

CHUYÊN ĐỀ 1: LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình lượng giác cơ bản

1, $\text{Cos}x = \text{Cos}\alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Đặc biệt:

❖ $\text{Cos}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

❖ $\text{Cos}x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

❖ $\text{Cos}x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

2, $\text{Sin}x = \text{Sin}\alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Đặc biệt:

❖ $\text{Sin}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

❖ $\text{Sin}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

❖ $\text{Sin}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

2. Công thức lượng giác cơ bản

1. $\text{Sin}^2x + \text{Cos}^2x = 1$

2. $\frac{1}{\text{Cos}^2x} = 1 + \text{Tan}^2x$

3. $\frac{1}{\text{Sin}^2x} = 1 + \text{Cotg}^2x$

4. $\text{Cotgx} \cdot \text{tan}x = 1$

5. $\text{Sin}^2x = (1 - \text{Cos}x)(1 + \text{Cos}x)$

6. $\frac{1}{\text{Cos}^2x} = 1 + \text{Tan}^2x$

7. $\text{Sin}(a \pm b) = \text{Sin}a\text{Cos}b \pm \text{Cos}a\text{Sin}b$

8. $\text{Cos}(a + b) = \text{Cos}a\text{Cos}b \mp \text{Sin}a\text{Sin}b$

3, $\text{Tan}x = \text{Tan}\alpha$

$$\Leftrightarrow x = -\alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Đặc biệt:

❖ $\text{Tan}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

❖ **Tanx không xác định khi** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
($\text{Cos}x = 0$)

4, $\text{Cotgx} = \text{Cotg}\alpha$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Đặc biệt:

❖ $\text{Cotgx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

❖ **Cotgx không xác định khi:**
 $x = k\pi (\text{Sin}x = 0)$

13. $\text{Sin}^2x = \frac{\text{Tan}^2x}{1 + \text{Tan}^2x}$

14. $\text{Tan}^2x = \frac{1 - \text{Cos}2x}{1 + \text{Cos}2x}$

❖ $\text{Cos}x\text{Cos}y =$

$$\frac{1}{2} [\text{Cos}(x+y) + \text{Cos}(x-y)]$$

❖ $\text{Sin}x\text{Cos}y = \frac{1}{2} [\text{Sin}(x+y) + \text{Sin}(x-y)]$

❖ $\text{Sin}x\text{Sin}y = -\frac{1}{2} [\text{Cos}(x+y) - \text{Cos}(x-y)]$

$$9. \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$10. \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$11. \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

$$12. \sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\diamond \sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\diamond \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\diamond \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\diamond \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

3. Cách giải một số phương trình lượng giác thường gặp

a) Phương trình bậc 2 đối với một hàm số lượng giác

Dạng $at^2 + bt + c = 0$ (với $t =$ một trong 4 hàm $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$)

Giải phương trình bậc 2 tìm t thuộc $[-1; 1]$

b) Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng $a\sin x + b\cos x = c$

- Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ thì phương trình vô nghiệm

- Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ thì chia cả 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

Biến đổi phương trình về $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ với α là góc có $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

c) Phương trình đẳng cấp bậc 2

Dạng $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x + d = 0$

TH1: $\cos x = 0$ thay vào pt xem có thỏa mãn không

TH2: $\cos x \neq 0 \leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Chia cả 2 vế cho $\cos^2 x$ đưa phương trình về theo $\tan x$ rồi giải tiếp.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

I. TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{x}{x+1}$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ B. $D = (-1; +\infty)$ C. $D = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ D. $D = \mathbb{R}$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = \cos \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ là:

- A. $D = [-1; 0)$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ C. $D = (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$ D. $D = (0; +\infty)$

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\cos x - 1} + 1 - \cos^2 x$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$ B. $D = \{0\}$ C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{R}\}$ D. $D = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{R}\}$

Câu 4: Tập $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$ là tập xác định của hàm số nào sau đây?

- A. $y = \tan x$ B. $y = \cot x$ C. $y = \cot 2x$ D. $y = \tan 2x$

Câu 5: Tập xác định của hàm số $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$ B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$ D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

Câu 6: Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Câu khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số luôn đồng biến,
B. Trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ hàm số đồng biến và trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số nghịch biến
C. Trên khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ hàm số nghịch biến và trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số đồng biến.
D. Trên các khoảng $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số luôn nghịch biến.

Câu 9: Xét hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Câu khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số luôn đồng biến.
- B. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số đồng biến và trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số nghịch biến.
- C. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ hàm số nghịch biến và trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số đồng biến.
- D. Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hàm số luôn nghịch biến.

Câu 10: Chọn khẳng định **sai** về tính chẵn lẻ của hàm số trong các khẳng định sau.

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
 C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ

Câu 11: Trong các hàm số sau đâu là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$ B. $y = 3\sin x + 1$ C. $y = \sin x + \cos x$ D. $y = \cos 2x$

Câu 12: Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ:

- A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

Câu 13: Hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kỳ:

- A. 2π B. $\frac{\pi}{3}$ C. 6π D. 3π

Câu 14: Hàm số tuần hoàn với chu kỳ:

- A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. 4π

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là:

- A. $x = k\pi$ B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ C. $x = k2\pi$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Câu 2: Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ C. $x = k\pi$ D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

Câu 4: Nghiệm của phương trình $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$ B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Câu 5: Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \cos x$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 C. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ D. $x = k\pi; x = k\frac{\pi}{2}$

Câu 6: Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

- A. $x = 0$ B. $x = \pi$ C. $x = \frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{2}$

Câu 7: Nghiệm của phương trình $2\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$ B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 C. $x = k\pi; x = \pi + k2\pi$ D. $x = k2\pi; x = k\frac{\pi}{2}$

Câu 8: Nghiệm của phương trình $\cos x + \sin x = 1$ là:

- A. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ B. $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
 C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = k2\pi$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = k\pi$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0$ là:

- A. $x = k\pi$ B. $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$ C. $x = k \cdot \frac{\pi}{8}$ D. $x = k \cdot \frac{\pi}{4}$

DẠNG 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là:

- A. -8 và -2 B. 2 và 8 C. -5 và 2 D. -5 và 3

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là:

- A. -2 và 7 B. -2 và 2 C. 5 và 9 D. 4 và 7

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ lần lượt là:

- A. $\sqrt{2}$ và 2 B. 2 và 4 C. $4\sqrt{2}$ và 8 D. $4\sqrt{2} - 1$ và 7

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $\sin^2 x - 4\sin x - 5$ là:

- A. -20 B. -9 C. 0 D. -8

Câu 5: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2\cos x - \cos^2 x$ là:

- A. 2 B. 5 C. 0 D. 3

Câu 6: GTNN và GTLN của hàm số $y = 5\cos 2x - 12\sin 2x + 4$ bằng:

- A. -9 và 17 B. 4 và 15 C. -10 và 14 D. -4 và 8

Câu 7: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = (2\sin x + \cos x)(2\cos x - \sin x)$

- A. $\frac{5}{2}$ và $-\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ và $-\frac{7}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$ D. 5 và 1

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là:

- A. -8 và -2 B. 2 và 8 C. -5 và -2 D. -5 và 3

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là:

- A. -2 và 7 B. -2 và 2 C. 5 và 9 D. 4 và 7

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ lần lượt là:

- A. $\sqrt{2}$ và 2 B. 2 và 4 C. $4\sqrt{2}$ và 8 D. $4\sqrt{2} - 1$ và 7

Câu 11: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$ là:

- A. -20 B. -1 C. 0 D. 9

Câu 12: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4 - 2\cos x - \cos^2 x$ là:

- A. 2 B. 5 C. 0 D. 3

II. TỰ LUẬN

GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH SAU

Bài 1: a) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

b) $3 - 4\cos^2 x = 2\sin^2 x + \sin x$

c) $2\cos^4 x + 3\sin^2 x - 2 = 0$

d) $4\sin^4 x - 12\cos^2 x - 7 = 0$

e) $5\cos 2x + 22\sin x - 17 = 0$

f) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$

g) $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$

Bài 2: a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

b) $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 4\sin x \cdot \cos x$

e) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

c) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin x$

Bài 3: a) $6 \sin^2 x + 7\sqrt{3} \sin 2x - 8 \cos^2 x = 6$

b) $2 \cos^2 x + 2 \sin 2x - 4 \sin^2 x = 1$

c) $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$

Bài 4: a) $\cos 2x - \cos x - 3 \sin x - 2 = 0$

e) $2 \sin^2 2x + \sin 6x = 2 \cos^2 x$

b) $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = \sin x$

f) $2 \sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$

c) $\sin 2x + 2 \cos 2x = 1 + \sin x - 4 \cos x$

g) $(\sin x - \cos x + 1)(2 \sin x - \cos x) = \sin 2x$

d) $2 \sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$