**CHỦ ĐỀ :TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN**

 **CỦA TAM GIÁC**

**I. NHẬN BIẾT**

**Câu 1: *Điểm nào trong tam giác gọi là trọng tâm của tam giác? Hãy chọn câu đúng:***

 (A). Giao của ba đường phân giác. (B). Giao của ba đường trung trực.

 (C). Giao của ba đường trung tuyến. (D). Giao của ba đường cao.

*Đáp án C.*

**Câu 2:** ***Trong một tam giác có bao nhiêu đường trung tuyến? Hãy chọn câu đúng:***

 (A). 1; (B). 2; (C). 3; (D). 4.

*Đáp án C.*

**Câu 3:** ***Khẳng định nào là đúng:***

 (A). Đường trung tuyến nối từ đỉnh tam giác đến một điểm thuộc một cạnh.

 (B). Đường trung tuyến là đường thẳng xuất phát từ một đỉnh của tam giác đến trung điểm của một cạnh đối diện

 (C). Đường trung tuyến là đường thẳng nối trung điểm của hai cạnh trong tam giác.

 (D). Đường trung tuyến là đường thẳng xuất phát từ một đỉnh của tam giác vuông góc với cạnh đối diện.

*Đáp án B*

**Câu 4:** ***Cho hình vẽ, hãy điền vào chỗ trống***:

|  |  |
| --- | --- |
| (A). GK = ….CK (B). AG = …GM(C). KG = …CG (D). AM = …AG *Đáp án: (A).* $\frac{1}{3}$*; (B).* $\frac{2}{3}$2*; (C).*$\frac{1}{3}$1/2 *(D).* $\frac{3}{2}$ |  |
|  |  |

**II. THÔNG HIỂU**

**Câu 1**: ***Hãy chọn câu sai. Cho tam giác ABC, có trung tuyến AM, trọng tâm G thì:***

(A). $\frac{AG}{AM}$=$\frac{2}{3}$; ( B). $\frac{GM}{AM} $=$ \frac{1}{3}; $ (C). $\frac{GM}{AG}$ = $\frac{ 1}{ 2}$ ; (D). $\frac{AM}{GM} $= $\frac{1}{3}$

*Đáp án: D*

**Câu 2:** ***Nếu đặt một miếng bìa hình tam giác lên giá nhọn, để miếng bìa đó đứng cân bằng thì điểm đạt phải là:***

 (A). Trực tâm (B). Trọng tâm;

 (C). Giao điểm bao đường phân giác.

 (D). Giao điểm ba đường trung trực;

*Đáp án B.*

**Câu 3:** ***Cho tam giác ABC cân tại B, đường trung tuyến BM, biết BA = 10cm,***

 ***AC = 12cm. Độ dài đường trung tuyến BM bằng:***

 (A). 12cm; (B). 4,5cm; (C). 9cm; (D). 8cm.

*Đáp án D*.

**Câu 4:*Cho hình vẽ,MR và NS là đường trung tuyến của tam giác MNP. Hãy chọn câu sai:***

|  |  |
| --- | --- |
| (A). MG = $\frac{2}{3}$ MR; (B). NG = $\frac{1}{2}$ NS(C). NG = $\frac{2}{3}$ NS (D). GR = $\frac{1}{3}$ MR*Đáp án B.**Không chỉnh sửa* |  |

**Câu 5**: ***Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB=6cm, AC=8cm. Kẻ trung tuyến BM, lấy điểm G trên đoạn thẳng BM sao cho BG=2GM. Kẻ AG cắt BC tại N. Hãy chọn câu đúng:***

(A). BN=5cm (B).BN=10cm

 (C). G là trọng tâm tam giác ABC (D). GA =3GN

 *Đáp án A,C*

**III. VẬN DỤNG**

**Câu 1:** ***Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM.***

* 1. ***Chứng minh rằng AM vuông góc với BC***
	2. ***Biết AB = AC = 17cm, BC = 16cm, tính độ dài đường trung tuyến AM.***

*Đáp án:*

|  |  |
| --- | --- |
| 1. $∆ ABM= ∆ ACM$ ( c-c-c)

 $<AMB= <AMC$ ( 2 góc tương ứng)Mà $<AMB+ <AMC=180°$ nên $<AMB= <AMC=90°$ hay AM vuông góc với BC.1. BM = $\frac{1}{2}$BC = $\frac{16}{2}$ = 8cm.

Áp dụng định lý Pitago vào $∆ ABM vuông tại M$ ta có:AM2 = AB2 – BM2 = 172 – 82 = 289-64 = 225 = 152 AM = 15cm |  |

**Câu 2:** ***Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AB. Trên cạnh AC lấy điểm G sao cho AG =*** $\frac{1}{3}$ ***AC. Gọi E là giao điểm của BG và DC.***

1. ***Chứng minh rằng G là trọng tâm của*** $∆ BDC$
2. ***Biết DC = 8cm. Tính độ dài đoạn EC.***

Đáp án:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Ta có AD = AB(gt) nên CA là đường trung tuyến của $∆ BCD$, lại có AG = $\frac{1}{3}$ AC (gt)

nên G là trọng tâm của $∆ BCD.$1. Vì BG $∩ $CD tại E nên BE là trung tuyến của$ ∆ BCD$. Do đó E là trung điểm của DC.

 EC = $\frac{DC}{2}$ = $\frac{8}{2}$ = 4cm |  |

**Câu 3:** ***Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BD và CE bằng nhau. Chứng minh rằng*** $∆ ABC $***là tam giác cân.***

Đáp án

|  |  |
| --- | --- |
| Gọi G là giao điểm của BD và CE, ta có:BG = $\frac{2}{3} $BD; CG = $\frac{2}{3}$CE. Do BD = CE nên BG = CG; GD = GE.$ \rightarrow $ $∆ BGE= ∆CGD$( c-g-c)$ \rightarrow $ BE = CD.Ta lại có: BE = $\frac{1}{2}$AB; CD = $\frac{1}{2}$AC nên AB = ACVậy $∆ ABC $là tam giác cân tại A. |  |

**Câu 4:** ***Cho tam giác ABC vuông tại A, có hai cạnh góc vuông AB = 3cm,***

***AC = 4cm. Tính khoảng cách từ A tới trọng tâm G của tam giác ABC.***

Đáp án

|  |  |
| --- | --- |
| Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại A ta có: BC2 = AB2 + AC2 $ \rightarrow $ BC2 = 32 + 42  = 9 + 14 = 25 BC2 = 52 $ \rightarrow $ BC = 5cm.Do AM là trung tuyến của tam giác ABC vuông tại A nên ta có: AM = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}$.5 = 2,5cm. ( Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).Theo giả thiết thì G là trọng tâm ∆ABC nên:  AG = $\frac{2}{3}$ AM = $\frac{2}{3}$.2,5cm = $\frac{5}{3}$ cm. |  |

**Câu 5:** ***Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM. Gọi K là trung điểm của BM. Trên tia đối của tia KA lấy điểm E sao cho KE = KA.***

1. ***Điểm M là trọng tâm của tam giác nào?***
2. ***Gọi F là trung điểm của CE. Chứng minh rằng ba điểm A, M, F thẳng hang***.

Đáp án:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Xét $∆ ACE,$ ta có: KA = KE (gt)

CK là đường trung tuyến,Mà CM = $\frac{2}{3}$ KC nên M là trọng tâm của $∆ ACE$.1. Vì F là trung điểm của EC (gt) nên AF là đường trung tuyến của $∆ ACE$, mà M là trọng tâm nên AF đi qua M

hay 3 điểm A, M,F thẳng hàng. |  |

**IV. VẬN DỤNG CAO**

**Câu 1:** ***Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Chứng minh rằng:***

* 1. ***Nếu tam giác ABC vuông tại A thì AM =*** $\frac{1}{2}$ ***BC.***
	2. ***Ngược lại, nếu AM =*** $\frac{1}{2}$ ***BC thì tam gi ác ABC vuông tại A.***

Đáp án

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA$ \rightarrow AM = \frac{1}{2} AD$.(1) ⇒ AM= AD

+ $∆ BMD= ∆CMA \left( c-g-c\right)$$\rightarrow $⇒ BD = AC( 2 cạnh tương ứng)  và = ( 2 góc tương ứng).  Do đó BD // AC.Ta lại có =90° nên =90°+ $∆ CAB= ∆DBA $ ( vì cạnh AB chung, = =90°, AC = BD).$$\rightarrow BC=AD \left(2\right)$$Từ (1) và (2) ta có: AM = $\frac{1}{2}$ BC1. Giả sử có AM = $\frac{1}{2}$ BC AM = MB =MC

$\rightarrow ∆$MAB và MAC đều cân tại M. = ; =  $\rightarrow <CAM$⇒ + = +  Hay = $<B+ <C$ + = = 90Vậy tam giác ABC vuông tại A (đpcm). |   |

**Câu 2:** ***Cho tam giác ABC, có G là trọng tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D và trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho BD = CE.***

1. ***Chứng minh hai tam giác ABC và ADE có cùng trọng tâm G.***
2. ***Gọi M là giao điểm của AG và BC, I là trung điểm của AG, N là giao điểm của DG và AE, J là trung điểm của DG.***

 ***Chứng minh rằng IJ//MM và IJ = MN***.

Đáp án:

 

1. Vì G là trọng tâm của ABC nên: AG = $\frac{2}{3}$AM. (1)

Ta có MB = MC và BD = CE( giả thiết) nên MB + BD = MC + CE.

Hay MD = ME AM là trung tuyến của ADE. (2)

Từ (1) và (2) suy ra G là trọng tâm của ADE

 Tức là ABC$ và ∆$ADE có cùng trọng tâm G.

 b) Vì I là trung điểm của AG (giả thiết) nên IA = IG = $ \frac{1}{2}$AG, mà GM = $\frac{1}{2}$AG

$$\rightarrow IG = GM.$$

 Ta có G là trọng tâm của ADE nên DN là trung tuyến của ADE

 $\rightarrow GN = \frac{1}{2}DG$ (3)

Mặt khác,vì J là trung điểm của DG ( giả thiết) nên JD = JG = $\frac{1}{2}$DG (4).

Từ (3) và (4) suy ra GN = GJ.

Xét $∆GIJ$ và $∆GMN$ có:

 GI = GM (chứng minh trên);

 $<IGJ= <MGN$ ( hai góc đối đỉnh);

 GJ = GN ( chứng minh trên).

Do vậy $ ∆GIJ$ = $∆GMN$ ( c-g-c).

 IJ = MN ( hai cạnh tương ứng) và $<GIJ= <GMN$ ( hai góc tương ứng).

Mà $<GIJ và<GMN$ ở vị trí so le trong nên IJ // MN. (Đpcm).

**Câu 3:** ***Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AM, BN,CP và trọng tâm G.***

***Chứng minh rằng: a) AM <*** $\frac{1}{2}$ ***( AB + AC).***

 ***b).*** $\frac{3}{ 4}$ ***( AB + AC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA.***

Đáp án

 

1. Trên tia AM lấy điểm D sao cho M là trung điểm của AD. Khi đó ta có:

AMB = DMC ( c-g-c).$ \rightarrow $ AB = CD ( hai cạnh tương ứng).

Xét ACD có: AC + CD > AD ( bất đẳng thức tam giác)

$ \leftrightarrow $ AC + AB > 2. AM AM < $\frac{1}{2}$ ( AB + AC) (đpcm).

b)

+ Chứng minh tương tự câu a, ta có:

 AM < $\frac{1}{2}$ ( AB + AC)

 BN < $\frac{1}{2}$ ( BA + BC)

 CP < $\frac{1}{2}$ ( CA + CB)

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

 AM + BN + CP < AB + BC + CA. (1).

 + Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được

 BN + CP > $\frac{3}{2}$ BC

 CP + AM > $\frac{3}{2}$ CA

 AM + BN > $\frac{3}{2}$ AB

Thật vậy: Xét GBC có: GB + GC > BC ( bất đẳng thức tam giác).

Mặt khác: GB = $\frac{2}{3}$BN; GC = $\frac{2}{3}$ CP ( tính chất trọng tâm ABC).

Từ đó ta có: $\frac{2}{3}$BN + $\frac{2}{3}$ CP > BC BN + CP > $\frac{3}{2}$ BC

Chứng minh tương tự ta được: CP + AM > $\frac{3}{2}$ CA

 AM + BN > $\frac{3}{2}$ AB

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được:

 $\frac{3}{2}$ ( AB + BC + CA) < 2( AM + BN + CP)

 $\frac{3}{ 4}$ ( AB + AC + CA) < AM + BN + CP. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

 $\frac{3}{ 4}$ ( AB + BC + CA) < AM + BN + CP < AB + BC + CA. (đpcm).