{\pi}{2}$

**Câu 8:** Nghiệm của phương trình  $\cos x + \sin x = 1$  là:

- A.  $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$       B.  $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$   
 C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = k2\pi$       D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = k\pi$

**Câu 9:** Nghiệm của phương trình  $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0$  là:

- A.  $x = k\pi$       B.  $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$       C.  $x = k \cdot \frac{\pi}{8}$       D.  $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$

### DẠNG 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

**Câu 1:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3\sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A. -8 và -2      B. 2 và 8      C. -5 và 2      D. -5 và 3

**Câu 2:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  lần lượt là:

- A. -2 và 7      B. -2 và 2      C. 5 và 9      D. 4 và 7

**Câu 3:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$  lần lượt là:

- A.  $\sqrt{2}$  và 2                      B. 2 và 4                      C.  $4\sqrt{2}$  và 8                      D.  $4\sqrt{2} - 1$  và 7

**Câu 4:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $\sin^2 x - 4\sin x - 5$  là:

- A. -20                      B. -9                      C. 0                      D. -8

**Câu 5:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 1 - 2\cos x - \cos^2 x$  là:

- A. 2                      B. 5                      C. 0                      D. 3

**Câu 6:** GTNN và GTLN của hàm số  $y = 5\cos 2x - 12\sin 2x + 4$  bằng:

- A. -9 và 17                      B. 4 và 15                      C. -10 và 14                      D. -4 và 8

**Câu 7:** Tìm GTLN và GTNN của hàm số  $y = (2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$

- A.  $\frac{5}{2}$  và  $-\frac{5}{2}$                       B.  $\frac{7}{2}$  và  $-\frac{7}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$  và  $-\frac{1}{2}$                       D. 5 và 1

**Câu 8:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3\sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A. -8 và -2                      B. 2 và 8                      C. -5 và -2                      D. -5 và 3

**Câu 9:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  lần lượt là:

- A. -2 và 7                      B. -2 và 2                      C. 5 và 9                      D. 4 và 7

**Câu 10:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$  lần lượt là:

- A.  $\sqrt{2}$  và 2                      B. 2 và 4                      C.  $4\sqrt{2}$  và 8                      D.  $4\sqrt{2} - 1$  và 7

**Câu 11:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$  là:

- A. -20                      B. -1                      C. 0                      D. 9

**Câu 12:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4 - 2\cos x - \cos^2 x$  là:

- A. 2                      B. 5                      C. 0                      D. 3

## II. TỰ LUẬN

### GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH SAU

Bài 1: a)  $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

b)  $3 - 4\cos^2 x = 2\sin^2 x + \sin x$

c)  $2\cos^4 x + 3\sin^2 x - 2 = 0$

d)  $4\sin^4 x - 12\cos^2 x - 7 = 0$

e)  $5\cos 2x + 22\sin x - 17 = 0$

f)  $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$

g)  $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$

Bài 2: a)  $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

b)  $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}$

d)  $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 4\sin x \cdot \cos x$

e)  $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

---

c)  $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin x$

Bài 3: a)  $6 \sin^2 x + 7\sqrt{3} \sin 2x - 8 \cos^2 x = 6$

b)  $2 \cos^2 x + 2 \sin 2x - 4 \sin^2 x = 1$

c)  $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$

Bài 4: a)  $\cos 2x - \cos x - 3 \sin x - 2 = 0$

e)  $2 \sin^2 2x + \sin 6x = 2 \cos^2 x$

b)  $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = \sin x$

f)  $2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$

c)  $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$

g)  $(\sin x - \cos x + 1)(2 \sin x - \cos x) = \sin 2x$

d)  $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$

---

## CHUYÊN ĐỀ 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT – NHỊ THỨC NIU TƠN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. QUI TẮC ĐẾM.

**1. Quy tắc cộng:** Giả sử công việc có thể tiến hành theo một trong hai phương án A và B. Phương án A có thể thực hiện bởi n cách; phương án B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện theo n + m cách.

**2. Quy tắc nhân:** Giả sử công việc bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể thực hiện bởi n cách; công đoạn B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện bởi n.m cách.

#### 3. Giai thừa

$$0! = 1; n! = 1.2.3 \dots n$$

Tính chất:  $n! = n(n-1)!$

#### II. HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

##### 1. Hoán vị:

**a. Định nghĩa:** Cho tập A có n phần tử. Mỗi sự sắp xếp của n phần tử đó theo một thứ tự định trước là một phép hoán vị các phần tử của tập A.

**b. Định lý:** Số phép hoán vị của tập hợp có n phần tử, kí hiệu  $P_n$  là:  $P_n = n! = 1.2.3 \dots n$

##### 2. Chỉnh hợp:

**a. Định nghĩa:** Cho tập hợp A có n phần tử. Xét số  $k \in \mathbb{N}$  mà  $1 \leq k \leq n$ . Khi lấy ra k phần tử trong số n phần tử rồi đem sắp xếp k phần tử đó theo một thứ tự định trước, ta được một phép chỉnh hợp chập k của n phần tử.

**b. Định lý:** Số phép chỉnh hợp chập k của n phần tử, kí hiệu  $A_n^k$  là:

$$A_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

##### 3. Tổ hợp:

**a. Định nghĩa:** Cho tập hợp A có n phần tử và số  $k \in \mathbb{N}$  mà  $1 \leq k \leq n$ . Một tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

**b. Định lý:** Số tổ hợp chập k của n phần tử, kí hiệu  $C_n^k$  là:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$$

##### c. Hai tính chất cơ bản của tổ hợp:

Cho  $a, k \in \mathbb{N}^*$ :



$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad (1 \leq k \leq n)$$

### **III. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

#### **Nhận xét:**

- Trong khai triển nhị thức Newton có  $n + 1$  số hạng.
- Trong một số hạng thì tổng số mũ của  $a$  và  $b$  bằng  $n$ .
- Các hệ số của khai triển nhị thức cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau.
- Số hạng tổng quát thứ  $k + 1$  kí hiệu  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ .
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$
- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

#### **Chú ý:**

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$  là khai triển theo số mũ của  $a$  giảm dần.
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$  là khai triển theo số mũ của  $a$  tăng dần.

### **IV. XÁC SUẤT**

#### **1. Khái niệm:**

Không gian mẫu  $\Omega$  là tập hợp tất cả kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

Biến cố  $A$  là tập hợp con của  $\Omega$

Hai biến cố xung khắc nếu giao của chúng là tập rỗng

Hai biến cố là độc lập nếu sự xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến sự xảy ra biến cố kia.

Xác suất của biến cố  $A$  là  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Trong đó  $n(A)$  là số phần tử của  $A$ ,  $n(\Omega)$  là số phần tử của  $\Omega$ .

#### **2. Tính chất**

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ nếu 2 biến cố } A, B \text{ độc lập nhau.}$$

## B. PHẦN BÀI TẬP

### I. Trắc nghiệm

**Dạng 1: Bài toán về quy tắc đếm**

**Phương pháp giải:** Cần phân biệt công việc phải làm được tiến hành theo phương án A hoặc B để chọn quy tắc cộng, hoặc bao gồm công đoạn A và B để chọn quy tắc nhân.

**Câu 1:** Bạn X vào siêu thị để mua một áo sơ mi, theo cỡ 40 hoặc 41. Cỡ 40 có 3 màu khác nhau, cỡ 41 có 4 màu khác nhau. Hỏi X có bao nhiêu cách chọn?

- A. 4                                      B. 3                                      C. 7                                      D. 12

**Câu 2:** Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ . Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số gồm ba chữ số khác nhau chọn trong số các phần tử của A?

- A. 30                                      B. 18                                      C. 12                                      D. 60

**Câu 3:** Từ tập  $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$  hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho chữ số 1 xuất hiện 3 lần, còn các chữ số khác xuất hiện một lần?

- A. 840                                      B. 800                                      C. 1000                                      D. 860

**Phương pháp giải:**

• Sử dụng phép xếp đặt của n phần tử có thứ tự:  $P_n = n! = 1.2.3...n$

**Thực hiện quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân**

**Câu 1:** Bạn X mời hai bạn nam và ba bạn nữ dự tiệc sinh nhật. Bạn định xếp nam, nữ ngồi riêng trên các chiếc ghế, xếp theo một hàng dài. Hỏi X có bao nhiêu cách xếp đặt?

- A. 120                                      B. 24                                      C. 6                                      D. 60

**Câu 2:** Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 5 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách.

- A. 120                                      B. 24                                      C. 6                                      D. 60

**Dạng 3: Thực hiện phép chỉnh hợp**

**Phương pháp giải:** Phép xếp đặt có thứ tự của k phần tử trong n phần tử:

$$A_n^k = n.(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Câu 1:** Trong mặt phẳng cho 7 điểm A, B, C, D, E, M, N khác nhau. Có bao nhiêu vector nối hai điểm trong các điểm đó?

- A. 120                                      B. 24                                      C. 42                                      D. 60

**Câu 2:** Từ tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

- A. 120                                      B. 24                                      C. 6                                      D. 300

**Câu 3:** Một ngày học 3 môn trong số 7 môn học. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thời khoá biểu trong một ngày.

- A. 120                      B. 210                      C. 6                      D. 60

**Dạng 4: Thực hiện phép tổ hợp**

**Phương pháp giải:** Phép xếp đặt không có thứ tự của k phần tử chọn trong n phần tử:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

**Câu 1:** Cho 7 điểm phân biệt không tồn tại ba điểm thẳng hàng. Từ 7 điểm trên có thể lập được bao nhiêu tam giác?

- A. 12                      B. 24                      C. 35                      D. 60

**Câu 2:** Có mấy cách rút 3 quân bài từ bộ bài 52 quân

- A. 1200                      B. 2460                      C. 4960                      D. 5670

**Câu 3:** Có mấy cách phân phối 15 sản phẩm cho 3 người sao cho người thứ nhất có hai sản phẩm, người thứ hai có 3 sản phẩm, người thứ 3 có 10 sản phẩm.

- A. 9030097                      B.  $\frac{15!}{2!3!10!}$                       C. 670598760                      D. 20

**Dạng 5: Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  trong phương trình chứa  $P_n, A_n^k, C_n^k$**

**Phương pháp giải:** Dùng các công thức:

$$P_n = n! \quad (n \geq 1); \quad A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1 \leq k \leq n); \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

**Câu 1:** Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$ , nếu có:  $\frac{2P_6}{P_{n-1}} = A_6^3 \quad (1)$ .

- A. 3                      B. 4                      C. -5                      D. 10

**Câu 2:** Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$ , nếu có:  $6n - 6 + C_n^3 \geq C_{n+1}^3 \quad (2)$

- A. 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12                      B. 4,5,6,7,8,9  
C. 1,2,3,4,5,6                      D. 10

**Dạng 6: Tìm phần tử đặc biệt trong khai triển của  $(a + b)^n$ . (Tìm số hạng chứa  $x^k$  trong khai triển)**

**Phương pháp giải:** Sử dụng công thức khai triển của nhị thức Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n \quad (\text{khai triển theo}$$

lũy thừa của a tăng, b giảm)

(Chú ý:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$  khai triển theo lũy thừa của  $a$  giảm dần,  $b$  tăng dần)

Cách 2: sử dụng số hạng tổng quát thứ  $k+1$  trong khai triển nhị thức Newton

**Câu 1:** Tìm số hạng chứa  $x^3$  trong khai triển  $(11+x)^{11}$ .

- A.  $C_{11}^3 11^8 x^3$       B.  $C_{11}^3 11^6 x^3$       C.  $C_{11}^3 11^2 x^3$       D.  $C_{11}^3 11^{10} x^3$

**Câu 2:** Trong khai triển  $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ , ( $x > 0$ ), hãy tìm số hạng không chứa  $x$ .

- A.  $C_{11}^3 11^6$       B.  $C_{10}^4 2^6 (-3)^4$       C. 0      D. 2108

**Câu 3:** Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển  $[1+x^2(1-x)]^6$ .

- A. 200      B. 300      C. 238      D. 234

**Câu 4:** Cho khai triển:  $(1+2x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ , có các hệ số  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}$ .

Tìm hệ số lớn nhất

- A. 15360      B. 15600      C. 120980      D. đáp án khác

**Dạng 7: Tìm tổng có chứa  $C_n^k$**

Phương pháp giải: Từ đề bài, ta liên kết với một nhị thức khai triển và cho  $x$  giá trị thích hợp, từ đó suy ra kết quả.

**Câu 1:** Tính tổng:  $S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ ;  $S_2 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$

- A.  $S_1 = 2^n, S_2 = 0$       B.  $S_1 = 0, S_2 = 2^n$       C.  $S_1 = 2^n, S_2 = 2^n$       D. đáp án khác

**Câu 2:** Tính tổng:  $S_3 = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n}$ ;  $S_4 = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}$

- A.  $S_3 = 2^{2n-1}, S_4 = 2^{2n-1}$       B.  $S_3 = 0, S_4 = 2^{2n-1}$   
C.  $S_3 = 2^{2n-1}, S_4 = 0$       D.  $S_3 = 0; S_4 = 0$

**Câu 3:** Tính tổng:  $T = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 - 2^3C_n^3 + \dots + (-2)^n C_n^n$

- A. 1      B. -1      C.  $(-1)^n$       D. đáp án khác

**Dạng 8: Tính xác suất**

Phương pháp giải:

Bước 1: mô tả không gian mẫu và tính  $n(\omega)$

Bước 2: đặt tên biến cố  $A$  và tính  $n(A)$ .

Bước 3: tính  $P(A) = \frac{n(A)}{n(\omega)}$

## II. BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Câu 1:** Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố A đến C có 4 con đường. Không có con đường nào nối trực tiếp thành phố B với D hoặc nối A đến D. Số đường đi khác nhau từ thành phố A đến D là

- A. 32                      B. 20                      C. 36                      D. 48

**Câu 2:** Số các số tự nhiên nhỏ hơn 200000, chia hết cho 3, có thể được viết bởi các chữ số 0, 1, 2 là

- A.  $N = 162$                       B.  $N = 144$                       C.  $N = 216$                       D.  $N = 243$

**Câu 3:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 3 chữ số là

- A.  $N = 250$                       B.  $N = 268$                       C.  $N = 294$                       D.  $N = 300$

**Câu 4:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2 là

- A.  $N = 1080$                       B.  $N = 1260$                       C.  $N = 1120$                       D.  $N = 1320$

**Câu 5:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 là

- A. 1320                      B. 1440                      C. 1280                      D. 2560

**Câu 6:** Có 20 đội bóng đá tham gia tranh cúp vô địch ngoại hạng Anh. Cứ 2 đội phải đấu với nhau 2 trận gồm một trận lượt đi và một trận lượt về. Sau mỗi vòng thì mỗi đội đã đá thêm một trận. Số trận và số vòng lần lượt là

- A. 380 và 19                      B. 380 và 38                      C. 190 và 19                      D. 190 và 38

**Câu 7:** Số palindrom là số mà nếu ta viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì giá trị của nó không thay đổi. Ví dụ: 12521 là một số palindrom. Có bao nhiêu số palindrom gồm 5 chữ số?

- A.  $N = 1800$                       B.  $N = 2400$                       C.  $N = 900$                       D.  $N = 1200$

**Câu 8:** Một bó hoa gồm có 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 3 bông hoa gồm đủ ba màu?

- A.  $N = 120$                       B.  $N = 240$                       C.  $N = 320$                       D.  $N = 210$

**Câu 9:** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau là

- A.  $N = 60$                       B.  $N = 30$                       C.  $N = 125$                       D.  $N = 25$

**Câu 10:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số chẵn có 3 chữ số là

A.  $N = 144$                       B.  $N = 105$                       C.  $N = 248$                       D.  $N = 168$

**Câu 11:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có hai chữ số mà cả hai chữ số đều chẵn là

A.  $N = 20$                       B.  $N = 12$                       C.  $N = 16$                       D.  $N = 25$

**Câu 12:** Số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho cả 2 và 5 là

A.  $N = 72$                       B.  $N = 36$                       C.  $N = 81$                       D.  $N = 90$

**Câu 13:** Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có 2 cà vạt màu vàng. Số cách chọn một áo và một cà vạt sao cho đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng là

A.  $N = 35$                       B.  $N = 18$                       C.  $N = 29$                       D.  $N = 31$

**Câu 14:** Cho tập hợp  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Có bao nhiêu cặp sắp thứ tự  $(x, y)$  biết  $x$  và  $y$  đều thuộc  $A$ .

A.  $N = 15$                       B.  $N = 20$                       C.  $N = 25$                       D.  $N = 10$

**Câu 15:** Cho tập hợp  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Có bao nhiêu cặp sắp thứ tự  $(x, y)$  thỏa mãn  $x$  và  $y$  thuộc  $A$  sao cho  $x + y = 6$ .

A.  $N = 5$                       B.  $N = 6$                       C.  $N = 7$                       D.  $N = 8$

**Câu 16:** Số các số có 2 chữ số mà chữ số đứng trước lớn hơn chữ số đứng sau là

A.  $N = 50$                       B.  $N = 30$                       C.  $N = 65$                       D.  $N = 45$

**Câu 17:** Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số lẻ gồm 2 chữ số là

A.  $N = 15$                       B.  $N = 18$                       C.  $N = 36$                       D.  $N = 30$

**Câu 18:** Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau không chia hết cho 5 là

A.  $N = 108$                       B.  $N = 121$                       C.  $N = 100$                       D.  $N = 120$

**Câu 19:** Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng số chẵn là

A.  $N = 108$                       B.  $N = 50$                       C.  $N = 100$                       D.  $N = 128$

**Câu 20:** Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có 2 chữ số khác nhau và chia hết cho 9 là

A.  $N = 6$                       B.  $N = 12$                       C.  $N = 8$                       D.  $N = 4$

**Câu 21:** Từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5 là

A.  $N = 64$                       B.  $N = 30$                       C.  $N = 48$                       D.  $N = 120$

**Câu 22:** Từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 300 là

- A.  $N = 40$                       B.  $N = 20$                       C.  $N = 24$                       D.  $N = 36$

**Câu 23:** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau lớn hơn 300 và nhỏ hơn 500 là

- A.  $N = 32$                       B.  $N = 40$                       C.  $N = 26$                       D.  $N = 44$

**Câu 24:** Số cách sắp xếp 4 viên bi đỏ có đánh dấu khác nhau và 4 viên bi đen có đánh dấu khác nhau xếp thành một dãy sao cho các màu xen kẽ nhau là

- A.  $N = 1152$                       B.  $N = 1440$                       C.  $N = 1280$                       D.  $N = 1960$

**Câu 26:** Giải phương trình  $\frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \quad x = 1 \vee x = 5$

- A.  $x = 1 \vee x = 4$                       B.  $x = 2 \vee x = 5$                       C.  $x = 2 \vee x = 3$                       D.

**Câu 27:** Số các số tự nhiên  $n$  thỏa mãn  $\frac{1}{n-2} \left[ \frac{5(n+1)!}{(n+1)(n-3)!4!} - \frac{n(n-1)!}{12(n-3)(n-4)!2!} \right] \leq 5$  là:

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

**Câu 28:** Gọi  $X$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Số phần tử của  $X$  bắt đầu bằng chữ số 5 là

- A.  $N = 12$                       B.  $N = 24$                       C.  $N = 48$                       D.  $N = 20$

**Câu 29:** Gọi  $X$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Số phần tử của  $X$  không bắt đầu bằng chữ số 1 là

- A.  $N = 45$                       B.  $N = 90$                       C.  $N = 60$                       D.  $N = 96$

**Câu 30:** Gọi  $X$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Số phần tử của  $X$  không bắt đầu bằng 345 là

- A.  $N = 120$                       B.  $N = 116$                       C.  $N = 112$                       D.  $N = 118$

**Câu 31:** Gọi  $X$  là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4. Tìm tổng tất cả các số của  $X$ .

- A. 99990                      B. 88880                      C. 33330                      D. 66660

**Câu 32:** Trên một kệ sách có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên theo từng môn?

- A. 103680                      B. 831600                      C. 3326400                      D. 1663200

**Câu 33:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần là

A. 5880                      B. 3210                      C. 1080                      D. 4320

**Câu 34:** Số các số tự nhiên có 3 chữ số khác 0 và đôi một khác nhau, đồng thời tổng của 3 chữ số bằng 9 là

A.  $N = 12$                       B.  $N = 24$                       C.  $N = 18$                       D.  $N = 20$

**Câu 35:** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thiết lập tất cả các số có 6 chữ số khác nhau. Trong các số đã thiết lập được, số các số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau là

A.  $N = 320$                       B.  $N = 360$                       C.  $N = 420$                       D.  $N = 480$

**Câu 36:** Sắp xếp 7 người vào một dãy ghế 7 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho 4 người xác định của nhóm ngồi kề nhau là

A.  $N = 576$                       B.  $N = 480$                       C.  $N = 360$                       D.  $N = 180$

**Câu 37:** Sắp xếp 7 người vào một dãy ghế 7 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp chỗ ngồi sao cho có 2 người xác định của nhóm không ngồi kề nhau là

A.  $N = 1246$                       B.  $N = 3600$                       C.  $N = 1860$                       D.  $N = 3200$

**Câu 38:** Sắp xếp 6 nam và 4 nữ vào một dãy ghế 10 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp để nhóm nam ngồi kề nhau và nhóm nữ ngồi kề nhau là

A. 34560                      B. 36540                      C. 65430                      D. 54360

**Câu 39:** Sắp xếp 6 nam và 4 nữ vào một dãy ghế 10 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp để chỉ có nữ ngồi kề nhau là

A. 192600                      B. 129600                      C. 120960                      D. 160920

**Câu 40:** Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi vàng khác nhau. Số cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau là

A. 106830                      B. 34560                      C. 43560                      D. 103680

**Câu 41:** Từ 5 chữ số 1, 2, 3 có thể lập được số các số gồm 7 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt 2 lần là

A.  $N = 120$                       B.  $N = 210$                       C.  $N = 320$                       D.  $N = 203$

**Câu 42:** Số các số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 được xếp kề nhau và 4 chữ số còn lại gồm 2, 3, 4, 5 là

A.  $N = 120$                       B.  $N = 210$                       C.  $N = 180$                       D.  $N = 810$

**Câu 43:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa  $A_n^3 = 20n$

A.  $n = 5$                       B.  $n = 6$                       C.  $n = 10$                       D.  $n = 12$

**Câu 44:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa  $A_n^3 + 5A_n^2 = 2(n+15)$

A.  $n = 2$                       B.  $n = 4$                       C.  $n = 3$                       D.  $n = 5$



**Câu 45:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa  $A_{2n}^2 - 3A_n^2 = 42$

- A.  $n = 10$                       B.  $n = 8$                       C.  $n = 6$                       D.  $n = 16$

**Câu 46:** Tìm số nguyên dương  $n$  sao cho  $2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12$

- A.  $n = 2 \vee n = 3$               B.  $n = 3 \vee n = 4$               C.  $n = 4 \vee n = 5$               D.  $n = 2 \vee n = 4$

**Câu 47:** Số các giá trị nguyên dương của  $n$  thỏa mãn  $\frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$  là:

- A. 36                      B. 35                      C. 33                      D. 30

**Câu 48:** Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số sao cho hai chữ số kề nhau phải khác nhau là

- A. 59049                      B. 27126                      C. 39366                      D. 34020

**Câu 49:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập số các số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và phải có mặt chữ số 5 là

- A. 1260                      B. 1360                      C. 1460                      D. 1560

**Câu 50:** Số các số tự nhiên có 4 chữ số sao cho chữ số đầu và chữ số cuối giống nhau là

- A.  $N = 560$                       B.  $N = 540$                       C.  $N = 960$                       D.  $N = 900$

**Câu 51:** Số các số tự nhiên có 4 chữ số sao cho chữ số đầu và chữ số cuối khác nhau là

- A.  $N = 1800$                       B.  $N = 6300$                       C.  $N = 5400$                       D.  $N = 8100$

**Câu 52:** Số các số tự nhiên có 4 chữ số sao cho hai chữ số đầu giống nhau và hai chữ số cuối giống nhau là

- A.  $N = 100$                       B.  $N = 120$                       C.  $N = 90$                       D.  $N = 135$

**Câu 53:** Một biển số xe gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C, ..., Z. Các chữ số được lấy từ 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 9. Số biển số xe trong đó có hai chữ cái giống nhau và 4 số đôi một khác nhau và có ít nhất 2 số khác 0 là

- A. 127600                      B. 130078                      C. 172600                      D. 110036

**Câu 54:** Một người muốn xếp đặt 6 pho tượng từ 8 pho tượng vào một dãy 6 chỗ trống trên một kệ trang trí. Số cách xếp đặt là

- A. 20160                      B. 21600                      C. 26010                      D. 26100

**Câu 55:** Cho tập hợp  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Có thể lập được số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ  $X$  nếu một trong ba chữ số đầu tiên là chữ số 1 là

- A.  $N = 3000$                       B.  $N = 2280$                       C.  $N = 2160$                       D.  $N = 2620$

**Câu 56:** Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 6, 9 có thể lập được số các số có 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 3 là

- A.  $N = 12$                       B.  $N = 16$                       C.  $N = 18$                       D.  $N = 20$

**Câu 57:** Số các số có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho có mặt số 0 và số 1 là

- A. 32500                      B. 42000                      C. 36000                      D. 48200

**Câu 58:** Từ 8 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được số các số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau trong đó có mặt chữ số 4 là

- A. 13250                      B. 14400                      C. 13320                      D. 31240

**Câu 59:** Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 8, 9.

- A. 1999800                      B. 1999000                      C. 1899900                      D. 1899900

**Câu 60:** Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4.

- A. 299800                      B. 259980                      C. 299580                      D. 289900

**Câu 61:** Số các số lẻ có 6 chữ số đôi một khác nhau nhỏ hơn 600000 là

- A. 30240                      B. 33690                      C. 36960                      D. 39660

**Câu 62:** Kết quả rút gọn biểu thức  $A = C_n^1 + 2 \frac{C_n^2}{C_n^1} + \dots + k \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + \dots + n \frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$

- A.  $\frac{n(n+1)}{2}$                       B.  $n(n+1)$                       C.  $\frac{n(n+2)}{3}$                       D.  $\frac{n(n-1)}{3}$

**Câu 63:** Giải phương trình  $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$

- A.  $x = 1$                       B.  $x = 2$                       C.  $x = 3$                       D.  $x = 4$

**Câu 64:** Giải phương trình  $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$

- A.  $x = 8 \vee x = 6$                       B.  $x = 10 \vee x = 8$                       C.  $x = 8 \vee x = 14$                       D.  $x = 6 \vee x = 14$

**Câu 65:** Tìm số tự nhiên  $x$  thỏa  $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$

- A.  $x = 10$                       B.  $x = 12$                       C.  $x = 6$                       D.  $x = 8$

**Câu 67:** Tìm số tự nhiên  $x$  thỏa  $C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$

- A.  $x = 8 \vee x = 16$                       B.  $x = 9 \vee x = 17$                       C.  $x = 17$                       D.  $x = 16$

**Câu 68:** Số nghiệm của bất phương trình  $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 < \frac{5}{4} A_{n-2}^2$  là:

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. Vô số

**Câu 69:** Giải phương trình  $C_{x+1}^{x+2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$

- A.  $x = 5$                       B.  $x = 4$                       C.  $x = 3$                       D.  $x = 7$

**Câu 70:** Giải phương trình  $A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$

- A.  $x = 7$                       B.  $x = 8$                       C.  $x = 9$                       D.  $x = 10$

**Câu 71:** Số giá trị nguyên dương của  $n$  thỏa  $4C_{n-1}^4 - 4C_{n-1}^3 < 5A_{n-2}^2$  là:

- A. 0                      B. 6                      C. 7                      D. vô số

**Câu 72:** Số giá trị nguyên dương của  $x$  thỏa  $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$  là:

- A. 0                      B. 2                      C. 1                      D. 4

**Câu 73:** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 5C_{x+1}^y = 6C_x^{y+1} \\ C_{x+1}^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$$

- A.  $(x; y) = (9; 4)$                       B.  $(x; y) = (9; 5)$                       C.  $(x; y) = (8; 5)$                       D.  $(x; y) = (8; 3)$

**Câu 74:** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 5A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y + 2C_x^y = 80 \end{cases}$$

- A.  $(x; y) = (5; 4)$                       B.  $(x; y) = (6; 3)$                       C.  $(x; y) = (6; 2)$                       D.  $(x; y) = (5; 2)$

**Câu 75:** Tìm số tự nhiên  $k$  sao cho  $C_{14}^k, C_{14}^{k+1}, C_{14}^{k+2}$  lập thành một cấp số cộng.

- A.  $k = 3 \vee k = 9$                       B.  $k = 4 \vee k = 8$                       C.  $k = 3 \vee k = 8$                       D.  $k = 4 \vee k = 9$

**Câu 76:** Cho 20 câu hỏi, trong đó có 8 câu lý thuyết và 12 bài tập. Người ta cấu tạo thành các đề thi sao cho trong mỗi đề thi phải gồm 5 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 2 câu lý thuyết và 2 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi?

- A. 8965                      B. 8569                      C. 9856                      D. 9658

**Câu 77:** Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Tính số cách chọn, nếu trong 4 người có ít nhất một em nam.

- A. 90025                      B. 32500                      C. 31500                      D. 92500

**Câu 78:** Cho 5 điểm phân biệt và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số đoạn thẳng và số tam giác tạo thành từ 5 điểm đó lần lượt là

- A. 20 và 10                      B. 10 và 10                      C. 10 và 20                      D. 20 và 20

**Câu 79:** Một túi chứa 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi, có bao nhiêu cách lấy được 4 viên bi cùng màu?

- A. 10                      B. 15                      C. 20                      D. 25

**Câu 80:** Từ 20 người, chọn ra một đoàn đại biểu gồm 1 trưởng đoàn, 1 phó đoàn, 1 thư ký và 3 ủy viên. Số cách chọn là

- A. 4615200                      B. 4561200                      C. 4651200                      D. 4156200

**Câu 81:** Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ, các bông hoa xem như đôi một khác nhau, chọn ra một bó hoa gồm 7 bông, số cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ là

- A.  $N = 112$                       B.  $N = 150$                       C.  $N = 120$                       D.  $N = 115$

**Câu 82:** Từ 8 số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được số các số gồm 10 chữ số, trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần, chữ số khác có mặt đúng một lần là

- A. 544320                      B. 534420                      C. 445320                      D. 234540

**Câu 83:** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được số các số có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ là

- A.  $N = 3600$                       B.  $N = 2488$                       C.  $N = 2520$                       D.  $N = 2448$

**Câu 84:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có mặt chữ số 0 nhưng không có chữ số 1?

- A. 33600                      B. 36300                      C. 33060                      D. 36030

**Câu 85:** Số các số tự nhiên gồm 7 chữ số, biết chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần là

- A. 11360                      B. 11640                      C. 11340                      D. 11520

**Câu 86:** Từ một tập thể gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có An và Bình, người ta muốn chọn một tổ công tác gồm có 6 người. Tìm số cách chọn nếu trong tổ có một tổ trưởng, 5 tổ viên hơn nữa An và Bình không đồng thời có mặt trong tổ.

- A. 2974                      B. 15048                      C. 14320                      D. 9744

**Câu 87:** Trong nhóm 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Số cách chia thành hai tổ, mỗi tổ 8 học sinh sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và ít nhất 2 học sinh khá là

- A. 2560                      B. 3210                      C. 3780                      D. 4420

**Câu 88:** Trong mặt phẳng cho  $n$  đường thẳng cắt nhau từng đôi một, nhưng không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Số giao điểm là

- A.  $\frac{n(n-1)}{2}$                       B.  $\frac{n(n+1)}{2}$                       C.  $\frac{n(n+2)}{3}$                       D.  $\frac{n(n+3)}{4}$

**Câu 89:** Cho 10 điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Số đường thẳng đi qua 2 trong 10 điểm trên là

- A.  $N = 45$                       B.  $N = 90$                       C.  $N = 80$                       D.  $N = 72$

**Câu 90:** Cho đa giác lồi có  $n$  cạnh,  $n \geq 4$ . Tìm  $n$  sao cho đa giác có số đường chéo bằng số cạnh.

- A.  $n = 7$                       B.  $n = 6$                       C.  $n = 5$                       D.  $n = 8$

**Câu 91:** Cho một đa giác lồi có 15 cạnh. Số tam giác có 3 đỉnh trùng với 3 đỉnh của đa giác là

- A.  $N = 455$                       B.  $N = 235$                       C.  $N = 525$                       D.  $N = 425$

**Câu 92:** Tìm số giao điểm tối đa của 10 đường tròn phân biệt.

- A.  $N = 45$                       B.  $N = 90$                       C.  $N = 180$                       D.  $N = 135$

**Câu 93:** Cho hai đường thẳng song song  $d, \Delta$ . Trên  $d$  lấy 17 điểm phân biệt, trên  $\Delta$  lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã cho.

- A. 5950                      B. 9550                      C. 9050                      D. 5590

**Câu 94:** Trong mặt phẳng cho đa giác đều (H) có 20 cạnh. Trong số các tam giác có ba đỉnh được lấy từ các đỉnh của (H) có bao nhiêu tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H)?

- A.  $N = 320$                       B.  $N = 480$                       C.  $N = 640$                       D.  $N = 800$

**Câu 95:** Có 20 điểm trong mặt phẳng trong đó có 5 điểm thẳng hàng, số còn lại không có 3 điểm nào thẳng hàng. Từ các điểm đó vẽ được bao nhiêu đường thẳng và bao nhiêu tam giác?

- A. 181 và 1130                      B. 192 và 1130                      C. 181 và 1320                      D. 192 và 1320

**Câu 96:** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển của  $A = \left(x - \frac{2}{x^4}\right)^{15}$

- A. 1820                      B. -1820                      C. 3640                      D. -3640

**Câu 97:** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển của  $B = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$

- A. 126720                      B. -126720                      C. 7920                      D. -7920

**Câu 98:** Tìm hệ số của  $x^4 y^3$  trong khai triển của  $P = (2x + 3y)^7$

- A. 11520                      B. 12510                      C. 15120                      D. 12150

**Câu 99:** Khai triển và rút gọn đa thức  $P(x) = (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{12}$  sẽ được đa thức  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$ . Hệ số  $a_9$  là:

- A.  $a_9 = 256$                       B.  $a_9 = 286$                       C.  $a_9 = 320$                       D.  $a_9 = 132$

**Câu 100:** Cho đa thức  $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + 3(1+x)^3 + \dots + 20(1+x)^{20}$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$ . Xác định hệ số  $a_{18}$ .

- A. 3254                      B. 3549                      C. 4179                      D. 4569

**Câu 101:** Trong khai triển  $P(x) = (3 - 2x)^{25}$ , hãy tính tổng các hệ số của đa thức  $P(x)$ .

- A.  $3^{25}$                       B.  $2^{25}$                       C. -1                      D. 1

**Câu 102:** Trong khai triển của nhị thức  $(a^2 + b^3)^{15}$ , tìm các số hạng chứa a, b với số mũ giống nhau.

- A.  $5005a^6b^6$       B.  $1010a^{15}b^{15}$       C.  $5005a^{18}b^{18}$       D.  $1010a^9b^9$

**Câu 103:** Tìm số hạng thứ 4 trong khai triển  $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^3}{2}\right)^{12}$  theo thứ tự số mũ tăng dần của biến.

- A.  $\left(\frac{99}{4}\right)x^{-1}$       B.  $\left(-\frac{99}{4}\right)x^{-1}$       C.  $\left(\frac{99}{4}\right)x$       D.  $\left(-\frac{99}{4}\right)x$

**Câu 104:** Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$

- A. 1820      B. 1280      C. 2180      D. 2810

**Câu 105:** Số số hạng chứa x với số mũ tự nhiên trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{13}$  là:

- A. 2      B. 3      C. 5      D. 4

**Câu 106:** Biết tổng các hệ số của khai triển  $(3 - x^2)^n$  bằng 1024. Hệ số của số hạng chứa  $x^{12}$  trong khai triển đó là

- A. -17010      B. 17010      C. -153090      D. 153090

**Câu 107:** Tính tổng  $S = C_{10}^0 C_{12}^6 + C_{10}^1 C_{12}^5 + C_{10}^2 C_{12}^4 + \dots + C_{10}^6 C_{12}^0$

- A. 74236      B. 74362      C. 74613      D. 24671

**Câu 108:** Tính tổng  $S = (C_9^0)^2 + (C_9^1)^2 + (C_9^2)^2 + \dots + (C_9^9)^2$

- A. 39432      B. 43758      C. 36730      D. 48620

**Câu 109:** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất tích số chấm hai lần là số lẻ.

- A.  $P = \frac{1}{3}$       B.  $P = \frac{1}{2}$       C.  $P = \frac{1}{4}$       D.  $P = \frac{1}{5}$

**Câu 110:** Một túi chứa 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi, xác suất lấy được 4 viên bi cùng màu là

- A.  $P = \frac{1}{33}$       B.  $P = \frac{2}{33}$       C.  $P = \frac{1}{11}$       D.  $P = \frac{2}{11}$

**Câu 111:** Sắp xếp ngẫu nhiên 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Xác suất để hai bạn A và E ngồi cạnh nhau là

A.  $P = \frac{1}{5}$       B.  $P = \frac{1}{4}$       C.  $P = \frac{2}{5}$       D.  $P = \frac{3}{10}$

**Câu 112:** Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất tổng hai mặt xuất hiện bằng 7.

A.  $P = \frac{1}{3}$       B.  $P = \frac{1}{6}$       C.  $P = \frac{1}{12}$       D.  $P = \frac{1}{4}$

**Câu 113:** Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để được ít nhất 3 viên bi xanh.

A.  $P = \frac{1}{2}$       B.  $P = \frac{1}{3}$       C.  $P = \frac{1}{4}$       D.  $P = \frac{1}{5}$

**Câu 114:** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm.

A.  $P = \frac{11}{36}$       B.  $P = \frac{1}{3}$       C.  $P = \frac{1}{6}$       D.  $P = \frac{5}{18}$

**Câu 115:** Gieo đồng thời bốn đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất có đúng 3 đồng xu ngửa.

A.  $P = \frac{1}{16}$       B.  $P = \frac{1}{4}$       C.  $P = \frac{11}{16}$       D.  $P = \frac{1}{6}$

**Câu 116:** Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt.

A.  $P = \frac{5}{11}$       B.  $P = \frac{6}{11}$       C.  $P = \frac{7}{11}$       D.  $P = \frac{8}{11}$

**Câu 117:** Một lớp học gồm 20 học sinh trong đó có 6 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn và 4 học sinh giỏi cả 2 môn Toán và Văn. Chọn ra 2 em. Tính xác suất để 2 em đó là học sinh giỏi ít nhất một môn Toán hoặc Văn.

A.  $P = \frac{2}{19}$       B.  $P = \frac{3}{19}$       C.  $P = \frac{11}{95}$       D.  $P = \frac{21}{190}$

**Câu 118:** Một hộp có 20 quả cầu giống nhau, trong đó có 12 quả cầu trắng và 8 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất để trong 3 quả chọn ra có ít nhất một quả màu đen.

A.  $P = \frac{46}{57}$       B.  $P = \frac{15}{19}$       C.  $P = \frac{16}{19}$       D.  $P = \frac{47}{57}$

**Câu 119:** Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Giáo viên chọn ra 2 em đi thi văn nghệ. Tính xác suất để 2 học sinh được chọn khác phái.

A.  $P = \frac{7}{15}$       B.  $P = \frac{1}{2}$       C.  $P = \frac{8}{15}$       D.  $P = \frac{3}{5}$

**Câu 120:** Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để không có học sinh trung bình.

A.  $P = \frac{2}{145}$       B.  $P = \frac{18}{29}$       C.  $P = \frac{25}{58}$       D.  $P = \frac{253}{580}$

**Câu 121:** Cho 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau lấy từ 7 số trên. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc X. Tính xác suất số đó là số lẻ.

A.  $P = \frac{9}{14}$       B.  $P = \frac{5}{7}$       C.  $P = \frac{4}{7}$       D.  $P = \frac{11}{14}$

**Câu 122:** Cho 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau lấy từ 7 số trên. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc X. Tính xác suất số đó chia hết cho 5.

A.  $P = \frac{2}{5}$       B.  $P = \frac{1}{5}$       C.  $P = \frac{1}{7}$       D.  $P = \frac{2}{7}$

**Câu 123:** Một xạ thủ A có xác suất bắn trúng bia mục tiêu là 0,7. Giả sử xạ thủ này bắn 3 lần. Tính xác suất để xạ thủ A bắn trúng mục tiêu ít nhất một lần.

A.  $P = 0,973$       B.  $P = 0,997$       C.  $P = 0,987$       D.  $P = 0,975$

**Câu 124:** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất tổng số chấm của hai lần gieo là số lẻ.

A.  $P = \frac{1}{2}$       B.  $P = \frac{3}{5}$       C.  $P = \frac{3}{7}$       D.  $P = \frac{5}{9}$

**Câu 125:** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất có ít nhất một lần số chấm từ 5 trở lên.

A.  $P = \frac{1}{2}$       B.  $P = \frac{3}{5}$       C.  $P = \frac{3}{7}$       D.  $P = \frac{5}{9}$



---

## CHUYÊN ĐỀ 3: DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

### A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

#### I. Phương pháp chứng minh qui nạp

Để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên  $n \geq p \geq 1$  bằng phương pháp qui nạp, ta tiến hành theo 2 bước

Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với  $n = p$ .

Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì  $n = k \geq p$  (gọi là giả thiết qui nạp), chứng minh rằng

nó cũng đúng với  $n = k + 1$

#### II. Dãy số

Mỗi hàm số  $u$  xác định trên tập các số nguyên dương  $\mathbb{N}$  được gọi là dãy số vô hạn.

Thường viết dưới dạng khai triển:  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

Trong đó  $u_1$  là số hạng đầu và  $u_n$  là số hạng tổng quát.

#### III. Dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số  $u$  xác định trên tập  $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  với  $m$  nguyên dương được gọi là dãy số hữu hạn.

Dạng khai triển:  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ . Trong đó  $u_1$  là số hạng đầu,  $u_m$  số hạng cuối.

Ví dụ:  $-5, -2, 1, 4, 7, 10, 13$  là dãy số hữu hạn

#### IV. Cách cho một dãy số

- Dãy số cho bằng công thức số hạng tổng quát
- Dãy số cho bằng phương pháp mô tả: mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số.
- Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi
  - Cho số hạng đầu hay vài số hạng đầu
  - Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ  $n$  qua số hạng hoặc vài số hạng đứng trước nó.

#### V. Dãy số tăng, dãy số giảm và dãy số bị chặn

##### 1. Dãy số tăng và dãy số giảm

Dãy số  $(u_n)$  được gọi là dãy số tăng nếu ta có  $u_{n+1} > u_n$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Dãy số  $(u_n)$  được gọi là dãy số giảm nếu ta có  $u_{n+1} < u_n$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 2n$  là dãy số tăng vì  $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2 > 0$  nên  $u_{n+1} > u_n$ .

##### 2. Dãy số bị chặn

Dãy số  $(u_n)$  được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số  $M$  sao cho:  $u_n \leq M$ , với mọi số nguyên dương  $n$ .

Dãy số  $(u_n)$  được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số  $m$  sao cho:  $m \leq u_n$ , với mọi số nguyên dương  $n$ .

Dãy số  $(u_n)$  được gọi là bị chặn nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

## VI. Cấp số cộng

1. Định nghĩa: Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với số không đổi  $d$ . Số  $d$  gọi là công sai của cấp số cộng.

Công thức truy hồi:  $u_{n+1} = u_n + d$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Nếu  $d = 0$  thì cấp số cộng là dãy số không đổi.

2. Số hạng tổng quát: Nếu cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:  $u_n = u_1 + (n-1)d$  với  $n \geq 2$ .

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng:  $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$  với  $k \geq 2$ .

4. Tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số cộng:  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_2)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

## VII. Cấp số nhân

1. Định nghĩa: Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với số không đổi  $q$ . Số  $q$  gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu  $(u_n)$  là cấp số nhân với công bội  $q$ , ta có  $u_{n+1} = u_n \cdot q$ , với mọi số nguyên dương  $n$ .

2. Số hạng tổng quát:  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$  với  $n \geq 2$ .

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân:  $(u_k)^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ , với  $k \geq 2$ .

4. Tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số nhân:

Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q \neq 1$ .  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$

## B. BÀI TẬP

**Câu 1:** Cho các đẳng thức

a.  $1+3+5+\dots+(2n+1)=n^2$

b.  $1.2+2.3+3.4+\dots+n(n+1)=n(n+1)\frac{(n+2)}{3}$

c.  $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d.  $1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Số đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 2:** Hãy viết 3 số hạng tiếp theo hai số hạng đầu của dãy số  $(u_n)$  có

$u_1=1, u_2=1, u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$

A. 2; 3; 5

B. 3; 4; 7

C. 2; 5; 7

D. 3; 5; 8

**Câu 3:** Cho các dãy số  $(u_n)$  sau

a.  $u_n=2^{n+1}-2n$

b.  $u_n=2.3^{n-1}-7$

c.  $u_n=\left(\frac{1}{n}-2n\right)^2$

d.  $u_n=\frac{(n+1)}{n}$

A. 0

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 4:** Công thức số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  có  $u_1=1, u_{n+1}=2u_n+3$  là:

A.  $u_n=2^{n+1}-1$

B.  $u_n=2^{n+1}-2$

C.  $u_n=2^{n+1}-3$

D.  $u_n=2^{n+1}-4$

**Câu 5:** Công thức số hạng tổng quát của dãy số  $(u_n)$  có  $u_1=\frac{5}{4}; 2u_1+1=u_1+1$

A.  $u_1=1+\frac{1}{2^{n-1}}$

B.  $u_n=1+\frac{1}{2^{n+1}}$

C.  $u_n=1+\frac{1}{2^n}$

D.  $u_n=2+\frac{1}{2^{n+1}}$

**Câu 6:** Cho các dãy số  $(u_n)$  sau

a.  $u_n=\frac{n+1}{n+2}$

b.  $u_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$

c.  $u_n=\frac{1}{n^2}+2n$

d.  $u_n=2n(2n-5)$

Số dãy số giảm là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

**Câu 7:** Cho các dãy số  $(u_n)$  sau

a.  $u_n = \frac{2n}{n+2}$       b.  $u_n = 2n - \frac{3}{n}$       c.  $u_n = 2n - n^2 + 5$       d.  $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

Số dãy số bị chặn là

- A.** 2                                      **B.** 0                                      **C.** 1                                      **D.** 3

**Câu 8:** Cho các dãy số  $(u_n)$  sau

a.  $u_n = 12n - 11$       b.  $u_n = n(3n - 2)$       c.  $u_n = 3 - n$       d.  $u_n = (n+1)^2 - n^2$

Những dãy số là cấp số cộng gồm

- A.** a và c                                      **B.** a, c và d                                      **C.** a, b và c                                      **D.** b, c và d

**Câu 9:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_1 + 2u_5 = 0$  và  $S_4 = 14$ .

- A.**  $u_1 = 8$  và  $d = -3$       **B.**  $u_1 = 5$  và  $d = -1$       **C.**  $u_1 = 6$  và  $d = -2$       **D.**  $u_1 = 9$  và  $d = -4$

**Câu 10:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_4 = 10; u_7 = 22$

- A.**  $u_1 = -8$  và  $d = 6$       **B.**  $u_1 = 4$  và  $d = 3$       **C.**  $u_1 = -2$  và  $d = 4$       **D.**  $u_1 = 1$  và  $d = 3$

**Câu 11:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_1 + u_5 - u_3 = 10; u_1 + u_6 = 17$

- A.**  $u_1 = 1$  và  $d = 5$       **B.**  $u_1 = 16$  và  $d = -3$       **C.**  $u_1 = -3$  và  $d = 5$       **D.**  $u_1 = 15$  và  $d = -3$

**Câu 12:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_3 = -15$  và  $u_8 = 25$

- A.**  $u_1 = -31; d = 8$       **B.**  $u_1 = -35; d = 10$       **C.**  $u_1 = -31; d = 10$       **D.**  $u_1 = -35; d = 8$

**Câu 13:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_7 + u_{15} = 60$  và

$$(u_4)^2 + (u_{12})^2 = 1170$$

- A.**  $u_1 = -12; d = 3$  hoặc  $u_1 = 0; d = \frac{21}{5}$       **B.**  $u_1 = -10; d = 3$  hoặc  $u_1 = 0; d = \frac{21}{5}$   
**C.**  $u_1 = -10; d = \frac{21}{5}$  hoặc  $u_1 = 0; d = 3$ .      **D.**  $u_1 = -12$  và  $d = \frac{21}{5}$  hoặc  $u_1 = 0; d = 3$

**Câu 14:** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết  $u_1 + u_3 + u_5 = -12$  và  $u_1 u_2 u_3 = 8$ .

- A.**  $u_1 = -2; d = -1$       **B.**  $u_1 = -1; d = -2$       **C.**  $u_1 = 1; d = -2$       **D.**  $u_1 = 2; d = -3$

**Câu 15:** Một cấp số cộng gồm 8 số hạng với số hạng đầu là  $-15$  và số hạng cuối là  $69$ . Các số hạng còn lại ở giữa lần lượt là

- A.**  $-2; 11; 23; 35; 47; 58$       **B.**  $-3; 11; 23; 35; 47; 59$       **C.**  $-2; 10; 21; 33; 45; 57$       **D.**  $-3; 9; 21; 33; 45; 57$

**Câu 16:** Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng tăng, biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

- A. 4; 9; 14      B. 3; 9; 15      C. -1; 9; 19      D. 0; 9; 18

**Câu 17:** Ba cạnh một tam giác vuông có độ dài là các số nguyên dương lập thành một cấp số cộng có công sai bằng 2. Tìm ba cạnh đó.

- A. 3; 5; 7      B. 5; 7; 9      C. 4; 6; 8      D. 6; 8; 10

**Câu 18:** Ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Số đo góc nhỏ nhất là

- A.  $40^0$       B.  $15^0$       C.  $30^0$       D.  $45^0$

**Câu 19:** Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

- A.  $d = 40^0$       B.  $d = 30^0$       C.  $d = 25^0$       D.  $d = 35^0$

**Câu 20:** Tìm x sao cho 3 số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, biết  $a = 10 - 3x, b = 3x^2 + 5, c = 5 - 4x$ .

- A.  $x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{5}{3}$       B.  $x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{5}{3}$       C.  $x = 1 \vee x = \frac{-10}{3}$       D.  $x = -1 \vee x = \frac{10}{3}$

**Câu 21:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có số hạng đầu là  $u_1 = 1$  và công sai  $d = 1$ . Tìm n sao cho tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng 3003.

- A.  $n = 77$       B.  $n = 78$       C.  $n = 79$       D.  $n = 80$

**Câu 22:** Cho các dãy số  $(u_n)$  sau

- a.  $u_n = 3 \cdot (-2)^{2n+1}$       b.  $u_n = (-1)^n \cdot 3^{3n+1}$       c.  $u_1 = 2$  và  $u_{n+1} = 2u_n + 1$ .      D.  $u_n = 3^n - 1$ .

Số cấp số cộng trong các dãy số trên là

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

**Câu 23:** Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân  $(u_n)$ , biết  $u_1 - u_3 + u_5 = 65; u_1 + u_7 = 325$ .

- A.  $u_1 = 5$  và  $q = \pm 2$       B.  $u_1 = 3$  và  $q = \pm 3$       C.  $u_1 = 3$  và  $q = \pm 2$       D.  $u_1 = 5$  và  $q = \pm 3$ .

**Câu 24:** Tìm công bội của cấp số nhân  $(u_n)$  là dãy số giảm có  $u_2 - u_3 = 768$  và  $u_2 - u_5 = 1008$ .

- A.  $q = -\frac{5}{4}$       B.  $q = \frac{1}{5}$       C.  $q = -\frac{4}{5}$       D.  $q = \frac{1}{4}$

**Câu 25:** Cho dãy số  $(u_n)$  có số hạng tổng quát  $u_n = (-2)^{n+1} \cdot 3^{n+2}$ . Nhận xét nào sau đây đúng?

- A. Dãy số trên là cấp số nhân có công bội  $q = 6$ .

- B. Dãy số trên là cấp số nhân tăng
- C. Dãy số trên không có chặn dưới và chặn trên
- D. Dãy số trên là cấp số nhân giảm

**Câu 26:** Tìm số hạng đầu của cấp số nhân hữu hạn, biết rằng công bội là  $-3$ , tổng số các số hạng là 364 và số hạng cuối là 486.

- A.  $-1$
- B.  $1$
- C.  $0$
- D.  $-2$

**Câu 27:** Tìm công bội của cấp số nhân hữu hạn có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

- A.  $q = \frac{3}{2}$
- B.  $q = 2$
- C.  $q = \frac{5}{2}$
- D.  $q = 4$

**Câu 28:** Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số đó.

- A.  $q = \frac{1}{2}$
- B.  $q = 2$
- C.  $q = \frac{1}{4}$
- D.  $q = 4$

**Câu 29:** Xác định số hạng đầu của cấp số nhân tăng, biết tổng 3 số hạng đầu là 148, đồng thời 3 số hạng đầu lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của cấp số cộng.

- A. 4
- B. 12
- C. 27
- D. 36

**Câu 30:** Tìm 3 số hạng đầu  $a, b, c$  của một cấp số nhân, biết rằng  $a, b + 2, c$  tạo thành một cấp số cộng và  $a, b + 2, c + 9$  lập thành một cấp số nhân.

- A. 4; 8; 16 hoặc  $\frac{4}{25}; \frac{16}{25}; \frac{64}{25}$
- B. 2; 4; 8 hoặc  $\frac{4}{25}; -\frac{16}{25}; \frac{64}{25}$
- C. 2; 4; 8 hoặc  $\frac{4}{25}; \frac{16}{25}; \frac{64}{25}$
- D. 4; 8; 16 hoặc  $\frac{4}{25}; -\frac{16}{25}; \frac{64}{25}$

**Câu 31:** Tìm các số  $a, b, c, d$  theo thứ tự giảm dần trong đó  $a, b, c$  là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn  $b, c, d$  là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng;  $a + d = 32, b + c = 24$ .

- A. 30; 18; 6 và 2
- B. 32; 16; 8 và 0
- C. 16; 8; 4 và 0
- D. 24; 12; 6 và 0

**Câu 32:** Tìm các số  $a, b$  sao cho  $a, a + 2b, 2a + b$  là 3 số liên tiếp của cấp số cộng và  $(b+1)^2, ab+5, (a+1)^2$  là ba số liên tiếp của cấp số nhân.

- A.  $a = 3$  và  $b = 12$
- B.  $a = 12$  và  $b = 3$
- C.  $b = 3$  và  $a = 1$
- D.  $a = 3$  và  $b = 1$

**Câu 33:** Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn  $S_n = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = 53130$

- A.  $n = 20$
- B.  $n = 21$
- C.  $n = 22$
- D.  $n = 23$

**Câu 34:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = \frac{5}{4}; 2u_{n+1} = u_n + 1$  với  $n \geq 1$ . Nhận xét đúng là

A. Số hạng tổng quát của dãy số là  $u_n = 2^{-n-1} + 1$  ( $n \geq 1$ )

B. Dãy số  $(u_n)$  không bị chặn dưới

C. Dãy số  $(u_n)$  không bị chặn trên

D. Dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng và bị chặn

**Câu 35:** Cho các dãy số  $(u_n)$  sau

a.  $u_n = 2^{-n}$     b.  $u_n = (-2)^n + 2^n$     c.  $u_1 = 2; u_{n+1} = u_n + (-1)^n$     d.  $u_n = (-1)^n(1 + u_n)$

Số dãy số không bị chặn là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Câu 36:** Tìm số hạng đầu của cấp số nhân tăng  $(u_n)$  có  $u_1 u_2 u_3 = 4096$  và  $S_3 = 56$ .

A.  $u_1 = 4$

B.  $u_1 = 6$

C.  $u_1 = 8$

D.  $u_1 = 2$

**Câu 37:** Một cấp số nhân  $(u_n)$  có 5 số hạng, biết công bội  $q = -\frac{1}{2}$  và  $u_1 + u_4 = 63$ . Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân này

A.  $u_5 = 3$

B.  $u_5 = \frac{9}{2}$

C.  $u_5 = \frac{7}{2}$

D.  $u_5 = 4$

**Câu 38:** Các biểu thức  $x+5y, 5x+2y, 8x+2y$  có giá trị theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Đồng thời  $x-1, y+3, x-2y$  theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Xác định x và y.

A.  $x = -3, y = -1$  hoặc  $x = \frac{27}{2}, y = \frac{9}{2}$ .

B.  $x = \frac{-9}{2}; y = \frac{-3}{2}$  hoặc  $x = 3; y = 1$ .

C.  $x = \frac{-9}{2}; y = \frac{3}{2}$  hoặc  $x = -3, y = -1$

D.  $x = \frac{-27}{2}, y = \frac{-9}{2}$  hoặc  $x = 3; y = 1$ .

**Câu 49:** Tìm hai số dương a và b biết ba số 1; a + 8; b theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và ba số 1; a; b theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

A.  $a = 4$  và  $b = 16$

B.  $a = 3$  và  $b = 9$

C.  $a = 2$  và  $b = 4$

D.  $a = 5$  và  $b = 25$

**Câu 50:** Một cấp số cộng tăng  $(u_n)$  và một cấp số nhân tăng  $(v_n)$  có số hạng thứ nhất  $u_1 = v_1 = 5$ ; biết  $u_2 - v_2 = 10$  và  $u_3 = v_3$ . Tìm công bội q của cấp số cộng và công sai d của cấp số cộng.

A.  $d = 20$  và  $q = 3$

B.  $d = 15$  và  $q = 3$

C.  $d = 10$  và  $q = 2$

D.  $d = 15$  và  $q = 2$ .

**Câu 51:** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 2^n - 2$ . Tính tổng 10 số hạng đầu của dãy số

A. 2056

B. 2066

C. 2036

D. 2026

**Câu 52:** Cho dãy số  $(u_n)$  có tổng của  $n$  số hạng đầu tiên là  $S_n = \frac{(7n-3n^2)}{2}$  với mọi  $n > 1$ .

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là

- A.  $5-3n$                       B.  $2-n$                       C.  $3-2n$                       D.  $4-n$

**Câu 53:** Cho hai cấp số cộng  $(u_n)$  và  $(v_n)$  có tổng  $n$  số hạng đầu tiên lần lượt là

$S_n = 2n^2 + n$  với mọi  $n > 1$  và  $T_n = n^2 + 7n$  với mọi  $n > 1$ . Tính tỉ số  $\frac{u_1}{v_1}$

- A.  $\frac{3}{7}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{5}{7}$

**Câu 54:** Gọi  $a$  là một nghiệm của phương trình:  $x^2 - 3x + 1 = 0$ . Xét dãy số  $(u_n)$  có

$u_n = a^n + \frac{1}{a^n}$  với  $n \geq 1$ . Nhận xét nào sau đây đúng?

- A. Dãy số bị chặn                      B. Dãy số có mọi số hạng là số nguyên  
C. Dãy số giảm                      D. Dãy số có số hạng đầu là  $u_1 = -3$

**Câu 55:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_n = \frac{2n+5}{n^2+1}$ . Số hạng bằng  $\frac{1}{5}$  là số hạng thứ mấy?

- A. 12                      B. 11                      C. 10                      D. 6

**Câu 56:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$  với mọi  $n$  nguyên dương. Số giá trị khác nhau

của dãy số là

- A. 6                      B. 5                      C. 4                      D. 4

**Câu 57:** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định như sau:  $u_n$  là số dư khi chia  $n$  cho 6. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Dãy số chỉ có 6 giá trị khác nhau                      B. Dãy số bị chặn  
C. Nếu  $u_m = u_n$  thì  $|m-n|$  chia hết cho 6                      D. Số hạng nhỏ nhất là  $u_1$ .

**Câu 58:** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 5$  và  $u_{n+1} = 3u_n$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Công thức số hạng tổng quát là

- A.  $u_n = 5.3^n$                       B.  $u_n = 5.3^{n-1}$                       C.  $u_n = 5.3^{n-2}$                       D.  $u_n = 5.3^{n-3}$

**Câu 59:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = 3u_n + 2n$  với mọi số nguyên dương  $n$ . Tìm công thức số hạng tổng quát của  $(u_n)$ .



A.  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n-1} + n - \frac{1}{2}$

B.  $u_n = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}$

C.  $u_n = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot 3^{n-1} - n - \frac{1}{2}$

D.  $u_n = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot 3^{n-1} + n - \frac{1}{2}$

**Câu 60:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = 2u_n - n$  với mọi số nguyên dương n. Tìm công thức số hạng tổng quát của  $(u_n)$ .

A.  $u_n = n + 1 - 2^{n-1}$

B.  $u_n = n - 1 - 2^{n-1}$

C.  $u_n = n + 1 + 2^{n-1}$

D.  $u_n = n - 1 + 2^{n-1}$

**Câu 61:** Cho các dãy số sau

a.  $u_n = \frac{3n + (-1)^{n+1}}{2(n+1)}$

b.  $u_n = \frac{2n+3}{\sqrt{2n^2+1}}$

c.  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$

Số dãy số bị chặn trong các dãy số trên là

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

**Câu 62:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 1, u_{m+n} = u_m + u_n + m \cdot n$  với mọi m, n là các số nguyên dương. Tìm số hạng tổng quát của  $(u_n)$ .

A.  $u_n = n(n+1)$

B.  $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$

C.  $u_n = \frac{n(n+1)}{3}$

D.  $u_n = \frac{n(n+1)}{4}$

**Câu 63:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 1; u_2 = -7$  và  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$  với mọi n là số nguyên dương. Tìm số hạng tổng quát của  $(u_n)$ .

A.  $u_n = 2^n - 3^{n-1}$

B.  $u_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}$

C.  $u_n = -2^n + 3^{n-1}$

D.  $u_n = 3 \cdot 2^n - 5 \cdot 3^{n-1}$

**Câu 64:** Xác định số hạng đầu  $u_1$  và công sai d của cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_9 = 5u_2; u_{13} = 2u_6 + 5$

A.  $u_1 = 3$  và  $d = 5$

B.  $u_1 = 4$  và  $d = 3$

C.  $u_1 = 3$  và  $d = 4$

D.  $u_1 = 4$  và  $d = 5$

**Câu 65:** Xác định số hạng đầu  $u_1$  và công sai d của cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_5 = 10; S_{10} = 5$

A.  $u_1 = 46$  và  $d = -9$

B.  $u_1 = 86$  và  $d = -19$

C.  $u_1 = -22$  và  $d = 8$

D.  $u_1 = -62$  và  $d = 18$

**Câu 66:** Xác định số hạng đầu  $u_1$  và công sai d của cấp số cộng  $(u_n)$  có tổng n số hạng đầu tiên là  $S_n = 3n + n^2$  với mọi số nguyên dương n.

A.  $u_1 = 2$  và  $d = 2$ .

B.  $u_1 = 4$  và  $d = 2$

C.  $u_1 = 4$  và  $d = 3$

D.  $u_1 = 2$  và  $d = 3$ .

**Câu 67:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 16$ . Tính tổng 19 số hạng đầu  $S_{19}$ .

A.  $S_{19} = 76$

B.  $S_{19} = 152$

C.  $S_{19} = 138$

D.  $S_{19} = 252$

**Câu 68:** Cho một cấp số cộng  $(u_n)$  có  $m^2 S_n = n^2 S_m$  với mọi  $m, n$  là hai số nguyên dương.

Tính tỉ số  $\frac{u_{2017}}{u_1}$

- A. 4034                      B. 4033                      C. 8069                      D. 8070

**Câu 69:** Tìm số nguyên dương  $n$  biết  $(2n+1)+(2n+2)+(2n+3)+\dots+3n=2265$

- A.  $n=31$                       B.  $n=30$                       C.  $n=28$                       D.  $n=29$

**Câu 70:** Tìm số nguyên dương  $n$  biết  $1+2+3+\dots+(n-1)=2017n$

- A.  $n=4032$                       B.  $n=4033$                       C.  $n=4034$                       D.  $n=4035$

**Câu 71:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1=2$  và  $u_n - u_{n+1} + 3 = \frac{1}{n(n+1)}$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Tìm số hạng tổng quát  $u_n$ .

- A.  $u_n = 3n - 3 + \frac{1}{n}$                       B.  $u_n = 3 - 3n + \frac{1}{n}$                       C.  $u_n = 3 + 3n - \frac{1}{n}$                       D.  $u_n = 3n - 3 - \frac{1}{n}$

**Câu 72:** Cho các số  $a; b; a+b \neq 0$  sao cho  $\frac{3}{a}; \frac{1}{a+b}; \frac{-1}{b}$  theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Tỉ số  $\frac{a^2}{b^2}$  là

- A. 3                              B.  $\frac{1}{3}$                               C. 2                              D.  $\frac{1}{2}$

**Câu 73:** Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_{10}=32; u_{15}=256u_7$

- A.  $u_1 = \frac{16}{5}; q=2$                       B.  $u_1 = \frac{1}{16}; q=2$                       C.  $u_1 = \frac{1}{16}; q=\frac{1}{2}$                       D.  $u_1 = \frac{16}{5}; q=\frac{1}{2}$

**Câu 74:** Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_4 - u_2 = 54$  và  $u_5 - u_3 = 108$ .

- A.  $u_1=9$  và  $q=2$                       B.  $u_1=3$  và  $q=2$                       C.  $u_1=9$  và  $q=-2$                       D.  $u_1=3$  và  $q=-2$

**Câu 75:** Tìm  $x, y$  biết  $x; y; 12$  là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân và  $x; y; 9$  là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng.

- A.  $x=3$  và  $y=6$  hoặc  $x=27$  và  $y=18$                       B.  $x=108$  và  $y=36$  hoặc  $x=3$  và  $y=6$ .  
C.  $x=27$  và  $y=18$  hoặc  $x=36$  và  $y=18$                       D.  $x=54$  và  $y=27$  hoặc  $x=36$  và  $y=18$ .

**Câu 76:** Tìm  $x$  biết ba số  $\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \sin x; \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân

- A.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ,  $k$  là số nguyên                      B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $k$  là số nguyên  
C.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $k$  là số nguyên                      D.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k$  là số nguyên

**Câu 77:** Cho  $x, y, z$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân giảm thỏa mãn  $xyz=64$  và  $x^3 + y^3 + z^3 = 584$ . Tìm  $x, y, z$ .

A.  $x = 32; y = 4$  và  $z = \frac{1}{2}$

B.  $x = 8; y = 4$  và  $z = 2$

C.  $x = 2; y = 4$  và  $z = 8$

D.  $x = \frac{1}{2}; y = 4$  và  $z = 32$ .

**Câu 78:** Cho  $x, y, z$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân có công bội  $q$  thỏa mãn

$|q| < 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 14$  và  $xy + yz + zx = \frac{-7}{108}$ . Tìm  $x, y, z$ .

A.  $x = \frac{1}{18}; y = -\frac{1}{6}$  và  $z = \frac{1}{2}$

B.  $x = \frac{1}{3}; y = \frac{-1}{6}$  và  $z = \frac{1}{12}$ .

C.  $x = \frac{1}{2}; y = \frac{-1}{6}$  và  $z = \frac{1}{8}$

D.  $x = \frac{1}{12}; y = \frac{-1}{6}$  và  $z = \frac{1}{2}$

**Câu 79:** Tính  $S = \lim \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} \right]$

A.  $S = -\frac{1}{3}$

B.  $S = \frac{1}{3}$

C.  $S = -1$

D.  $S = 1$

**Câu 80:** Cho  $\Delta ABC$  có  $3\sin A; 2\sin B; 2\sin C$  là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân và  $A - C = 60^\circ$

A.  $30^\circ$

B.  $60^\circ$

C.  $45^\circ$

D.  $54^\circ$

**Câu 81:** Giả sử  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - x + c = 0$  và  $x_3, x_4$  là hai nghiệm của phương trình  $x^2 - 4x + d = 0$ . Tính  $c, d$  biết rằng  $x_1, x_2, x_3, x_4$  lập thành một cấp số nhân tăng.

A.  $c = \frac{2}{9}, d = \frac{32}{9}$

B.  $c = \frac{3}{16}, d = \frac{243}{16}$

C.  $c = \frac{4}{25}, d = \frac{1024}{25}$

D.  $c = \frac{6}{25}, d = \frac{243}{50}$

**Câu 82:** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có công sai  $d \neq 0$  và cấp số nhân  $(v_n)$  có công bội  $q > 0$  thỏa mãn  $u_1 = v_1 = -2; u_2 = v_2; u_3 = v_3 + 8$ . Tìm  $d$  và  $q$ .

A.  $d = 4$  và  $q = 2$

B.  $d = 4$  và  $q = 3$

C.  $d = -4$  và  $q = 2$

D.  $d = -4$  và  $q = 3$

**Câu 83:** Cho dãy số  $(u_n)$  có  $u_1 = 2, u_{n+1} = 3 + 4u_n$ . Xác định công thức tổng quát của  $u_n$ .

A.  $u_n = 2 \cdot 4^{n-1} + 1$

B.  $u_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1$

C.  $u_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 1$

D.  $u_n = 3 \cdot 4^{n-1} + 1$

## CHUYÊN ĐỀ 4: GIỚI HẠN VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

### A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

#### I. Giới hạn của dãy số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
<p><b>1. Giới hạn đặc biệt:</b></p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^n = 0 ( q  < 1); \lim_{x \rightarrow +\infty} C = C$ <p><b>2. Định lý:</b></p> <p>a) Nếu <math>\lim u_n = a, \lim v_n = b</math> thì</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\lim(u_n + v_n) = a + b</math></li> <li>• <math>\lim(u_n - v_n) = a - b</math></li> <li>• <math>\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b</math></li> <li>• <math>\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}</math> (nếu <math>b \neq 0</math>)</li> </ul> <p>b) Nếu <math>u_n \geq 0, \forall n</math> và <math>\lim u_n = a</math> thì <math>a \geq 0</math> và</p> $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ <p>c) Nếu <math> u_n  \leq v_n, \forall n</math> và <math>\lim v_n = 0</math> thì <math>\lim u_n = 0</math></p> <p>d) Nếu <math>\lim u_n = a</math> thì <math>\lim  u_n  =  a </math></p> <p><b>3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn</b></p> $S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q} ( q  < 1)$	<p><b>1. Giới hạn đặc biệt:</b></p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} n^k = +\infty (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^n = +\infty (q > 1)$ <p><b>2. Định lý:</b></p> <p>a) Nếu <math>\lim  u_n  = +\infty</math> thì <math>\lim \frac{1}{u_n} = 0</math></p> <p>b) Nếu <math>\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty</math> thì <math>\lim \frac{u_n}{v_n} = 0</math></p> <p>c) Nếu <math>\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0</math> thì <math>\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty &amp; \text{nếu } a \cdot v_n &gt; 0 \\ -\infty &amp; \text{nếu } a \cdot v_n &lt; 0 \end{cases}</math></p> <p>d) Nếu <math>\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a</math> thì <math>\lim(u_n \cdot v_n) = \begin{cases} +\infty &amp; \text{nếu } a &gt; 0 \\ -\infty &amp; \text{nếu } a &lt; 0 \end{cases}</math></p> <p>* Khi tính giới hạn có một nội dung trong các dạng vô định: <math>\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty</math> thì phải tìm cách khử dạng vô định.</p>

#### 2. Một số phương pháp tìm giới hạn của dãy số:

- Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của  $n$ .

VD: a) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim \frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-3}{\frac{1}{n}-2} = 1$$

$$c) \lim n^2 - 4n + 1 = \lim n^2 \left( 1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$$

- **Nhân lượng liên hợp:** Dùng các hằng đẳng thức

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \quad \sqrt{a}+\sqrt{b} = a-b; \quad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} \quad \sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2} = a-b$$

$$VD: \lim \sqrt{n^2+3n}-n = \lim \frac{\sqrt{n^2+3n}-n \quad \sqrt{n^2+3n}+n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{2}$$

- **Dùng định lý kẹp:** Nếu  $|u_n| \leq v_n, \forall n$  và  $\lim v_n = 0$  thì  $\lim u_n = 0$

$$VD: a) \text{ Tính } \lim \frac{\sin n}{n}.$$

$$\text{Vì } 0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \text{ và } \lim \frac{1}{n} = 0 \text{ nên } \lim \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$b) \text{ Tính } \lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1}.$$

$$\text{Vì } |3\sin n - 4\cos n| \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{\sin^2 n + \cos^2 n} = 5$$

$$\text{Nên } 0 \leq \left| \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1} \right| \leq \frac{5}{2n^2 + 1}.$$

$$\text{Mà } \lim \frac{5}{2n^2 + 1} = 0 \text{ nên } \lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1} = 0$$

**Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:**

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỷ số của các hệ số của lũy thừa cao nhất của tử và mẫu.
- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là  $+\infty$  nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là  $-\infty$  nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu (ta thường đặt nhân tử chung của tử, mẫu riêng).

## II. Giới hạn của hàm số

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
<p><b>1. Giới hạn đặc biệt:</b></p> $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$ $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \text{ (} c: \text{ hằng số)}$ <p><b>2. Định lý:</b></p> <p>a) nếu <math>\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \end{cases}</math></p> <p>thì:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = LM</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0)</math></li> </ul> <p>b) Nếu <math>\begin{cases} f(x) &gt; 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \end{cases}</math> thì</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>L \geq 0 * \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}</math></li> </ul> <p>c) Nếu <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L</math> thì <math>\lim_{x \rightarrow x_0}  f(x)  =  L </math></p> <p><b>3. Giới hạn một bên:</b></p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	<p><b>1. Giới hạn đặc biệt:</b></p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{ x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ x } = +\infty$ <p><b>2. Định lý:</b></p> <p>a) Nếu <math>\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \end{cases}</math> thì:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty &amp; L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &gt; 0 \\ -\infty &amp; L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &lt; 0 \end{cases}</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0</math></li> </ul> <p>b) Nếu <math>\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \end{cases}</math> thì:</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } L \cdot g(x) < 0 \end{cases}$ <p>* Khi tính giới hạn có một nội dung trong các dạng vô định: <math>\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty</math> thì phải tìm cách khử dạng vô định.</p>

**Một số phương pháp khử dạng vô định:**

**1. Dạng  $\frac{0}{0}$**

a)  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  là các đa thức và  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

VD:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$

b)  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$  và  $P(x), Q(x)$  là các biểu thức chứa căn cùng bậc

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

VD:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$

c)  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x_0) = Q(x_0) = 0$  và  $P(x)$  là biểu thức chứa căn không đồng bậc

Giả sử:  $P(x) = \sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[n]{v(x)}$  với  $\sqrt[n]{u(x_0)} = \sqrt[n]{v(x_0)} = a$ .

Ta phân tích:  $P(x) = \sqrt[n]{u(x)} - a + a - \sqrt[n]{v(x)}$ .

VD:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

2. Dạng  $\frac{\infty}{\infty}$ :  $L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$  với  $P(x), Q(x)$  là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

- Nếu  $P(x), Q(x)$  là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của  $x$ .

- Nếu  $P(x), Q(x)$  có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của  $x$  hoặc nhân lượng liên hợp.

VD: a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 = -1$

### 3. Dạng $\infty - \infty$ : Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0$$

### 4. Dạng $0 \cdot \infty$ :

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

$$\text{VD: } \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$$

## III. Hàm số liên tục

### 1. Hàm số liên tục tại một điểm:

$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

• Để xét tính liên tục của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  ta thực hiện các bước sau:

B1: Tính  $f(x_0)$ .

B2: Tính  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (trong nhiều trường hợp ta cần tính  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ )

B3: So sánh  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  với  $f(x_0)$  và rút ra kết luận.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng:  $y = f(x)$  liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3. Hàm số liên tục trên một đoạn  $a; b$ :  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $a; b$

và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

4.

- Hàm số đa thức liên tục trên  $\mathbb{R}$ .
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

5. Giả sử  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  liên tục tại điểm  $x_0$ . Khi đó:

• Các hàm số  $y = f(x) + g(x)$ ,  $y = f(x) - g(x)$ ,  $y = f(x) \cdot g(x)$  liên tục tại điểm  $x_0$ .

• Hàm số  $y = \frac{f(x)}{g(x)}$  liên tục tại điểm  $x_0$  nếu  $g(x_0) \neq 0$ .

6. Nếu  $y = f(x)$  liên tục trên  $a; b$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì tồn tại ít nhất một số  $c \in a; b$ :  $f(c) = 0$ .



**Nói cách khác:** Nếu  $y = f(x)$  liên tục trên  $a; b$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm  $c \in a; b$  ..

**Mở rộng:**

Nếu  $y = f(x)$  liên tục trên  $a; b$ . Đặt  $m = \min_{a;b} f(x)$ ,  $M = \max_{a;b} f(x)$  Khi đó với mọi  $T \in m; M$  luôn tồn tại ít nhất một số  $c \in a; b$  sao cho  $f(c) = T$ ..

## B. BÀI TẬP

### DẠNG 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ

**BÀI 1:** Tính các giới hạn sau: (Chia cả tử và mẫu cho  $n^a$  với số mũ  $a$  cao nhất. Hoặc đặt nhân tử chung)

1)  $\lim n^2 - n + 1$  ĐS:  $+\infty$

2)  $\lim -n^2 + n + 1$  ĐS:  $-\infty$

3)  $\lim \sqrt{2n^2 - 3n - 8}$  ĐS:  $+\infty$

4)  $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$  ĐS:  $-\infty$

5)  $\lim 2n + \cos n$  ĐS:  $+\infty$

6)  $\lim \left( \frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \right)$  ĐS:  $+\infty$

7)  $u_n = \frac{3^n + 1}{2^n - 1}$  ĐS:  $+\infty$

8)  $u_n = 2^n - 3^n$  ĐS:  $-\infty$

9)  $\lim \frac{2n + 1}{n^3 + 4n^2 + 3}$  ĐS: 0

10)  $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$  ĐS: 0

11)  $\lim \frac{n^2 + 1}{2n^4 + n + 1}$  ĐS: 0

12)  $\lim \frac{2n^2 - n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$  ĐS:  $\frac{2}{3}$

13)  $\lim \frac{3n^3 + 2^2 + n}{n^3 + 4}$  ĐS: 3

14)  $\lim \frac{n^4}{n + 1} \cdot \frac{2 + n}{n^2 + 1}$  ĐS: 1

15)  $\lim \frac{-n^2 + n - 1}{2n^2 - 1}$  ĐS:  $-\frac{1}{2}$

16)  $\lim \frac{\sqrt{4n - 1}}{\sqrt{n} + 1}$  ĐS: 2

17)  $\lim \frac{2n - 3}{\sqrt[3]{n^3 - 2n + 1}}$  ĐS: 2

18)  $\lim \frac{2n^4 + n^2 - 3}{3n^3 - 2n^2 + 1}$  ĐS:  $+\infty$

19)  $\lim \frac{3n^3 + 2n^2 + n}{4 - n^2}$  ĐS:  $-\infty$

20)  $\lim \frac{-4n^2 + 2n + 5}{3n + 1}$  ĐS:  $-\infty$

**BÀI 2:** Tính các giới hạn sau: (Chia cho lũy thừa có cơ số lớn nhất)

$$1) \lim \frac{1+3^n}{4+3^n} \text{ĐS: } 1$$

$$2) \lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n} \text{ĐS: } 7$$

$$3) \lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n} \text{ĐS: } 0$$

$$4) \lim \frac{2^n + 5^{n+1}}{1+5^n} \text{ĐS: } 5$$

$$5) \lim \frac{1+2 \cdot 3^n - 7^n}{5^n + 2 \cdot 7^n} \text{ĐS: } -\frac{1}{2}$$

$$6) \lim \frac{1-2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n \cdot 3^{n+1} - 5} \text{ĐS: } \frac{1}{3}$$

**BÀI 3:** Tính các giới hạn sau: (Tử ở dạng vô cùng  $\pm$  vô cùng; Mẫu ở dạng vô cùng + vô cùng; bậc của tử và bậc của mẫu bằng nhau thì ta chia cho số mũ cao nhất của tử hoặc mẫu)

**Chú ý:**  $\sqrt[n]{n^k}$  có mũ  $\frac{k}{n}$ ;  $\sqrt[3]{n^k}$  có mũ  $\frac{k}{3}$

$$1) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} \text{ĐS: } 2$$

$$2) \lim \frac{\sqrt{n^2+3}-n-4}{\sqrt{n^2+2}+n} \text{ĐS: } 0$$

$$3) \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2} \text{ĐS: } 0$$

$$4) \lim \frac{\sqrt{4n^2+1}+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+n} \text{ĐS: } 2$$

$$5) \lim \frac{2n\sqrt{n}+1}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}+3}{n+2} \text{ĐS: } 2$$

$$6) \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n} \text{ĐS: } -\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

**BÀI 4:** Tính các giới hạn sau:

Nếu bài toán có dạng : +Vô cùng – vô cùng không có mẫu (hệ số của n bậc cao nhất giống nhau).

+ Cả tử và mẫu ở dạng: Vô cùng – vô cùng. (hệ số của bậc cao nhất giống nhau)

Thì ta nhân liên hợp có căn bậc 2, 3 rồi chia cho lũy thừa có số mũ cao nhất.

Nếu bài toán ở dạng vô cùng + vô cùng thì kq là vô cùng ta đặt nhân tử chung có mũ cao nhất rồi tính giới hạn. Hoặc hệ số của n bậc cao nhất khác nhau ta chia hoặc đặt nhân tử chung.

$$1) \lim \sqrt{n^2+3n}+n \text{ĐS: } +\infty$$

$$2) \lim \sqrt{n^2-2n}-n+2013 \text{ĐS: } 2012$$

$$3) \lim \sqrt{n^2-n}-n \text{ĐS: } -\frac{1}{2}$$

$$9) \lim 1+n^2-\sqrt{n^4+3n+1} \text{ĐS: } 1$$

$$10) \lim \frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n} \text{ĐS: } -\frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$4) \lim \sqrt{n^2 + 1} - n + 5 \quad \text{ĐS: } 5$$

$$5) \lim \sqrt{n^2 + 2013} - n + 5 \quad \text{ĐS: } 5$$

$$6) \lim \sqrt{n^2 + 2n} - n - 1 \quad \text{ĐS: } 0$$

$$7) \lim \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$8) \lim \sqrt[3]{2n - n^3} + n - 1 \quad \text{ĐS: } -1$$

$$11) \lim \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4}} \quad \text{ĐS: } -\infty$$

$$12) \lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - n} \quad \text{ĐS: } -\frac{1}{2}$$

$$13) \lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} - n^2} \quad \text{ĐS: } 0$$

**BÀI 5:** Tính các giới hạn sau: (Giới hạn kẹp giữa hai biểu thức có cùng kết quả)

$$1) \lim \frac{2\cos n^2}{n^2 + 1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$2) \lim \frac{-1^n \sin 3n + n^2}{3n - 1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$3) \lim \frac{3\sin^6 n + 5\cos^2 n + 1}{n^2 + 1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$4) \lim \frac{3\sin^2 n^3 + 2 + n^2}{2 - 3n^2} \quad \text{ĐS: } -\frac{1}{3}$$

**BÀI 6:** Tính các giới hạn sau: (Rút gọn rồi tính giới hạn)

$$1) \lim \left( \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2n+1} \right) \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$2) \lim \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{n+2} \right) \quad \text{ĐS: } \frac{3}{2}$$

$$3) \lim \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$4) \lim \left( \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \right) \quad \text{ĐS: } 1$$

$$5) \lim \frac{1+2+\dots+n}{n^2+3n} \quad \text{ĐS: } \frac{1}{2}$$

$$6) \lim \frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{1+3+3^2+\dots+3^n} \quad \text{ĐS: } 0$$

**BÀI 7:** Cho dãy số  $u_n$  với  $u_n = \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$ , với  $\forall n \geq 2$

a) Rút gọn  $u_n$ . ĐS:  $\frac{n+1}{2n}$

b) Tìm  $\lim u_n$ . ĐS:  $\frac{1}{2}$

**BÀI 8:** a) Chứng minh:  $\frac{1}{n\sqrt{n+1} + n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Rút gọn:  $u_n = \frac{1}{1\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$ .

c) Tìm  $\lim u_n$ . ĐS: 1

**BÀI 9:** Cho dãy số  $u_n$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

a) Đặt  $v_n = u_{n+1} - u_n$ . Tính  $v_1 + v_2 + \dots + v_n$  theo  $n$ .

b) Tính  $u_n$  theo  $n$ .

c) Tìm  $\lim u_n$ . ĐS: 2

**BÀI 10:** Cho dãy số  $u_n$  được xác định bởi: 
$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ 2u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad n \geq 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng:  $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1, \forall n \geq 1$ .

b) Đặt  $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ . Tính  $v_n$  theo  $n$ . Từ đó tìm  $\lim u_n$ . ĐS:  $\frac{2}{3}$

Cho dãy số  $u_n$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n \end{cases}; n \in N^*. \text{ Tìm}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$
 (HSG Lạng Sơn 2011)

ĐS: - CM được dãy tăng:  $u_{n+1} - u_n = 2012u_n^2 > 0 \forall n$

- Giả sử có giới hạn là  $a$  thì:  $a = 2012a^2 + a \Rightarrow a = 0 > 2012$  Vô lý

Nên  $\lim u_n = +\infty$

- Ta có: 
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2012u_{n+1}u_n} = \frac{1}{2012} \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

Vậy: 
$$S = \frac{1}{2012} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{2012^2}$$
.

**BÀI 11:** Cho dãy  $x_n$  xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1 \end{cases} \quad n \in N^*$$

Đặt  $S_n = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} + \dots + \frac{1}{x_n + 2}$   $n \in N^*$ . Tìm  $\lim S_n$ ... (HSG Lạng Sơn 2012)

**BÀI 12:** Tổng dãy là cấp số nhân lùi vô hạn:

a.  $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$       b.  $S = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{-1^n}{10^{n-1}} + \dots$     ĐS: a. 2    b.  $\frac{12}{11}$

**BÀI 13:** Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a. 0,444...      b. 0,2121...      c. 0,32111...      ĐS: a.  $\frac{4}{9}$     b.  $\frac{21}{99}$     c.  $\frac{289}{900}$

$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$ , với  $|a|, |b| < 1$ .    ĐS:  $\frac{1-b}{1-a}$

## DẠNG 2: GIỚI HẠN HÀM SỐ

**Bài 1:** Tìm các giới hạn sau:

- + Khi thay  $x=a$  vào  $f(x)$  thấy mẫu khác 0 thì giới hạn bằng  $f(a)$ .
- + Khi thay  $x=a$  vào  $f(x)$  thấy mẫu bằng 0 thì giới hạn bằng  $\infty$ .

1)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x)$ . ĐS: 12

7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1}$  ĐS:  $\sqrt{3}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x - 1}$  ĐS:  $\pm\infty$

8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x + 1}$  ĐS:  $\sqrt{2}/2$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x}$  ĐS: 1

9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 2}$  ĐS: 0

4)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$  ĐS:  $-3/2$

10)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$  ĐS: 0

5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x}$  ĐS:  $\sqrt{2}/\pi$

11)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$  ĐS: 0

6)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$  ĐS:  $-2/3$

**Bài 2:** Tìm các giới hạn sau: (Khi thay  $x=a$  vào  $f(x)$  thấy tử = 0; mẫu = 0 ta rút gọn mất nhân tử rồi thay tiếp tới khi mẫu khác 0 là xong) còn nếu mẫu = 0 tử khác ) thì kq là  $\infty$

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ĐS: 2

8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1}$  ĐS: 1

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} x \left( 2 - \frac{1}{x} \right) \text{ ĐS: } -1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + x^2 + x^3}{1 + x} \text{ ĐS: } 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \text{ ĐS: } 3$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} \text{ ĐS: } 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} \text{ ĐS: } 2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} \text{ ĐS: } 5/3$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} \text{ ĐS: } 5$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 5x^5 + 4x^6}{(1 - x)^2} \text{ ĐS: } 10$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} \text{ ĐS: } -8$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^6 - 5x^5 + x}{x^2 - 1} \text{ ĐS: } 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ ĐS: } 0$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) \text{ ĐS: } -1/2$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) \text{ ĐS: } -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 5x)(1 + 9x) - 1}{x} \text{ ĐS: } 14$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4} - \frac{x - 4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right) \text{ ĐS: } 0$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x} \text{ ĐS: } 6$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1992} + x - 2}{x^{1990} + x - 2} \text{ ĐS: } 1993/1992$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \text{ ĐS: } n(n+1)/2$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \text{ chú ý tổng của CSN ĐS: } m/n$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x - 1)^2} \text{ ĐS: } n(n-1)/2$$

**Bài 3:** Tìm các giới hạn sau: (Một căn bậc 2)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4} \text{ ĐS: } 1/6$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \text{ ĐS: } -1/56$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \text{ ĐS: } 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7} + x - 4}{x^3 - 4x^2 + 3} \text{ ĐS: } -4/15$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{4 - x} \text{ ĐS: } -1/6$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 1} \text{ ĐS: } 9/4$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2} \text{ ĐS: } -1/54$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}{x - 1} \text{ ĐS: } 1/2$$

**Bài 4:** Tìm các giới hạn sau: (Hai căn Bậc 2)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \text{ ĐS: } 1$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \text{ ĐS: } \sqrt{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2} \text{ ĐS: } 2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}} \text{ ĐS: } -3/4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{4x+1}-3} \text{ ĐS: } -3/4$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}} \text{ ĐS: } 1/4$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} \text{ ĐS: } 3/2$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \text{ ĐS: } 4$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{2-\sqrt{x+3}} \text{ ĐS: } -4/3$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+\sqrt{3-2x}}{x^2+3x} \text{ ĐS: } -2/9$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} \text{ ĐS: } 3$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} \text{ ĐS: } 7/24$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \text{ ĐS: } -1/3$$

$$16) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}, \text{ với } a > 0.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} - \sqrt{3x+1}}{x-1} \text{ ĐS: } -1/4$$

$$1/\sqrt{2a}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{3x+3} \text{ ĐS: } 1/6$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x} \text{ ĐS: } 2$$

**Bài 5:** Tìm các giới hạn sau: (Một căn Bậc 3)

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2} \text{ ĐS: } 1/3$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + x^3 + 2}{\sqrt[3]{x+1}} \text{ ĐS: } 24$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{x-1} \text{ ĐS: } 2/3$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \text{ ĐS: } 1/3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1} \text{ ĐS: } 3$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2} \text{ ĐS: } 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1}-1}{x} \text{ ĐS: } 1$$

**Bài 6:** Tìm các giới hạn sau: (Hai căn khác bậc)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} \quad \text{ĐS: } 1/6$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} \quad \text{ĐS: } -11/24$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \quad \text{ĐS: } 4/3$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x^2-4} \quad \text{ĐS: } -1/24$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \quad \text{ĐS: } 3/2$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x} \quad \text{ĐS: } 5$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} \quad \text{ĐS: } 13/12$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} \quad \text{ĐS: } 7/3$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{x}}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{ĐS: } -1/18$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)} \quad \text{ĐS: } 1/n$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{2x+10} + \sqrt[3]{x-5}}{x^2-9} \quad \text{ĐS: } -7/72$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[4]{x})(1-\sqrt[5]{x})}{(1-x)^4}$$

ĐS: 1/120

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} \quad \text{ĐS: } 5/6$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - \sqrt{x+2}}{x-2} \quad \text{ĐS: } -1/3$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}} \quad \text{ĐS: } -6$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{ĐS: } 7/54$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+8x^2} - \sqrt[3]{1+6x^2}}{x^2} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{2x^2 - 5x + 2} \quad \text{ĐS: } 7/162$$

**Bài 7:** Tìm các giới hạn sau:  $(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1)$

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \quad \text{ĐS: } 2/\pi$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 7x}{x^2} \quad \text{ĐS: } 12$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x} \quad \text{ĐS: } 2$$



$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + \sin 2x}{\cos x} \text{ ĐS: } 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\pi - x} \text{ ĐS: } 4/3\pi$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} \text{ ĐS: } 5/3$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \sin 3x \cdot \sin x}{45x^3} \text{ ĐS: } 1/3$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} \text{ ĐS: } 2$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2} \text{ ĐS: } 4$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1} - 1} \text{ ĐS: } 4$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x} \text{ ĐS: } 9/25$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x} \text{ ĐS: } 4$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin x}{3 \sin x} \text{ ĐS: } 1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{x} \text{ ĐS: } 5$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - \cos 2x}{\sin x} \text{ ĐS: } -1$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \text{ ĐS: } 1/2$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2} \text{ ĐS: } 18$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} \text{ ĐS: } \pi \text{ BD góc phụ}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x} \text{ ĐS: } 1/2$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{1 - \cos x} \text{ ĐS: } 14$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} \text{ ĐS: } 1/9$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \text{ ĐS: } 0$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - |1 + \sin 3x||}{\sqrt{1 - \cos x}} \text{ ĐS: } 3\sqrt{2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} \text{ ĐS: } 0$$

$$40) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{4 \cos^2 x - 3} \text{ ĐS: } -1/2$$

$$41) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} \text{ ĐS: } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$42) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \cot gx} \text{ ĐS: } -1$$

$$43) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{\pi}{x}\right) \text{ ĐS: } \pi$$

$$44) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\tan(x+2)} \text{ ĐS: } 12$$

$$45) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{3}{\sin 3x}\right) x \text{ ĐS: } 0$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} \text{ ĐS: } -1$$

$$46) L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x) \cdot \tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$$

chéo

$$27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x} \quad \text{ĐS: } 4\sqrt{3} \quad \text{Đặt ẩn phụ}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\cos \frac{\pi x}{4}} \quad \text{ĐS: } 16/\pi$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \pi x + 1}{1 - x} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \quad \text{ĐS: } 1/2$$

$$31) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)} \quad \text{ĐS: } -2$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2) \sin \frac{3}{x} \quad \text{ĐS: } 3$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)} \quad \text{ĐS: } -7/4$$

$$34) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \operatorname{tg} x \quad \text{ĐS: } 0$$

$$35) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left( \frac{\pi}{6} - x \right)}{1 - 2 \sin x} \quad \text{ĐS: } 1/\sqrt{3}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{2 \cos^2 x - 1} \quad \text{ĐS: } -1/2$$

$$37) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x - \tan x} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{ĐS: } -1/2$$

ĐS:  $\tan^4 a - 1$

$$47) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x) \sin(a+x) - a \sin a}{x} \quad \text{ĐS: } (a+1) \sin a$$

$$48) (\text{ĐHGTVT-98}): \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} \quad \text{ĐS: } 0$$

$$49) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$50) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\tan^2 x} \quad \text{ĐS: } \sqrt{2}/8$$

$$51) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad \text{ĐS: } 1$$

$$52) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad \text{ĐS: } 2/\pi$$

$$53) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2-1} + \sqrt{2x^2+1}}{1 - \cos x} \quad \text{ĐS: } 4$$

$$54) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \quad \text{ĐS: } 4/3$$

$$55) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}}{x} \quad \text{ĐS: } 2$$

$$56) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} \quad \text{ĐS: } -1/12$$

$$57) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} \quad \text{ĐS: } -1$$

$$58) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} \quad \text{ĐS: } 7$$

$$59) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \dots \cos nx}{x^2} \quad \text{ĐS: } n(n+1)(2n+1)/12$$

$$39) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{1 - \sqrt{2} \sin x} \text{ ĐS: } 1$$

$$61) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x} \text{ ĐS: } 1$$

$$62) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot^3 x}{2 - \cot x - \cot^3 x} \text{ ĐS: } -3/4$$

$$60) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi \cos x}{2}\right)}{\sin(\tan x)} \text{ ĐS: } 0$$

$$63) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{1 - \cos 2x} \text{ ĐS: } 3/2$$

**Bài 8:** Tìm các giới hạn sau: (giống giới hạn dãy số chia cho mũ cao nhất, nhân liên hợp, đặt nhân tử, dấu giá trị tuyệt đối)

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) \text{ ĐS: } -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x) \text{ ĐS: } +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 - 3x) \text{ ĐS: } \pm\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4} \text{ ĐS: } \pm\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5}{x^2 + 1} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 2} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} \text{ ĐS: } 2$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 2x^5}{5x^4 + x + 4} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{1 - 3x - 5x^2} \text{ ĐS: } -1/5$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(2x^2 - 1)}{(5x - 1)(x^2 + 2x)} \text{ ĐS: } 6/5$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} \text{ ĐS: } -1; 1$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x}}{2x - 2} \text{ ĐS: } 1$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4} \text{ ĐS: } \pm\infty$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right] \text{ ĐS: } -\infty$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)} \text{ ĐS: } -\infty$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \text{ ĐS: } -\infty$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} \text{ ĐS: } +\infty$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) \text{ ĐS: } -\infty$$

$$29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} \text{ ĐS: } 1/2$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 2} \text{ ĐS: } -\infty; +\infty$$

- 12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$  ĐS:0
- 13)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-1}$  ĐS:-2/3; 2/3
- 14)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}$  ĐS:  $+\infty$
- 15)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$  ĐS:-2
- 16)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+2x}}{3x-1}$  ĐS:1/3
- 17)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2+3x+1}}{\sqrt{4x^2+1+1-x}}$  ĐS:4;-2/3
- 18)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5)\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$  ĐS:1
- 19)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$  ĐS: $\sqrt{2}/3$
- 20)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$  ĐS:  $-\infty$
- 21)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$  ĐS:  $-\infty$
- 31)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^3-3x^2+2}$  ĐS:0
- 32)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3+4x+1}}{\sqrt{4x^2+1+2-x}}$  ĐS:-1;5
- 33)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1+2-x}}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$  ĐS:3;1/5
- 34)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$  ĐS:2/5
- 35)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3x}}{\sqrt{4x^2+1-x+2}}$  ĐS:4
- 36)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-5x+2}{2|x|+1}$  ĐS:  $+\infty$
- 37)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$  ĐS:0
- 38)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-x^3+11}{2x-7}$  ĐS:  $+\infty$
- 40)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6+4x^2+x-2}{(x^3+2)^2}$  ĐS:1
- 39)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)^2(3+x)^2}{(2-x)(3-x)^2(4-x)^2}$  ĐS:1

**Câu 9:** Tìm các giới hạn sau: (giống giới hạn dãy số chia cho mũ cao nhất, nhân liên hợp)

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$  ĐS: 1/2
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$  ĐS:  $+\infty$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+2} - x)$  ĐS: -3/2
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-3x+2} - x)$  ĐS:  $+\infty$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$  ĐS: 0
- 6)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2-2x+4} - x)$  ĐS:  $+\infty$ ; -1

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) \text{ ĐS: } 0$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2) \text{ ĐS: } +\infty$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}) \text{ ĐS:}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2) \text{ ĐS: } -1/2$$

$$1/2; -1/2$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 1) \text{ ĐS: } 1/2; +\infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \text{ ĐS: } 2$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) \text{ ĐS: } 0$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) \text{ ĐS: } +\infty$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}) \text{ ĐS: } 0$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} + x) \text{ ĐS: } -1/2; +\infty$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \text{ ĐS: } 1/2$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1) \text{ ĐS: } -1$$

$$22) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{2x+1}) \text{ ĐS: } 0$$

$$13) \text{ Cho } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}.$$

$$23) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}) \text{ ĐS: } -\infty$$

Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , từ đó

$$24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}) \text{ ĐS: } 2$$

nhận xét về sự tồn tại của giới hạn

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 6x^2} - x) \text{ ĐS: } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x). \text{ ĐS: } -2; 2$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x + 2 - \sqrt{9x^2 + 12x - 3}) \text{ ĐS: } -\infty; 0$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}) \text{ ĐS: } 2/3$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3}) \text{ ĐS: } 0$$

**Câu 10:** Tìm các giới hạn sau:

$$a. \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1}$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}$$

$$e. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$$

$$\text{ĐS: a. } 0; \text{ b. } 10; \text{ c. } +\infty; \text{ d. } -\infty; \text{ e. } 0$$

**Câu 11:** Tìm các giới hạn sau nếu có

$$a. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x-2}$$

$$\text{ĐS: a. } 3; \text{ b. } -3; \text{ c. ko xđ}$$

**Câu 12:** Tìm các giới hạn sau: (Đề ý đến dấu các biểu thức tử và mẫu khi tính giới hạn này)

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$  ĐS:  $-\infty$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-15}{x-2}$  ĐS:  $+\infty$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1+3x-2x^2}{x-3}$  ĐS:  $-\infty$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$  ĐS:  $+\infty$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$  ĐS:  $1/3$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$  ĐS:  $-1/3$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x}{3x+1}$  ĐS:  $0$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{2}$  ĐS:  $5/2$
- 9)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$  ĐS:  $1$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$  ĐS:  $-1$
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x^3}}{2x}$  ĐS:  $1/2$
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}$  ĐS:  $-1; 1$
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+3}{x-2}$  ĐS:  $-\infty$
- 14)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+3}{x-2}$  ĐS:  $+\infty$
- 15)  $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{x-3}{x-4}$  ĐS:  $-\infty; \infty$
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+3}{x^2+x-2}$  ĐS:  $+\infty$
- 17)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+3}{x^2+x-2}$  ĐS:  $-\infty$
- 18)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$  ĐS:  $\sqrt{3}/3$
- 19)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right)$  ĐS:  $0; 0$
- 20)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$  ĐS:  $+\infty$

**Câu 13:** Tìm các giới hạn một bên của hàm số tại điểm được chỉ ra: (Giới hạn một bên tiến tới 1 số)

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{9-x^2}{x-3} & \text{khi } x < 3 \\ 1-x & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \text{ tại } x=3 \text{ ĐS: } -6; -2; \text{ ko xd}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{8-x^3} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x^4-16}{x-2} & \text{khi } x < 2 \end{cases} \text{ tại } x=2 \text{ ĐS: } -1/6; 32; \text{ ko xd}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x=1 \text{ ĐS: } -1/2; -1/2; -1/2$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x > 0 \\ \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} \text{ tại } x=0 \text{ ĐS: } 3/2; 3/2; 3/2$$

**Câu 14:** Tìm giá trị của m để các hàm số sau có giới hạn tại điểm được chỉ ra:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x=1 \text{ ĐS: } m=1$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x+m & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2+100x+3}{x+3} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ tại } x=0 \text{ ĐS: } m=1$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x+3m & \text{khi } x < -1 \\ x^2+x+m+3 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \text{ tại } x=-1 \text{ ĐS: } m=2$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x > 1 \\ m^2x^2 - 3mx + 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x=1 \text{ ĐS: } m=1; m=2$$

---

### DẠNG 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

**Câu 1:** Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x = -1 \text{ ĐS: LT}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x = 1 \text{ ĐS: LT}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x-6}{x^2-x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{11}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \text{ ĐS: LT}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \text{ ĐS: LT}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x = 2 \text{ ĐS: LT}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2-3x+4 & \text{khi } x < 1 \\ 2x-3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \text{ ĐS: K LT}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ 1-2x & \text{khi } x > 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \text{ ĐS: K LT}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0 \text{ ĐS: LT}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases} \text{ tại } x = 5 \text{ ĐS: LT}$$



$$10) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases} \text{ tại } x=0 \text{ ĐS: KLT}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x=1 \text{ ĐS: LT}$$

**Câu 2:** Tìm m, n, a để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x=-1 \text{ ĐS: } m=0$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \text{ ĐS: } a = 5/2$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x=1 \text{ ĐS: } m=2$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \\ 2x + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \text{ ĐS: } a = 2$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ a + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0 \text{ ĐS: } a = -3$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2 \text{ ĐS: } a = 0$$

**Câu 3:** Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 7 & \text{khi } x < -2 \\ 1 - x & \text{khi } x \geq -2 \end{cases} \text{ ĐS: } LT / \mathbb{R}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & \text{khi } x < 2 \\ 5 & \text{khi } x = 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases} \text{ ĐS: KLT tại } x=2$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ĐS: } \mathbb{R} / \{-1\}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -4 & \text{khi } x = -2 \end{cases} \text{ĐS: } \mathbb{R} / \{-2\}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} & \text{khi } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases} \text{ĐS: } \mathbb{R} / \{\sqrt{2}\}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4} & \text{khi } x < 2 \\ \frac{2x + 3}{x + 2} & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \\ 3x - 4 & \text{khi } x > 5 \end{cases} \text{ĐS: KLT tại } x=5$$

**Câu 4:** Tìm các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ĐS: } m = 3$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ĐS: } m = 1$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ĐS: } m = 0$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ĐS: } m = 2$$

**Câu 5:** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a)  $x^3 - 2x - 7 = 0$  ĐS:  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(0).f(3) < 0$

b)  $x^5 - x^3 - 1 = 0$  ĐS:  $f(0).f(1) < 0$

c)  $x^3 + x^2 + x + 2/3 = 0$  ĐS:  $f(-1).f(0) < 0$

d)  $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$  ĐS:  $f(0).f(5) < 0$

e)  $x^5 + 9x^2 + x + 2 = 0$  ĐS:  $f(-3).f(0) < 0$

f)  $\cos x - x + 1 = 0$  ĐS:  $f(0).f(3) < 0$

g)  $x^5 - 3x + 3 = 0$  ĐS:  $f(-2).f(0) < 0$

h)  $x^5 + x - 1 = 0$  ĐS:  $f(0).f(1) < 0$

i)  $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$  ĐS:  $f(-2).f(0) < 0$

**Câu 6:** Chứng minh rằng phương trình

a)  $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-1; 3)$

ĐS:  $f(-1) < 0; f(0) > 0; f(2) < 0; f(3) > 0$

b)  $2x^3 - 6x + 1 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-2; 2)$

ĐS:  $f(-2) < 0; f(0) > 0; f(1) < 0; f(2) > 0$

c)  $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-3; 1)$

ĐS:  $f(-3) < 0; f(-2) > 0; f(0) < 0; f(1) > 0$

d)  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(-1; 3)$

ĐS:  $f(-1) < 0; f(0) > 0; f(1) < 0; f(3) > 0$

e)  $2x^2 + 3x - 4 = 0$  có 2 nghiệm trong khoảng  $(-3; 1)$

ĐS:  $f(-3) > 0; f(0) < 0; f(1) > 0$

f)  $x^5 - 5x^4 + 4x - 1 = 0$  có 3 nghiệm trong khoảng  $(0; 5)$

ĐS:  $f(0) < 0; f(1/2) > 0; f(1) < 0; f(5) > 0$

g)  $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$  có 5 nghiệm trong khoảng  $(-2; 3)$

ĐS:  $f(-2) < 0; f(-3/2) > 0; f(0) < 0; f(1/2) > 0; f(1) < 0; f(3) > 0$

**Câu 7:** Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

1)  $x^2 - 3x + 1 = 0$  ĐS:  $f(-2) < 0; f(0) > 0; f(1) < 0; f(2) > 0$

2)  $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$  ĐS:  $f(-4) < 0; f(-3) > 0; f(-1) < 0; f(0) > 0$

3)  $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$  ĐS:  $f(-7) < 0; f(0) > 0; f(1) < 0; f(9) > 0$

**Câu 8:** Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số:

1)  $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$  ĐS:  $f(1).f(2) < 0$

2)  $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$  ĐS:  $f(0).f(2) < 0$

3)  $a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$

HD: Xét 4 TH:  $a < b < c < 0; a < b < 0 < c; \dots$

4)  $x^5 - mx + m - 4 = 0$  HD: Sử dụng giới hạn

5)  $mx^3 - 5x + 2 = 0$  HD: Sử dụng giới hạn

Khi  $m = 0$  pt luôn có nghiệm. Khi  $m \neq 0$ . Đặt  $f(x) = Vt$ . Khi đó,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{m} = \pm\infty$  nên luôn có 2

số  $a, b$  để  $f(a)/m.f(b)/m < 0$  nên pt luôn có nghiệm

6)  $(1-m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$  HD: Sử dụng giới hạn

7)  $\cos x + m \cos 2x = 0$  ĐS:  $f(\pi/4).f(3\pi/4) < 0$

8)  $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$  ĐS:  $f(-\pi/4).f(\pi/4) < 0$

9)  $m(x-1)^3(x+2) + 2x + 3 = 0$  ĐS:  $f(1).f(-2) < 0$

10)  $(m^2 + m + 1)x^4 + 2x - 2 = 0$  ĐS:  $f(0).f(1) < 0$

**Câu 9:** Cho  $f(x) = ax^2 + bx + c$  thoả mãn:  $2a + 3b + 6c = 0$

a) Tính  $a, b, c$  theo  $f(0), f(1), f(1/2)$

b) Chứng minh rằng ba số  $f(0), f(1), f(1/2)$  không thể cùng dấu

c) Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm trong  $(0; 1)$

**Câu 10:** Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm:

1)  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $2a + 3b + 6c = 0$

---

2)  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a + 2b + 5c = 0$  ĐS:  $f(0) + f(1/2) = 0$

3)  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  HD: Sử dụng giới hạn

**Câu 11:** Cho 3 số  $a, b, c$  khác nhau .

Chứng minh rằng phương trình  $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$

Có 2 nghiệm phân biệt.

ĐS:  $f(a); f(b); f(c)$ . Giả sử  $a < b < c$ .

Thì  $f(a) > 0; f(b) < x^4 = 3 + x \geq 2\sqrt{3x} \Leftrightarrow x^8 \geq 12x \Leftrightarrow x^7 \geq 12 > 0; f(c) > 0$  nên pt luôn có 2 nghiệm.

**Câu 12:** Chứng minh rằng phương trình:  $ax^2 + bx + c = 0$  luôn có nghiệm  $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

Với  $a \neq 0$  và  $2a + 6b + 19c = 0$  ĐS:  $f(0) + 2f(1/3) = 0$

**Câu 13:** Cho phương trình  $x^4 - x - 3 = 0$ . Chứng minh rằng: phương trình có nghiệm  $x_0 \in (1; 2)$  và  $x_0 > \sqrt[3]{12}$

---

## CHUYÊN ĐỀ 5: ĐẠO HÀM – TIẾP TUYẾN

### A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

#### 1. Định nghĩa đạo hàm

+ Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a;b)$  chứa  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

+ Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0$  thì hàm số liên tục tại điểm đó

#### 2. Ý nghĩa của đạo hàm

+  $k = f'(x_0)$  là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại  $M(x_0; y_0)$  với  $y_0 = f(x_0)$

+ Phương trình tiếp tuyến tại  $M(x_0; y_0)$  là  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

#### 3. Quy tắc tính đạo hàm

+  $(C)' = 0$ ;  $x' = 1$ ;  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  với mọi số thực  $n$

+  $(u + v)' = u' + v'$ ;  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$ ;  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ;  $(ku)' = ku'$ ;  $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$  ( $v \neq 0$ )

+ Đạo hàm của hàm hợp: Nếu  $u(x)$  có đạo hàm theo  $x$  là  $u'(x)$  và hàm số  $y = f(u)$  có đạo hàm theo  $u$  là  $f'(u)$  thì hàm số  $y = f(u(x))$  có đạo hàm tại  $x$  là  $y' = f'(u) \cdot u'(x)$

#### 4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

+ Giới hạn cơ bản  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

+  $(\sin x)' = \cos x$ ;  $(\cos x)' = -\sin x$ ;  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  $(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

#### 5. Vi phân

+  $dy = y' dx$

+  $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$

6. Đạo hàm cấp cao  $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$  với  $n \geq 2$

7. Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M(x_0; y_0)$  là  $d: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

a. Viết phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng  $\Delta: y = ax + b$

+ Gọi tiếp điểm là  $M(x_0; y_0)$

+ Hệ số góc tiếp tuyến là  $k = f'(x_0) = a$

+ Tìm  $x_0, y_0$  rồi suy ra phương trình tiếp tuyến

b. Viết phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $\Delta: y = ax + b$

+ Gọi tiếp điểm là  $M(x_0; y_0)$

+ Hệ số góc tiếp tuyến là  $k = f'(x_0) = -\frac{1}{a}$

+ Tìm  $x_0, y_0$  rồi suy ra phương trình tiếp tuyến

## B.BÀI TẬP

### DẠNG 1: ĐẠO HÀM

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = 2x^2 - 3x + 1$ . Tính  $y'(1)$

A. 1                                      B. -1                                      C. 0                                      D. 2

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ . Tính  $y'(-1)$

A. 0                                      B. 12                                      C. 6                                      D. 1

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-1}$ . Tính  $y'(1)$

A. 1                                      B. -1                                      C. 3                                      D. -3

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = 3\sqrt{x+1} + 4\sqrt{3-x}$ . Tính  $y'\left(\frac{11}{25}\right)$

A.  $\frac{5}{2}$                                       B.  $\frac{1}{2}$                                       C. 0                                      D. 1

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = \frac{1}{2x-3}$ . Tính  $y''(2)$

A. -4                                      B. 4                                      C. -8                                      D. 8

**Câu 6:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x^3 - \frac{3}{x} + 2$

A.  $y' = 3x^2 + \frac{3}{x^2}$       B.  $y' = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$       C.  $y' = 3x^2 - \frac{6}{x^2}$       D.  $y' = 3x^2 + \frac{6}{x^2}$

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x}$ . Chọn biểu thức đúng với mọi  $x > 0$

A.  $2xy' - 3y = 0$       B.  $2xy' + 3y = 0$       C.  $3xy' - 2y = 0$       D.  $3xy' + 2y = 0$

**Câu 8:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

A.  $y' = 5x^5 - 12x^3 + 4x$       B.  $y' = 6x^5 - 16x^3 + 8x$

C.  $y' = 6x^5 - 20x^3 + 8x$       D.  $y' = 6x^5 - 15x^3 + 8x$

**Câu 9:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{x+3}{1-x}$

A.  $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$       B.  $y' = \frac{4}{(1-x)^2}$       C.  $y' = \frac{-4}{(1-x)^2}$       D.  $y' = \frac{-3}{(1-x)^2}$

**Câu 10:** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số  $y = \frac{2x^2 - 4x}{x+1}$

A.  $y' = \frac{4}{(x+1)^3}$       B.  $y' = \frac{12}{(x+1)^3}$       C.  $y' = \frac{-12}{(x+1)^3}$       D.  $y' = \frac{-4}{(x+1)^3}$

**Câu 11:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = (x^2 + x + 1)^3$

A.  $y' = 3(x+1)(x^2 + x + 1)^2$       B.  $y' = 6(2x+1)(x^2 + x + 1)^2$

C.  $y' = 6(x+1)(x^2 + x + 1)^2$       D.  $y' = 3(2x+1)(x^2 + x + 1)^2$

**Câu 12:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = (4x - x^2)^5$

A.  $y' = -10(2-x)(4x - x^2)^4$       B.  $y' = 10(2-x)(4x - x^2)^4$

C.  $y' = 20(2-x)(4x - x^2)^4$       D.  $y' = -20(2-x)(4x - x^2)^4$

**Câu 13:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{1}{(x^2 + 2x)^2}$

A.  $y' = \frac{-2(x+1)}{(x^2 + 2x)^3}$       B.  $y' = \frac{-4(x+1)}{(x^2 + 2x)^3}$       C.  $y' = \frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x)^3}$       D.  $y' = \frac{4(x+1)}{(x^2 + 2x)^3}$



**Câu 14:** Cho hàm số  $y = \frac{3}{x^2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = y''(1) + y'(1)$

- A.  $P = -12$                       B.  $P = 30$                       C.  $P = 24$                       D.  $P = 24$

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ . Chọn biểu thức đúng với mọi số thực  $x$

- A.  $2y''y^3 = -9$                       B.  $4y''y^3 = 9$                       C.  $4y''y^3 = -9$                       D.  $2y''y^3 = 9$

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = y'(1) \cdot y(1)$

- A.  $P = 6$                       B.  $P = 8$                       C.  $P = 10$                       D.  $P = 12$

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^3$ . Tính  $y'(0)$

- A. 2                      B. 3                      C. 6                      D. 0

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = \frac{\sqrt{4+x^2}}{x+1}$ . Giải phương trình  $yy' + 4 = 0$

- A.  $x = 0$                       B.  $x = 1$                       C.  $x = -2$                       D.  $x = 3$

**Câu 19:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

- A.  $y' = \frac{1}{(1 + \cos x)^2}$                       B.  $y' = \frac{1}{(1 + \cos x)}$                       C.  $y' = \frac{-1}{(1 + \cos x)}$                       D.  $y' = \frac{2}{(1 + \cos x)^2}$

**Câu 20:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x \cos 2x$

- A.  $y' = \sin 2x - x \cos 2x$                       B.  $y' = \cos 2x - x \sin 2x$   
C.  $y' = \sin 2x - 2x \cos 2x$                       D.  $y' = \cos 2x - 2x \sin 2x$

**Câu 21:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sin^3 2x$

- A.  $y' = 3 \sin^2 2x \cos 2x$                       B.  $y' = 6 \sin^2 2x \cos 2x$   
C.  $y' = -3 \sin^2 2x \cos 2x$                       D.  $y' = -6 \sin^2 2x \cos 2x$

**Câu 22:** Cho hàm số  $y = \tan^3 \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right)$ . Tính  $y' \left( \frac{\pi}{12} \right)$

- A. 36                      B. 48                      C. 54                      D. 72

**Câu 23:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = x \sin 2x - x^2 \tan x$

A.  $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x - 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$

B.  $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x - 2x \tan x - \frac{x^2}{\cos^2 x}$

C.  $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x + 2x \tan x - \frac{x^2}{\cos^2 x}$

D.  $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x + 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x}$

**Câu 24:** Cho hàm số  $y = \sin^2 x + \cos 2x$ . Giải phương trình  $y' = 1$

A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k$  là số nguyên

B.  $x = k\pi$ ,  $k$  là số nguyên

C.  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k$  là số nguyên

D.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k$  là số nguyên

**Câu 25:** Cho  $n$  là số nguyên dương. Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sin^n x \cos nx$

A.  $y' = n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n \sin nx \cdot \sin^n x$

B.  $y' = n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx + n \sin nx \cdot \sin^n x$

C.  $y' = -n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx + n \sin nx \cdot \sin^n x$

D.  $y' = -n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n \sin nx \cdot \sin^n x$

**Câu 26:** Cho hàm số  $f(x) = \frac{5x-1}{2x}$ . Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) < 0$  là

A.  $\emptyset$

B.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C.  $(-\infty; 0)$

D.  $(0; +\infty)$

**Câu 27:** Đạo hàm của hàm số  $y = \frac{2-x}{3x+1}$

A.  $y' = \frac{-7}{3x+1}$

B.  $y' = \frac{5}{(3x+1)^2}$

C.  $y' = \frac{-7}{(3x+1)^2}$

D.  $y' = \frac{5}{3x+1}$

**Câu 28:** Đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{-3x+4}{2x+1}$  tại điểm  $x = -1$  là

A.  $x = -\frac{11}{3}$

B.  $\frac{1}{5}$

C.  $-11$

D.  $-\frac{11}{9}$

**Câu 29:** Đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x+9}{x+3} + \sqrt{4x}$  tại điểm  $x=1$  là

- A.  $-\frac{5}{8}$       B.  $\frac{25}{16}$       C.  $\frac{5}{8}$       D.  $\frac{11}{8}$

**Câu 30:** Cho hàm số  $y = \frac{3x+5}{-1+2x}$ . Đạo hàm của hàm số là

- A.  $y' = \frac{7}{(2x-1)^2}$       B.  $y' = \frac{1}{(2x-1)^2}$       C.  $y' = -\frac{13}{(2x-1)^2}$       D.  $y' = \frac{13}{(2x-1)^2}$

**Câu 31:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$ . Đạo hàm của hàm số là

- A.  $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$       B.  $y' = \frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$       C.  $y' = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$       D.  $y' = \frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$

**Câu 32:** Cho hàm số  $g(x) = (x+1)\cos x$ . Tính  $g''\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- A.      B. 1      C. 2      D. -2

**Câu 33:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ . Giải phương trình  $y' = 0$

- A.  $x = 0 \vee x = \pm 2$       B.  $x = 0 \vee x = \pm 1$       C.  $x = \pm 1$       D.  $x = \pm 2$

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = \sin 2x - 6\sin x + 4x$ . Giải phương trình  $y' = 0$

A.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $k$  là số nguyên.

B.  $x = k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $k$  là số nguyên

C.  $x = k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ,  $k$  là số nguyên

D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $k$  là số nguyên

**Câu 35:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3(m-1)x^2 - 6(m-2)x - 9m - 5$ . Tìm giá trị của  $m$  để  $y' > 0$  với mọi số thực  $x$ .

- A.  $1 < m < 3$       B.  $1 < m < 4$       C.  $1 < m < 2$       D.  $1 < m < 5$

**Câu 36:** Tính đạo hàm cấp ba của hàm số  $y = \cos 2x - \sin^2 x$

A.  $y^{(3)} = 8\sin 2x$       B.  $y^{(3)} = 12\sin 2x$       C.  $y^{(3)} = -12\sin 2x$       D.  $y^{(3)} = 4\sin 2x$

**Câu 37:** Tính đạo hàm cấp ba của hàm số  $y = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6$

A.  $y^{(3)} = 20x - 6$       B.  $y^{(3)} = 60x - 12$       C.  $y^{(3)} = 120x - 12$       D.  $y^{(3)} = 120x - 24$

**Câu 38:** Cho hàm số  $y = x \cos x - \sin x$ . Giải phương trình  $y^{(3)} + y' = 1$

A.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ , k là số nguyên

B.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ , k là số nguyên

C.  $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ , k là số nguyên

D.  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ , k là số nguyên

**Câu 39:** Cho hàm số  $y = \frac{x-3}{x-4}$ . Tập nghiệm của bất phương trình  $y'' \leq y'y$

A.  $(4; 5]$

B.  $(-\infty; 4)$

C.  $(-\infty; 4) \cup [5; +\infty)$

D.  $[5; +\infty)$

**Câu 40:** Cho hàm số  $y = \tan 2x$ . Tính  $y''\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

A. 4

B. 8

C. 16

D. 32

**Câu 41:** Tính đạo hàm cấp n của hàm số  $y = \frac{1}{(1+x)}$

A.  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+n)^n}$

B.  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+n)^{n+1}}$

C.  $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+n)^n}$

D.  $y^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(1+n)^{n+1}}$

**Câu 42:** Tính đạo hàm cấp n của hàm số  $y = \cos 4x$

A.  $y^{(n)} = 4^n \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)$

B.  $y^{(n)} = -4^n \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)$

C.  $y^{(n)} = 4^{n+1} \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)$

D.  $y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + n\frac{\pi}{2}\right)$

**Câu 43:** Tính đạo hàm cấp n của hàm số  $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$

A.  $y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} \right]$

B.  $y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x+2)^n} \right]$

$$\text{C. } y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right] \quad \text{D. } y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right]$$

**Câu 44:** Tính đạo hàm cấp n của hàm số  $y = \frac{1-x}{x+1}$

$$\text{A. } y^{(n)} = \frac{2 \cdot (-1)^n (n-1)!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\text{B. } y^{(n)} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} n!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\text{C. } y^{(n)} = \frac{2 \cdot (-1)^n (n+1)!}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\text{D. } y^{(n)} = \frac{-2 \cdot (-1)^n (n-1)!}{(x+1)^{n+1}}$$

**Câu 45:** Tính đạo hàm cấp n của hàm số  $y = \sin^2 x$

$$\text{A. } y^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left( 2x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{B. } y^{(n)} = 2^{n-1} \cos \left( 2x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{C. } y^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left[ 2x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{D. } y^{(n)} = 2^{n-1} \cos \left[ 2x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

**Câu 46:** Cho hàm số  $y = \sqrt{2x-x^2}$ . Chọn biểu thức luôn đúng với  $0 < x < 2$

$$\text{A. } y'' y^3 = -1$$

$$\text{B. } y'' y^3 = 1$$

$$\text{C. } y'' y^3 = -2$$

$$\text{D. } y'' y^3 = 2$$

**Câu 47:** Cho hàm số  $y = x \tan x$ . Chọn biểu thức đúng với mọi  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , k là số nguyên

$$\text{A. } x^2 y'' = -2(x^2 + y^2)(1+y)$$

$$\text{B. } x^2 y'' = 2(x^2 + y^2)(1+y)$$

$$\text{C. } x^2 y'' = (x^2 + y^2)(1+y)$$

$$\text{D. } x^2 y'' = -(x^2 + y^2)(1+y)$$

**Câu 48:** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

$$\text{A. } \frac{5}{2}$$

$$\text{B. } \frac{2}{5}$$

$$\text{C. } 1$$

$$\text{D. } -1$$

**Câu 49:** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

$$\text{A. } 1$$

$$\text{B. } -1$$

$$\text{C. } 4$$

$$\text{D. } 2$$

**Câu 50:** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{x \sin x}$

- A. -4                      B. -2                      C. 2                      D. 4

**Câu 51:** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi + 4x)^2}{1 + \sin 2x}$

- A. 8                      B. 16                      C. 4                      D. 2

**Câu 52:** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$

- A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 2                      D. -1

**Câu 53:** Tìm giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$

- A. 2                      B. 4                      C. 1                      D. -1

**Câu 54:** Cho hàm số  $y = \cos x + \sqrt{3} \sin x + 2x - 1$ . Giải phương trình  $y' = 0$

- A.  $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$ , k là số nguyên                      B.  $x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$ , k là số nguyên  
C.  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ , k là số nguyên                      D.  $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ , k là số nguyên

**Câu 55:** Cho hàm số  $y = \sin^2 x + 2\cos x$ . Giải phương trình  $y' = 0$

- A.  $x = k\pi$ , k là số nguyên                      B.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , k là số nguyên  
C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ , k là số nguyên                      D.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ , k là số nguyên

**Câu 56:** Cho hàm số  $f(x) = 5\cos^3 x - \sin x$  và  $g(x) = \sin^3 x$ . Giải phương trình

$$g'(x) = f'(x)$$

- A.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ , k là số nguyên                      B.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ , k là số nguyên  
C.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , k là số nguyên                      D.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , k là số nguyên

**Câu 57:** Cho hàm số  $y = mx^3 - 6x^2 + 3mx - 15$ . Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $y' > 0$  với mọi số thực

- A.  $|m| < 2$                       B.  $|m| > 2$                       C.  $0 < m < 2$                       D.  $m > 2$

**Câu 58:** Cho hàm số  $y = mx^3 - 3mx^2 + 6(m+1)x + 12$ . Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $y' < 0$  với mọi số thực  $x$

- A.  $m < 0 \vee m > 2$                       B.  $m < 0$                       C.  $m < -2$                       D.  $-2 < m < 0$

**Câu 59:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3mx - 3$ . Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $y' \geq 0$  với mọi số thực  $x$ .

- A.  $m \geq 2$                       B.  $m \leq 1$                       C.  $m \geq 1$                       D.  $m \leq 2$

**Câu 60:** Cho hàm số  $y = mx^3 + 3mx^2 - 6(3-m)x + 6m + 3$ . Tìm giá trị của  $m$  sao cho phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

- A.  $0 < m < 6$                       B.  $0 < m < 3$                       C.  $m < 0 \vee m > 3$                       D.  $3 < m < 6$

**Câu 61:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = (x^3 + 2)^3 (x^2 - 3)$

- A.  $y' = 6x^2(x^2 + 2)^2(x^2 - 3) + 2x(x^2 + 2)^3$                       B.  $y' = 9x^2(x^2 + 1)^2(x^2 - 3) + 2x(x^2 + 1)^3$   
C.  $y' = 6x^2(x^2 + 2)^2(x^2 - 3) - 2x(x^2 + 2)^3$                       D.  $y' = 9x^2(x^2 + 1)^2(x^2 - 3) - 2x(x^2 + 1)^3$

**Câu 62:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

- A.  $y' = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$                       B.  $y' = 1 - \frac{3}{(x-2)^2}$                       C.  $y' = 1 + \frac{3}{(x-2)^2}$                       D.  $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2}$

**Câu 63:** Cho hàm số  $y = (-2x^2 + x + 3)^3$ . Hệ số góc tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy là

- A.  $k = -36$                       B.  $k = 36$                       C.  $k = -27$                       D.  $k = 27$

**Câu 64:** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{\sqrt{1-x}}$ . Tính  $y'(0)$

- A. 2                      B. -2                      C. 1                      D. -1

**Câu 65:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sin^3\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

A.  $y = -6\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$       B.  $y = -3\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

C.  $y = 3\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$       D.  $y = 6\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

**Câu 66:** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \left(\frac{1}{x}\right)\sin x$

A.  $y' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin x - \left(\frac{1}{x}\right)\cos x$       B.  $y' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin x + \left(\frac{1}{x}\right)\cos x$

C.  $y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)\sin x - \left(\frac{1}{x}\right)\cos x$       D.  $y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)\sin x + \left(\frac{1}{x}\right)\cos x$

**Câu 67:** Cho hàm số  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = y^2 + y'$

A.  $P = 0$       B.  $P = 1$       C.  $P = -1$       D.  $P = 2$

**Câu 68:** Cho hàm số  $y = |\cos x|$ . Tính  $y'(\pi)$

A. 0      B. 1      C. -1      D. không tồn tại

**Câu 69:** Cho hàm số  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ . Tính giá trị của  $g'(0)$

A. 0      B. 1      C. -1      D. không tồn tại

**Câu 70:** Cho hàm số  $y = x^3 + 3(m-1)x^2 + 3x - 9$ . Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $y' > 0$  với mọi số thực  $x$

A.  $0 < m < 2$       B.  $0 < m < 1$       C.  $1 < m < 2$       D.  $1 < m < 3$

## DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

**Câu 1:** Phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

A.  $y = x - 1$       B.  $y = -1$       C.  $y = 9x + 15$       D.  $y = 9x - 15$

**Câu 2:** Một phương trình tiếp tuyến của hs  $y = x^4 - 4x^2 + 2$  tại điểm có tung độ bằng 2 là:

A.  $y = 2$       B.  $y = 3x + 2$       C.  $y = 16x - 23$       D.  $y = x - 5$



**Câu 3:** Một phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  biết hệ số góc bằng -1 là

- A.  $y = -x - 1$       B.  $y = -x + 1$       C.  $y = 3x + 1$       D.  $y = 3x - 2$

**Câu 4:** Một phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = \frac{x+1}{x-2}$  biết tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = -3x + 5$

- A.  $y = -3x - 1$       B.  $y = -3x + 2$       C.  $y = -3x + 11$       D.  $y = -x - 2$

**Câu 5:** Giả sử  $\Delta$  là phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = \frac{x+2}{2x-1}$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$ . Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng

- A.  $m = -1$       B.  $m = 1$       C.  $m = 5$       D.  $m = -5$

**Câu 6:** Một phương trình tiếp tuyến của hàm số  $y = -x^3 + 3x - 3$  biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x + 5$

- A.  $y = 3x - 1$       B.  $y = 3x - 3$       C.  $y = -3x + 11$       D.  $y = -x - 2$

**Câu 7:** Cho đồ thị (C):  $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ  $x = 0$  cắt đồ thị (C) tại điểm N (khác M). Tìm tọa độ điểm N

- A.  $N(3;3)$       B.  $N(-1;-4)$       C.  $N(2;-1)$       D.  $N(1;0)$

**Câu 8:** Phương trình tiếp tuyến với đồ thị  $(C_1)$  của hàm số  $y = x^3 - 1$  tại giao điểm của đồ thị  $(C_1)$  với trục hoành có phương trình

- A.  $y = 3x - 1$       B.  $y = 3x - 3$       C.  $y = 0$       D.  $y = 3x - 4$

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = x \ln x + 1$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ  $x_0 = 2e$

- A.  $y = (2 + \ln 2)x - 2e - 1$       B.  $y = (2 + \ln 2)x + 2e + 1$   
C.  $y = -(2 + \ln 2)x - 2e + 1$       D.  $y = (2 + \ln 2)x - 2e + 1$

**Câu 10:** Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

- A. Song song với đường thẳng  $x = 1$       B. Song song với trục hoành

C. Có hệ số góc dương

D. Có hệ số góc bằng  $-1$

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3$  có đồ thị (C). Gọi  $M(x_0; y_0)$  và N là hai điểm thuộc (C) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Hệ số góc tiếp tuyến tại M và N là

A.  $\pm 3$

B.  $\pm 9$

C.  $-3$  và  $9$

D.  $6$  và  $12$

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 3x}{(x+1)^2}$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) song song với trục Ox.

A.  $y = 0$

B.  $y = -2$

C.  $y = \frac{9}{8}$

D.  $y = 1$

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$  có đồ thị (C). Giả sử M, N là hai điểm thuộc (C) có các hoành độ đều là nghiệm của phương trình  $y' = 0$ . Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, N.

A.  $d: y = 2(x-1)$

B.  $d: y = 2(x-1)$

C.  $y = x-1$

D.  $y = x+1$

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ  $x_0 = 1$

A.  $y = 3x - 3$

B.  $y = 3 - 3x$

C.  $y = 3x + 3$

D.  $y = 9x - 9$

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc là  $9$

A.  $y = 9x - 18$  hoặc  $y = 9x + 18$

B.  $y = 9x - 14$  hoặc  $y = 9x + 18$

C.  $y = 9x - 14$  hoặc  $y = 9x + 14$

D.  $y = 9x - 22$  hoặc  $y = 9x + 14$

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = \frac{3x+1}{1-x}$ . Viết phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng

$\Delta: y = x + 2018$

A.  $y = x + 2$  hoặc  $y = x - 8$

B.  $y = x$  hoặc  $y = x - 8$

C.  $y = x + 1$  hoặc  $y = x$

D.  $y = x + 1$  hoặc  $y = x - 9$

**Câu 17:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 6x$ . Viết phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x - 3y = 0$

A.  $y = -3x + 1$  hoặc  $y = -3x + 27$

B.  $y = -3x - 5$  hoặc  $y = -3x + 27$

C.  $y = -3x - 5$  hoặc  $y = -3x - 9$

D.  $y = -3x - 1$  hoặc  $y = -3x - 9$

**Câu 18:** Cho hàm số  $y = x^2 - 2(m+2)x + 3(m+8)$  có đồ thị (C). Tìm giá trị của m sao cho (C) tiếp xúc với trục hoành

A.  $m = 4 \vee m = -5$     B.  $m = 2 \vee m = -6$     C.  $m = 3 \vee m = -4$     D.  $m = 6 \vee m = -2$

**Câu 19:** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sao cho tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất

A.  $y = -2$

B.  $y = 3x - 3$

C.  $y = 3x + 3$

D.  $y = 3x - 1$

### CHUYÊN ĐỀ 6: PHÉP BIẾN HÌNH

**Câu 1:** Cho  $\vec{v}(-1;5)$  và  $M'(4;2)$ . Biết  $M'$  là ảnh của M qua phép tịnh tiến  $T_{\vec{v}}$ . Khi đó

A.  $M(3;7)$

B.  $M(5;-3)$

C.  $M(3;-7)$

D.  $M(-4;10)$

**Câu 2:** Trong mặt phẳng cho  $\vec{v}(-1;3)$  và  $M'(-2;5)$ . Biết  $T_{\vec{v}}(M) = M'$  khi đó

A.  $M'(-1;-2)$

B.  $M'(1;-2)$

C.  $M'(-3;8)$

D. Đáp án khác

**Câu 3:** Cho  $\vec{v}(3;3)$  và đường tròn (C):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ . Ảnh của (C) qua  $T_{\vec{v}}$  là

A.  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 9$

B.  $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4$

C.  $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 9$

D.  $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 4 = 0$

**Câu 4:** Hình gồm hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng ?

A. Một

B. Hai

C. Ba

D. Vô số

**Câu 5:** Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d cho trước thành chính nó

A. Có vô số phép

B. Không có phép nào

C. Có một phép duy nhất

D. Chỉ có hai phép

**Câu 6:** Câu nào sai đây là sai

A. Phép tịnh tiến là phép dời hình

B. Phép đối xứng trục là phép dời hình

C. Phép quay, phép đối xứng tâm là phép dời hình

**D.** Phép vị tự là phép dời hình

**Câu 7:** Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có bao nhiêu tâm đối xứng

- A.** Một                      **B.** Hai                      **C.** Không có                      **D.** Vô số

**Câu 8:** Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn cho trước thành chính nó ?

- A.** Một                      **B.** Không có                      **C.** Hai                      **D.** Vô số

**Câu 9:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy nếu phép tịnh tiến biến điểm  $A(3;2)$  thành điểm  $A'(2;3)$  thì nó biến điểm  $B(2,5)$  thành

- A.**  $B'(5;5)$                       **B.**  $B'(5;2)$                       **C.**  $B'(1;1)$                       **D.**  $B'(1;6)$

**Câu 10:** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm  $M(2;3)$ . Hỏi trong 4 điểm sau điểm nào là ảnh của  $M$  qua phép đối xứng qua trục  $Ox$

- A.**  $A(3;2)$                       **B.**  $D(-2;3)$                       **C.**  $B(2;-3)$                       **D.**  $C(3;-2)$

**Câu 11:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

- A.** Có phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó  
**B.** Phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó .  
**C.** Có phép đối xứng tâm có vô số điểm biến thành chính nó  
**D.** Phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó

**Câu 12:** Phép vị tự tâm  $I(-1;2)$  tỉ số 3 biến điểm  $A(4;1)$  thành điểm có toạ độ :

- A.**  $(16;1)$                       **B.**  $(14;1)$                       **C.**  $(6;5)$                       **D.**  $(14;-1)$

**Câu 13:** Cho  $\vec{v}(-4;2)$  và đường thẳng  $\Delta: 2x - y - 5 = 0$ . Hỏi ảnh của  $\Delta$  qua  $T_{\vec{v}}$  là

- A.**  $2x - y + 5 = 0$                       **B.**  $x - 2y - 9 = 0$                       **C.**  $2x + y - 15 = 0$                       **D.**  $2x - y - 15 = 0$

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(2;4)$ ,  $B(5;1)$ ,  $C(-1;-2)$ . Phép tịnh tiến biến  $\Delta ABC$  thành  $\Delta A'B'C'$ . Toạ độ trọng tâm của  $\Delta A'B'C'$  là

- A.**  $(-4;2)$                       **B.**  $(-4;-2)$                       **C.**  $(4;-2)$                       **D.**  $(4;2)$

**Câu 15:** Biết  $M'(-3;0)$  là ảnh của của  $M(1;-2)$  qua  $T_{\vec{u}}$ ,  $M''(2;3)$  là ảnh của  $M'$  qua  $T_{\vec{v}}$ . Toạ độ  $\vec{u} + \vec{v} = ?$

- A.**  $(3;-1)$                       **B.**  $(-1;3)$                       **C.**  $(-2;-2)$                       **D.**  $(1;5)$

**Câu 16:** Cho đường tròn tâm  $O$  và hai dây  $AB$  và  $CD$  song song với nhau. Phép đối xứng



**Câu 25:** Cho hình vuông ABCD tâm O . Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Phép dời hình nào sau đây biến  $\Delta AMO$  thành

- A. Phép tịnh tiến vectơ
- B. Phép đối xứng trục MP
- C. Phép quay tâm A góc quay
- D. Phép quay tâm O góc quay

**Đề chung cho câu 26, 27, 28**

Cho tam giác ABC đều, có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Trên đường thẳng BC lấy 2

điểm E và F sao cho  $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -2$  và  $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = 2$ . Gọi M là điểm di động trên cạnh BC và M' trên

cạnh AC sao cho  $BM = 2CM'$ .

**Câu 26:** Phép biến hình nào biến điểm M thành điểm M'?

- A. Phép dời hình
- B. Phép đồng dạng
- C. Phép vị tự
- D. Không phải ba đáp án trên

**Câu 27:** Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M'. Tâm của f nếu có là

- A. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- B. Giao điểm của cung lớn BAC và đường tròn, đường kính EF
- C. Giao điểm của cung nhỏ BC và đường tròn, đường kính EF
- D. Tâm là một điểm khác

**Câu 28:** Gọi O là phép quay đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tam giác ABC bất biến trong phép quay nào

- A.  $Q\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$
- B.  $Q\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$
- C.  $Q(0; \pi)$
- D. Đáp án khác

**Câu 29:** Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Phép biến hình nào biến tam giác ABF thành tam giác CBD

- A. Quay tâm O góc quay
- B. Quay tâm O góc quay
- C. Phép tịnh tiến theo vectơ
- D. Phép đối xứng qua đường thẳng BE

**Câu 30:** Chọn mệnh đề sai

- A. Phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính
- B. Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó
- C. Phép quay góc quay  $90^0$  biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó

nó

D. Phép quay góc quay  $90^\circ$  biến đường thẳng thành đường vuông góc với nó

**Câu 31:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- A. Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tùy ý có trục đối xứng
- B. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau có trục đối xứng
- C. Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tùy ý có trục đối xứng
- D. Hình gồm một tam giác cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó có trục đối xứng

**Câu 32:** Trong mặt phẳng, hình nào dưới đây có vô số tâm đối xứng

- A. Hình tròn
- B. Đường thẳng
- C. Hình đa giác lồi có số cạnh là lẻ
- D. Hình tam giác đều

**Câu 33:** Trong mặt phẳng, hình nào dưới đây có vô số trục đối xứng

- A. Hình tròn
- B. Hình vuông
- C. Hình đa giác lồi có số cạnh là lẻ
- D. Hình tam giác đều

**Câu 34:** Hình chữ nhật có bao nhiêu trục đối xứng

- A. Không có
- B. 4
- C. 1
- D. 2

**Câu 35:** Hình tam giác đều có bao nhiêu trục đối xứng

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. Không có

**Câu 36:** Hình tam giác đều có bao nhiêu tâm đối xứng

- A. 4
- B. 3
- C. vô số
- D. Không có

**Câu 37:** Hình tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau  $d$  và  $d'$ . Vậy hình đó có bao nhiêu tâm đối xứng ?

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. Vô số

**Câu 38:** Ảnh của đường thẳng  $d: -3x + 4y + 5 = 0$  qua phép đối xứng trục  $Ox$  là

- A.  $3x + 4y - 5 = 0$
- B.  $3x - 4y - 5 = 0$
- C.  $-3x + 4y - 5 = 0$
- D.  $x + 3y - 5 = 0$

**Câu 39:** Phép quay tâm  $O(0;0)$  góc quay  $90^\circ$  biến đường thẳng  $d: x - y + 1 = 0$  thành đường thẳng có phương trình là

- A.  $x + y - 3 = 0$
- B.  $x + y + 1 = 0$
- C.  $x - y + 3 = 0$
- D.  $x + y + 6 = 0$

**Câu 40:** Tìm mệnh đề sai: Phép dời hình biến

- A. Một đoạn thẳng thành đoạn thẳng, một tia thành một tia
- B. Một đường thẳng thành một đường thẳng song song với nó

- C. Một đường tròn thành một đường tròn có bán kính bằng bán kính đường tròn đã cho  
D. Một tam giác thành một tam giác bằng nó

**Câu 41:** Phép vị tự tỉ số  $k$  biến hình vuông thành

- A. Hình thoi                      B. Hình bình hành                      C. Hình vuông                      D. Hình chữ nhật

**Câu 42:** Trong mặt phẳng Oxy cho  $M(-2;4)$ . Toạ độ ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số  $k = -2$  là

- A.  $(-8;4)$                       B.  $(-4;-8)$                       C.  $(4;8)$                       D.  $(4;-8)$

**Câu 43:** Cho hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau và không bằng nhau. Xét các mệnh đề sau

I, Có hai phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

II, Tiếp điểm I là tâm vị tự của phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

III, Tỉ số vị tự là tỉ số hai bán kính

- A. Chỉ I và II                      B. Chỉ II và III                      C. Chỉ I và III                      D. Cả I,II,III

**Câu 44:** Trong mặt phẳng, nếu phép biến hình

- A. Là phép dời hình thì đó là phép đồng dạng  
B. Là phép đồng dạng thì đó là phép dời hình  
C. Không phải là phép dời hình thì đó là phép đồng dạng  
D. Không phải là phép đồng dạng thì đó là phép dời hình

**Câu 45:** Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(9;1)$ . Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$  biến A thành

- A.  $B(4;-6)$                       B.  $C(14;8)$                       C.  $D(13;7)$                       D.  $E(8;14)$

**Câu 46:** Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(5;-3)$ . Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}(5;7)$  là

- A.  $(0;-10)$                       B.  $(10;4)$                       C.  $(4;10)$                       D.  $(-10;0)$

**Câu 47:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn  $(x-8)^2 + (y-3)^2 = 7$ . Ảnh của đường tròn qua phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}(5;7)$  là

- A.  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 7$                       B.  $(x-13)^2 + (y-10)^2 = 7$   
C.  $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 7$                       D.  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 7$



**Câu 48:** Trong mặt phẳng Oxy cho  $\vec{v}(1;3)$ , phép tịnh tiến theo vectơ này biến đường thẳng  $d: 3x + 5y - 8 = 0$  thành đường thẳng

- A.  $3x + 2y = 0$       B.  $3x + 5y - 26 = 0$       C.  $3x + 5y - 9 = 0$       D.  $5x + 3y - 10 = 0$

**Câu 49:** Trong các phép tịnh tiến theo các vectơ sau phép tịnh tiến theo vectơ nào biến đường thẳng  $d: 9x - 7y + 10 = 0$  thành chính nó

- A.  $\vec{v}(7;9)$   
B.  $\vec{v}(-7;-9)$   
C. Không tồn tại vectơ thoả mãn yêu cầu  
D. A và B

**Câu 50:** Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn  $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 7$ . Ảnh của đường tròn qua phép quay tâm O góc  $90^\circ$  là

- A.  $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 7$       B.  $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 4$   
C.  $(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 7$       D.  $(x + 8)^2 + (y + 3)^2 = 7$

**Câu 51:** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm  $M(2;2)$ . Trong 4 điểm sau điểm nào là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc  $-45^\circ$

- A.  $(2\sqrt{2};0)$       B.  $(-2\sqrt{2};0)$       C.  $(0;2\sqrt{2})$       D.  $(0;-2\sqrt{2})$

**Câu 52:** Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm  $M(4;6)$  và  $I(2;3)$ . Hỏi phép vị tự tâm I tỉ số  $k = 2$  biến M thành điểm

- A.  $(6;9)$       B.  $(2;4)$       C.  $(3;2)$       D.  $(6;4)$

**Câu 53:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng  
B. Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số  $k = 1$   
C. Phép vị tự có tính chất bảo toàn khoảng cách  
D. Phép vị tự không là phép dời hình

**Câu 54:** Đồ thị hàm số  $y = \cos x$  có bao nhiêu trục đối xứng?

- A. Không có      B. 1      C. 2      D. Vô số

**Câu 55:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng

- A. Tam giác có trục đối xứng                      B. Tứ giác có trục đối xứng  
C. Hình thang có trục đối xứng                      D. Hình thang cân có trục đối xứng

**Câu 56:** Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục song song là phép

- A. Phép đối xứng trục                      B. Phép đối xứng tâm  
C. Phép quay                      D. Phép tịnh tiến

**Câu 57:** Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục cắt nhau là phép

- A. Phép đối xứng trục                      B. Phép quay  
C. Phép tịnh tiến                      D. Phép đồng nhất

**Câu 58:** Cho A(-3;7). Điểm A' đối xứng với A qua O (0;0) có tọa độ là

- A. (-6;14)                      B. (3;-7)                      C. (3;7)                      D. (-3;-7)

**Câu 59:** Cho A (-3;7). Điểm A' đối xứng với A qua I (4;1) có tọa độ là

- A. (11;-5)                      B. (11;-7)                      C. (13;-5)                      D. (9;-5)

**Câu 60:** Cho A (-3;7). Điểm A' đối xứng với A qua trục hoành có tọa độ là

- A. (3;7)                      B. (-3;-8)                      C. (3;-7)                      D. (-3;-7)

**Câu 61:** Cho A (-3;7). Điểm A' đối xứng với A qua trục tung có tọa độ là

- A. (-3;-7)                      B. (3;7)                      C. (3;6)                      D. (3;5)

**Câu 62:** Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB,

BC, CA. Khi đó phép tịnh tiến theo vector  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BC}$  biến

- A. N thành B                      B. N thành M                      C. N thành P                      D. N thành A

## CHUYÊN ĐỀ 7: QUAN HỆ SONG SONG

### I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất :

- A. Ba điểm                      B. Một điểm và một đường thẳng  
C. Hai đường thẳng cắt nhau                      D. Bốn điểm

**Câu 2:** Xét các mệnh đề sau:

1. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

2. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

3. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung

Mệnh đề nào đúng ?

A. 1 và 2 đúng

B. 1 và 3 đúng

C. Chỉ 3 đúng

D. Cả 1,2 và 3 đều đúng

**Câu 3:** Mệnh đề nào sau đây đúng

A. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì cả ba đường thẳng đó đồng phẳng

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng

D. Cả B và C đúng

**Câu 4:** Cho các giả thiết sau, giả thiết nào sau đây kết luận đường thẳng  $d_1 // (P)$

A.  $d_1 // d_2$  và  $d_2 // (P)$

B.  $d_1 \cap (P) = \emptyset$

C.  $d_1 // d_2$  và  $d_2 \subset (P)$

D.  $d_1 // (Q)$  và  $(Q) // (P)$

**Câu 5:** Trong không gian cho 4 điểm không đồng phẳng, có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

**Câu 6:** Cho hình chóp S.ABCD với đáy là tứ giác lồi có các cạnh đối không song song. AC cắt BD tại O, AD cắt BC tại I. khi đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là

A. SI

B. SB

C. SC

D. SO

**Câu 7:** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm AB, AD. Giao tuyến của (CDI) và (BCK) là

A. PR

B. CR

C. CP

D. CQ

**Câu 8:** Cho tứ diện ABCD. Điểm M nằm trên đoạn AC. (P) qua M và song song với AB. Thiết diện của (P) với tứ diện là

A. Hình thang

B. Hình bình hành

C. Hình chữ nhật

D. Hình vuông

---

**Câu 9:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, M là trung điểm SC. Gọi N là giao điểm của đường thẳng AM và (SBD). Khi đó, tỉ số  $\frac{AN}{MN}$  là

- A. 2                      B.  $\frac{3}{2}$                       C. 1                      D.  $\frac{2}{3}$

**Câu 10:** Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây **sai**:

- A. Nếu đường thẳng  $a \subset (Q)$  thì  $a // (P)$   
B. Mọi đường thẳng đi qua điểm  $A \in (P)$  và song song với (Q) đều nằm trong (P).  
C.  $d \subset (P)$  và  $d' \subset (Q)$  thì  $d // d'$   
D. Nếu đường thẳng  $\Delta$  cắt (P) thì  $\Delta$  cũng cắt (Q).

**Câu 11:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**:

- A. Hai mp phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.  
B. Hai mp phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau  
C. Nếu một đường thẳng song song với một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mặt phẳng còn lại.  
D. Nếu một đường thẳng nằm trên một trong hai mặt phẳng song song thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng còn lại.

**Câu 12:** Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng. Mệnh đề nào sau đây **đúng**:

- A. Nếu  $A \notin (d)$  thì  $A \notin (P)$   
B. Nếu  $A \in (P)$  thì  $A \in (d)$   
C.  $\forall A \in (d) \Rightarrow A \in (P)$   
D. Nếu 3 điểm và A, B, C thẳng hàng thì  $A, B, C \in (d)$

**Câu 13:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**:

- A. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.  
B. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.  
C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.  
D. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

**Câu 14:** Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khi đó giao tuyến của mp (MBC) và mp (NDA) là:

- A. AD                      B. BC                      C. AC                      D. MN

**Câu 15:** Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N bất kì khác B, C. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P) là

- A. Một đoạn thẳng                      B. Một hình thang  
C. Một hình bình hành                      D. Một hình chữ nhật

**Câu 16:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC. Điểm E thuộc cạnh AD, điểm P thuộc cạnh BD sao cho  $\frac{DE}{DA} = \frac{DP}{DB} = \frac{1}{3}$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**

- A.  $\overrightarrow{EP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$                       B. M, N, E, P đồng phẳng  
C. ME // NP                      D. MNPE là hình thang

**Câu 17:** Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của cạnh BC, B'C'. Mệnh đề nào sau đây đúng:

- A. AI // A'I'                      B. AA'I'I' là hình chữ nhật  
C. AC' cắt A'I                      D. AI' cắt AB'.

**Câu 18:** Cho hình chóp S.ABCD. Mp (P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi  $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$ ,  $\Delta' = (SAD) \cap (SBC)$ . Nếu (P) //  $\Delta$  hoặc (P) //  $\Delta'$  thì A'B'C'D' là

- A. Hình thang                      B. Hình bình hành  
C. Hình chữ nhật                      D. Hình vuông

**Câu 19:** Cho hình chóp S.ABC có AB = AC, SB = SC. H, K lần lượt là trực tâm tam giác ABC và tam giác SBC, G và F lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác SBC. Xét các mệnh đề sau:

- (1) AH, SK và BC đồng qui
- (2) AG, SF cắt nhau tại một điểm trên BC.
- (3) HF và GK chéo nhau.
- (4) SH và AK cắt nhau.

---

Mệnh đề **sai** là:

- A. (1)                      B. (2)                      C. (3)                      D. (4)

**Câu 20:** Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy P sao cho  $BP = 2 PD$ . Khi đó giao điểm của đường thẳng CD với mp(MNP) là:

- A. Giao điểm của NP và CD                      B. Giao điểm của MN và CD  
C. Giao điểm của MP và CD                      D. Trung điểm của CD.

## II. TỰ LUẬN

**Bài 1.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và BCD.

- Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng ABD và ACD.
- Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng qua MN và song song với BD.

**Bài 2.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SCD.

- Chứng minh rằng MN song song với mp(SAC).
- Xác định thiết diện tạo bởi mp(BMN) với hình chóp.

**Bài 3.** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và ABEF; M và N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ABE.

- Chứng minh rằng  $OO'$  song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).
- Chứng minh rằng MN song song với mp(CEF).
- Gọi P là điểm trên cạnh AC và Q là điểm trên cạnh BF. Tìm vị trí của các điểm P và Q sao cho PQ song song với mp(CEF).

**Bài 4.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trọng tâm của tam giác ABC và N là một điểm trên cạnh AD sao cho  $AN = 2ND$ . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng BCD.

**Bài 5.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho  $MB = 2MA$  và N là điểm trên cạnh CD sao cho  $MB = 2MA$  và N là một điểm thuộc cạnh CD (N không trùng với C và D).

- Xác định thiết diện của mp(P) với tứ diện.
- Tìm vị trí điểm N trên cạnh CD sao cho thiết diện trên là hình bình hành.

---

**Bài 6.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho  $MB = 2MA$ . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với các đường thẳng BC và AD. Xác định thiết diện tạo bởi mp(P) với tứ diện. Thiết diện trên là hình gì?

**Bài 7.** Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh AB (M không trùng với A và B) và N là một điểm trên cạnh CD (không trùng với C và D) sao cho  $\frac{MA}{AB} + \frac{CN}{CD} = 1$ . Gọi (P) là mặt phẳng chứa MN và song song với BC.

- Xác định thiết diện tạo bởi mp(P) với tứ diện.
- Chứng minh rằng mp(P) // AD

**Bài 8.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC (không trùng với S và C). Gọi (P) là mặt phẳng qua AM và song song với đường thẳng BD.

- Xác định thiết diện tạo bởi mp(P) với hình chóp. Tìm vị trí của điểm M sao cho thiết diện đi qua trọng tâm của tam giác SBD.
- Gọi E và F lần lượt là giao điểm của mp(P) với các cạnh SB và SD. Gọi I là giao điểm của EF và AM.

Chứng minh rằng I là trung điểm của EF và tìm quỹ tích của điểm I khi M di chuyển trên cạnh SC (M không trùng với S và C).

**Bài 9.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SA (M không trùng với S và A) và N là điểm trên cạnh SC (N không trùng với S và C). Gọi (P) là mặt phẳng qua MN và song song với BD.

- Xác định thiết diện tạo bởi mp(P) với hình chóp.
- Tìm vị trí của M và N sao cho thiết diện trên là hình bình hành.

**Bài 10.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho  $MS = 2MB$ . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua AM và song song với BD.

- Xác định thiết diện tạo bởi mp(P) với hình chóp.
- Chứng minh rằng giao điểm của (P) với SC là trung điểm của SC.

**Bài 11.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi có các cặp cạnh đối nằm trên các đường thẳng cắt nhau. Một mp(P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm A', B', C', D'. Gọi I là giao điểm của AC và BD.

- Chứng minh rằng các đường thẳng A'C', B'D' và SI đồng quy tại một điểm.

- b) Tìm điều kiện của mp(P) để tứ giác A'B'C'D' là hình thang.  
 c) Tìm điều kiện của mp(P) để tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

**Bài 12.** Cho tứ diện ABCD. Gọi E là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với các đường thẳng BC và AD và cắt các cạnh AB, AC, BD, CD lần lượt tại M, N, P, Q.

Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành

### Đáp án

1-1	2-C	3-B	4-B	5-C	6-D	7-D	8-A	9-A	10-C
11-B	12-C	13-D	14-D	15-B	16-B	17-A	18-A	19-D	20-A

## CHUYÊN ĐỀ 8: QUAN HỆ VUÔNG GÓC

### I. TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.**  $BC \perp (SAB)$       **B.**  $BC \perp (SAM)$       **C.**  $BC \perp (SAC)$       **D.**  $BC \perp (SAJ)$

**Câu 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng

- A.**  $(SCD) \perp (SAD)$       **B.**  $(SBC) \perp (SIA)$       **C.**  $(SDC) \perp (SAI)$       **D.**  $(SBD) \perp (SAC)$

**Câu 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp là

- A.** trung điểm SB  
**B.** Điểm nằm trên đường thẳng  $d // SA$  và không thuộc SC  
**C.** trung điểm SC.  
**D.** trung điểm SD

**Câu 4:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) là:

- A.** góc SBA      **B.** góc SJA      **C.** góc SCA      **D.** góc SMA

**Câu 5:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy, H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng ?



- A.  $(SIC) \perp (SCD)$     B.  $(SCD) \perp (AKC)$     C.  $(SAC) \perp (SBD)$     D.  $(AHB) \perp (SCD)$

**Câu 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(SBC) \perp (SIA)$     B.  $(SBC) \perp (SAC)$     C.  $(SDC) \perp (SAI)$     D.  $(SCD) \perp (SAD)$

**Câu 7:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(SBC) \perp (SAB)$     B.  $(BIH) \perp (SBC)$     C.  $(SAC) \perp (SAB)$     D.  $(SAC) \perp (SBC)$

**Câu 8:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC. Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp là

- A. Điểm nằm trên đường thẳng  $d // SA$ ,  $d$  đi qua M là trung điểm BI  
B. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình chóp  
C. trung điểm SC  
D. trung điểm SB

**Câu 9:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Ký hiệu  $d(A, (SCD))$  là khoảng cách giữa điểm A và mặt phẳng (SCD). Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $d(A, (SCD)) = AC$     B.  $d(A, (SCD)) = AK$     C.  $d(A, (SCD)) = AH$     D.  $d(A, (SCD)) = AD$

**Câu 10:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(SAC) \perp (SAB)$     B.  $(BIH) \perp (SBC)$     C.  $(SAC) \perp (SBC)$     D.  $(SBC) \perp (SAB)$

**Câu 11:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $BC \perp (SAB)$     B.  $BC \perp (SAJ)$     C.  $BC \perp (SAC)$     D.  $BC \perp (SAM)$

**Câu 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy, H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $AK \perp (SCD)$     B.  $BC \perp (SAC)$     C.  $AH \perp (SCD)$     D.  $BD \perp (SAC)$

---

**Câu 13:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông. Điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ là

- A. Giao điểm của  $A'B$  và  $ABC'$
- B. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ
- C. Giao điểm của  $A'D$  và  $AD'$
- D. Giao điểm của  $A'C$  và  $AC'$

**Câu 14:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $BD = 2AC$ . Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp là

- A. trung điểm  $SC$
- B. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình chóp
- C. Điểm nằm trên đường thẳng  $d // SA$
- D. trung điểm  $SD$

**Câu 15:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $I$  là trung điểm  $AC$ ,  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $SC$ . Ký hiệu  $d(a, b)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $a$  và  $b$ . Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(SA, BC) = AB$     B.  $d(BI, SC) = IH$     C.  $d(SA, AC) = IH$     D.  $d(SB, AC) = BI$

**Câu 16:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $J$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $BC \perp (SAJ)$     B.  $BC \perp (SAB)$     C.  $BC \perp (SAC)$     D.  $BC \perp (SAM)$

**Câu 17:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $J$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$ . Ký hiệu  $d(A, (SBC))$  là khoảng cách giữa điểm  $A$  và mặt phẳng  $(SBC)$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $d(A, (SBC)) = AK$  với  $K$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SC$
- B.  $d(A, (SBC)) = AK$  với  $K$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SM$
- C.  $d(A, (SBC)) = AK$  với  $K$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SB$
- D.  $d(A, (SBC)) = AK$  với  $K$  là hình chiếu của  $A$  lên  $SJ$

**Câu 18:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(AB'C) \perp (BA'C')$    B.  $(AB'C) \perp (B'BD)$    C.  $(AB'C) \perp (D'AB)$    D.  $(AB'C) \perp (D'BC)$

**Câu 19:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$ ,  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  là trung điểm  $AC$ ,  $(SMC) \perp (ABC)$ ,  $(SBN) \perp (ABC)$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(SIN) \perp (SMC)$    B.  $(SAC) \perp (SBN)$    C.  $(SIM) \perp (SBN)$    D.  $(SMN) \perp (SAI)$

**Câu 20:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông. Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $A'C \perp (B'BD)$    B.  $A'C \perp (B'C'D)$    C.  $AC \perp (B'BD)$    D.  $AC \perp (B'CD')$

**Câu 21:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy.  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SC, SD$ . Kí hiệu  $d(a, b)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $a$  và  $b$ . Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(AB, SC) = BS$    B.  $d(AB, SC) = AK$    C.  $d(AB, SC) = AH$    D.  $d(AB, SC) = BC$

**Câu 22:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều.  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AC$  và  $A'C'$ .  $G, G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và tam giác  $A'B'C'$ . Điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ là

- A. trung điểm  $MN$   
B. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ  
C. trung điểm  $GG'$   
D. trung điểm  $CC'$

**Câu 23:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $I$  là trung điểm  $AC$ ,  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên  $SC$ . Góc giữa 2 mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(SAC)$  là:

- A. góc  $ASB$    B. góc  $IHB$    C. góc  $AHB$    D. góc  $ACB$

**Câu 24:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ ,  $(SAB) \perp (ABC)$ ,  $SA = SB$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Khẳng định nào sau đây sai ?

- A.  $SI \perp (ABC)$       B.  $IC \perp (SAB)$       C.  $SAC = SBC$       D.  $SA \perp (ABC)$

**Câu 25:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $C$ ,  $(SAB) \perp (ABC)$ ,  $SA = SB$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp nằm trên đường thẳng nào sau đây

- A. đường thẳng  $SI$   
B. đường thẳng  $d // SI$ ,  $d$  đi qua  $M$  là trung điểm  $BC$   
C. đường thẳng  $SC$   
D. đường thẳng  $d // SI$ ,  $d$  đi qua  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$

**Câu 26:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $B$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $J$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$ . Góc giữa 2 mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  là:

- A. góc  $SBA$       B. góc  $SIA$       C. góc  $SMA$       D. góc  $SCA$

**Câu 27:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Kí hiệu  $d(AA', BC)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $AA'$  và  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(AA', BC) = AB$     B.  $d(AA', BC) = IC$     C.  $d(AA', BC) = A'B$     D.  $d(AA', BC) = AC$

**Câu 28:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(ABC) \perp (B'AC)$     B.  $(A'CI) \perp (A'AB)$     C.  $(A'BC) \perp (A'AB)$     D.  $(A'BC) \perp (A'AC)$

**Câu 29:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Góc giữa 2 mặt phẳng  $(SBD)$  và  $(ABC)$  là:

- A. góc  $SIA$       B. góc  $SBA$       C. góc  $SIC$       D. góc  $SDA$

**Câu 30:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$ ,  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  là trung điểm  $AC$ ,  $(SMC) \perp (ABC)$ ,  $(SBN) \perp (ABC)$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $SI \perp (ABC)$       B.  $SG \perp (ABC)$       C.  $IA \perp (SBC)$       D.  $SA \perp (ABC)$

**Câu 31:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều có trọng tâm G, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, dựng hình chữ nhật SAGN. Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp là

- A. trung điểm SC
- B. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình chóp
- C. trung điểm SB
- D. trung điểm GN

**Câu 32:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Ký hiệu  $d(A, (SBC))$  là khoảng cách giữa điểm A và mặt phẳng (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(A, (SBC)) = AK$  với K là hình chiếu của A lên SC
- B.  $d(A, (SBC)) = AK$  với K là hình chiếu của A lên SJ
- C.  $d(A, (SBC)) = AK$  với K là hình chiếu của A lên SB
- D.  $d(A, (SBC)) = AK$  với K là hình chiếu của A lên SM

**Câu 33:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A,  $(SAB) \perp (ABC)$ ,  $SA = SB$ , I là trung điểm AB. Khẳng định nào sau đây sai

- A.  $IC \perp (SAB)$
- B.  $SI \perp (ABC)$
- C.  $AC \perp (SAB)$
- D.  $AC \perp (SAC)$

**Câu 34:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, M là trung điểm BC, H là hình chiếu của I lên SC. Ký hiệu  $d(a, b)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $d(BI, SC) = IH$
- B.  $d(SA, BC) = AB$
- C.  $d(SA, BC) = AM$
- D.  $d(SB, AC) = BI$

**Câu 35:** Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B. M, N lần lượt là trung điểm AC và A'C'. G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và tam giác A'B'C'. Điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ là

- A. trung điểm MN
- B. trung điểm GG'
- C. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình lăng trụ

**D.** trung điểm  $CC'$

**Câu 36:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SI, SD$ . Kí hiệu  $d(A, (SBD))$  là khoảng cách giữa điểm  $A$  và mặt phẳng  $(SBD)$ . Khẳng định nào sau đây đúng

**A.**  $d(A, (SBD)) = AH$  **B.**  $d(A, (SBD)) = AI$  **C.**  $d(A, (SBD)) = AK$  **D.**  $d(A, (SBD)) = AD$

**Câu 37:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Kí hiệu  $d(AB, B'C')$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $AB$  và  $B'C'$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.**  $d(AB, B'C') = AB'$  **B.**  $d(AB, B'C') = BC'$  **C.**  $d(AB, B'C') = AA'$  **D.**  $d(AB, B'C') = AC'$

**Câu 38:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy.  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SC, SD$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.**  $BD \perp (SAC)$  **B.**  $AK \perp (SCD)$  **C.**  $BC \perp (SAC)$  **D.**  $AH \perp (SCD)$

**Câu 39:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy.  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SC, SD$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.**  $(SAC) \perp (SCD)$  **B.**  $(SAC) \perp (SBD)$  **C.**  $(SAC) \perp (SBC)$  **D.**  $(SCD) \perp (AKC)$

**Câu 40:** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.**  $(A'IC) \perp (A'AB)$  **B.**  $(ABC) \perp (B'AC)$  **C.**  $(A'BC) \perp (A'AB)$  **D.**  $(A'BC) \perp (A'AC)$

**Câu 41:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ ,  $(SAB) \perp (ABC)$ ,  $SA = SB$ ,  $I$  là trung điểm  $AB$ . Góc giữa đường thẳng  $SC$  và mặt phẳng  $(ABC)$  là:

**A.** góc  $SCI$  **B.** góc  $SCA$  **C.** góc  $ISC$  **D.** góc  $SCB$

**Câu 42:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$ ,  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  là trung điểm  $AC$ ,  $(SMC) \perp (ABC)$ ,  $(SBN) \perp (ABC)$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng ?

**A.**  $AB \perp (SMC)$  **B.**  $IA \perp (SBC)$  **C.**  $BC \perp (SAI)$  **D.**  $AC \perp (SBN)$

**Câu 43:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, dựng hình chữ nhật SAMN. Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp là

- A. trung điểm SC
- B. không tồn tại điểm cách đều các đỉnh của hình chóp
- C. trung điểm SB
- D. trung điểm MN

**Câu 44:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Kí hiệu  $d(a, b)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(SA, BC) = AB$
- B.  $d(SB, AC) = IH$
- C.  $d(BI, SC) = AB$
- D.  $d(SB, AC) = BI$

**Câu 45:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A.  $(BIH) \perp (SBC)$
- B.  $(SAC) \perp (SAB)$
- C.  $(SBC) \perp (SAB)$
- D.  $(SAC) \perp (SBC)$

**Câu 46:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{7}$
- B.  $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
- C.  $3a$
- D.  $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

**Câu 47:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD.  $KN \parallel CD$ , N thuộc SC. Góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SAD) là:

- A. góc AKN
- B. góc AKH
- C. góc ADC
- D. góc ASC

**Câu 48:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm AB, N là trung điểm AC,  $SB = AB$ ,  $(SMC) \perp (ABC)$ ,  $(SBN) \perp (ABC)$ , G là trọng tâm tam giác ABC, I, K lần lượt là trung điểm BC, SA. Kí hiệu  $d(a, b)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng a và b. Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(SA, BC) = IA$
- B.  $d(SA, MI) = IK$
- C.  $d(SA, BC) = IK$
- D.  $d(SA, BC) = IS$

**Câu 49:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, SA = SB, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng  $45^\circ$ . Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABCD) được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$       C.  $\frac{a}{2}$       D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 50:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$       D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 51:** Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng  $60^\circ$ . Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') được kết quả

- A.  $\frac{3a}{2}$       B.  $\frac{a}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}a}{2}$       D.  $\frac{5a}{2}$

**Câu 52:** Cho lăng trụ ABCD.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> có đáy ABCD là hình chữ nhật. AB = a, AD =  $a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của điểm A<sub>1</sub> trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (A<sub>1</sub>BD) và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm B<sub>1</sub> đến mặt phẳng (A<sub>1</sub>BD) theo a được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{a}{2}$       D.  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

**Câu 53:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy,  $\angle BAD = 120^\circ$ , M là trung điểm cạnh BC và  $\angle SMA = 45^\circ$ . Tính theo a khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$       B.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$       C.  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

**Câu 54:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều, (SAB)  $\perp$  (ABC), SA = SB, I là trung điểm AB. Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp thuộc đường thẳng nào



- A. đường thẳng  $d // SI$ ,  $d$  đi qua  $M$  là trung điểm  $BC$
- B. đường thẳng  $d // SI$ ,  $d$  đi qua  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$
- C. đường thẳng  $SB$
- D. đường thẳng  $SC$

**Câu 55:** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $AA' = 2a$  và đường thẳng  $AA'$  tạo với mặt phẳng  $(ABC)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  khoảng cách từ  $D$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  được kết quả

- A.  $\sqrt{2}$
- B.  $3a$
- C.  $a\sqrt{3}$
- D.  $a\sqrt{5}$

**Câu 56:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $C$ ,  $(SAB) \perp (ABC)$ ,  $SA = SB$ ,  $I$  là trung điểm  $SC$ ,  $K$  là trung điểm  $SI$ . Góc giữa 2 mặt phẳng  $(SAC)$  và  $(SBC)$  là:

- A. góc  $ASB$
- B. góc  $AKB$
- C. góc  $ACB$
- D. góc  $AIB$

**Câu 57:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng  $30^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $SC$ . Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(SAB)$  theo  $a$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}a$
- B.  $\frac{1}{4}a$
- C.  $a$
- D.  $\frac{1}{2}a$

**Câu 58:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a\sqrt{2}$ ;  $SA = SB = SC$ . Góc giữa đường thẳng  $SA$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  khoảng cách từ điểm  $S$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$
- B.  $a\sqrt{2}$
- C.  $a\sqrt{3}$
- D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 59:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi tâm  $I$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  lên  $SI, SD$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, AD$ . Kí hiệu  $d(MN, SI)$  là khoảng cách giữa 2 đường thẳng  $MN$  và  $SI$ . Khẳng định nào sau đây đúng

- A.  $d(MN, SI) = \frac{1}{2}AK$
- B.  $d(MN, SI) = \frac{1}{2}AI$
- C.  $d(MN, SI) = \frac{1}{2}AB$
- D.  $d(MN, SI) = \frac{1}{2}AH$

**Câu 60:** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A,  $(SAB) \perp (ABC)$ ,  $SA = SB$ , I là trung điểm AB. Điểm cách đều các đỉnh của hình chóp thuộc đường thẳng nào

- A. đường thẳng  $d // SI$ , d đi qua G là trọng tâm tam giác ABC
- B. đường thẳng SB
- C. đường thẳng  $d // SI$ , d đi qua M là trung điểm BC
- D. đường thẳng SC

### DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH

**Câu 1:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = 2a$ . Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC).

- A.  $\frac{a}{2}$
- B.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$
- C.  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$
- D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

**Câu 2:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{6}$ . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

- A.  $\frac{a\sqrt{78}}{13}$
- B.  $\frac{a\sqrt{78}}{12}$
- C.  $\frac{a\sqrt{78}}{10}$
- D.  $\frac{a\sqrt{78}}{15}$

**Câu 3:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) được kết quả

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{7}$
- B.  $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
- C. 3a
- D.  $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

**Câu 4:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, cạnh bằng a. Cho biết hai mặt bên (SAB), (SAD) cùng vuông góc với đáy (ABCD) và  $SA = a\sqrt{2}$ . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng:

- A.  $\frac{a\sqrt{10}}{5}$
- B.  $\frac{a\sqrt{5}}{5}$
- C.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$
- D.  $\frac{a\sqrt{10}}{15}$

**Câu 5:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật  $SA \perp (ABCD)$ . Cho  $AC = 5a$ ,  $AB = 4a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

A.  $\frac{3a}{4}$                       B.  $\frac{2a}{3}$                       C.  $\frac{a}{2}$                       D.  $\frac{3a}{2}$

**Câu 6:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBN).

A.  $\frac{a\sqrt{33}}{33}$                       B.  $\frac{2a\sqrt{33}}{33}$                       C.  $\frac{4a\sqrt{33}}{33}$                       D.  $\frac{a\sqrt{33}}{11}$

**Câu 7:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật.  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $BC = a$ ,  $SB = a\sqrt{2}$ ,  $SB \perp (ABCD)$ . Gọi H, K là hình chiếu của B trên SA, SC. Tính khoảng cách từ H đến mp(SBD).

A.  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$                       B.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$                       C.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$                       D.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

**Câu 8:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{3}$ ,  $SD = a\sqrt{7}$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MND).

A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$                       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 9:** Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và  $SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau AB và SD

A.  $\frac{a}{3}$                       B.  $\frac{a}{5}$                       C.  $\frac{a}{4}$                       D.  $\frac{a}{2}$

**Câu 10:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD),  $SA = a\sqrt{3}$ . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A.  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$                       B.  $\frac{a\sqrt{21}}{3}$                       C.  $\frac{a\sqrt{21}}{21}$                       D.  $\frac{a\sqrt{21}}{2}$

**Câu 11:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O,  $SA = a$  và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD là

A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$                       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$                       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 12:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a tâm O, SA = a và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{3}$       D. a

**Câu 13:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB = a, AD =  $a\sqrt{3}$ , SD =  $a\sqrt{7}$  và  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (MND).

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 14:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, SA =  $a\sqrt{3}$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC).

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$       D.  $a\sqrt{3}$

**Câu 15:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi. Biết rằng tứ diện SABD là tứ diện đều cạnh a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC là

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 16:** Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = 2a, SA  $\perp$  (ABCD) và SA = a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$       B.  $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Câu 17:** Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = 2a, SA  $\perp$  (ABCD) và SA = a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là

- A.  $\frac{a\sqrt{2}}{6}$       B.  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{9}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Câu 18:** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA =  $a\sqrt{3}$  và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tìm khoảng cách từ điểm A đến (SBD).

- A.  $\frac{a\sqrt{21}}{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{21}}{21}$       C.  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$       D.  $\frac{a}{7}$