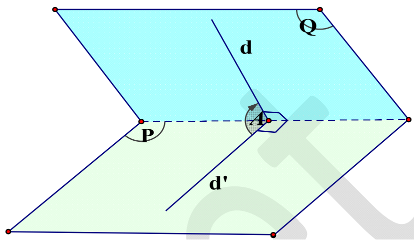
GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

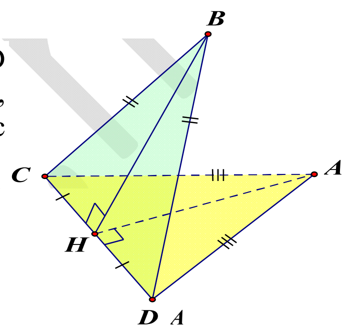
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng , đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng . Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm .

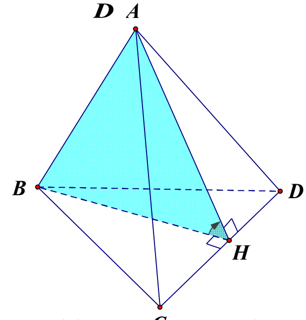


Những trường hợp đặc biệt đề hay ra :

Trường hợp 1 : Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD . Gọi H trung điểm của CD , thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 2 : Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD . Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 3 : Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng quá khó , ta nên sử dụng công thức sau :

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A, mp(Q)\right)}{d\left(A, a\right)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Trường hợp 4 : Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$

Trường hợp 5 : Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d' .

Trường hợp 6 : CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA MẶT PHẲNG BÊN VÀ MẶT PHẲNG ĐÁY

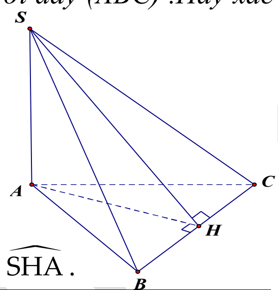
BƯỚC 1: XÁC DỊNH GIAO TUYẾN d của mặt bên và mặt đáy.

BƯỚC 2 : TỪ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐỈNH , DỰNG $AH \perp d$.

BƯỚC 3 : GÓC CẦN TÌM LÀ GÓC $\widehat{SHA}$.

Với S là đỉnh , A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ điển hình : *Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC) .Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).*



Ta có BC là giao tuyến của mp(SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A , dựng $AH \perp BC$.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

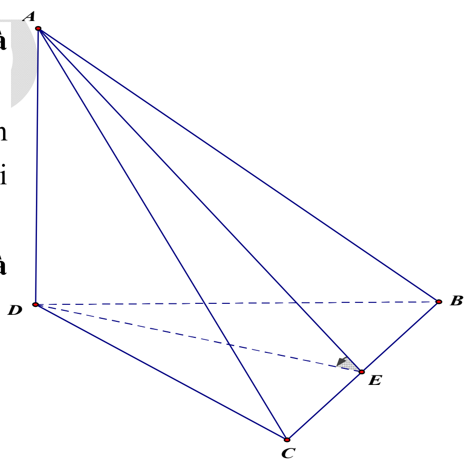
Kết luận góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SHA}$.

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (BCD)$ và AB = 3a. Biết BCD là tam giác đều cạnh 2a. Tính góc giữa hai mặt phẳng :

a). (ACD) và (BCD). b). (ABC) và (DBC)

LỜI GIẢI

a). Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).



Vì AD vuông góc với mặt phẳng (BCD) nên hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau , suy ra góc giữa chúng bằng 90^0 .

b). Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).

Dựng $DE \perp BC$ tại E , ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp DE \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(SBC) \Rightarrow BC \perp AE$.

Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) có BC là giao tuyến và hai đường thẳng DE , AE lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC . Nên góc giữa (ABC) và (DBC) là góc giữa DE và AE chính là góc $\widehat{AED}$.

Tam giác BCD đều nên có $DE = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

ΔABD vuông tại D có $AD=\sqrt{AB^2-DB^2}=\sqrt{9a^2-4a^2}=a\sqrt{5}$.

Trong ΔADE vuông tại D có

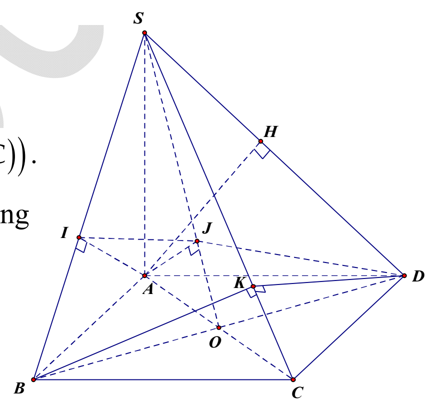
$$\tan\widehat{AED}=\frac{AD}{DE}=\frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}\Rightarrow\widehat{AED}=\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right).$$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với đáy ABCD , $SA=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau :

a). (SAB) và (SBC)
b). (SAD) và (SCD)
c). (SAB) và (SCD)
d). (SBC) và (SAD)
e). (SBD) và (ABCD)
f). (SBD) và (SAB)
g). (SBC) và (ABCD)
h). (SCD) và (ABCD)
i). (SBD) và (SBC)
k). (SBC) và (SCD)

LỜI GIẢI

a). Góc giữa (SAB) và (SBC)



Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)\left(BC\subset(SBC)\right)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90^0.

b). Góc giữa (SAD) và (SCD)

Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)\left(CD\subset(SCD)\right)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90^0.

c). Góc giữa (SAB) và (SCD) Dựng $AH\perp SD\,(H\in SD)$.

Ta có $AH\perp SD$ vµ $AH\perp CD$ (v× $CD\perp(SAD)$), tõ ®ã $\Rightarrow AH\perp(SCD)$ (2)

Ngoài ra ta có $AD\perp(SAB)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5 , thì góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AD chính là góc $\widehat{HAD}$.

Ta có $\widehat{DAH} = \widehat{DSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAH}$).

$\tan\widehat{DSA} = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{DSA} = 30^0$.

Kết luận $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{DAH} = 30^0$.

d). Góc giữa (SBC) và (SAD)

Dựng $AI \perp SB(I \in SB)$. Ta có

$AI \perp SB$ vµ $AI \perp CB(\text{v× } CB \perp (SAB))$, tõ ®ã $\Rightarrow AI \perp (SBC)$

Ngoài ra ta có $AB \perp (SAD)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5 , thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng AI và AB chính là góc $\widehat{BAI}$.

Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{BSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAI}$).

Có $\tan\widehat{BSA} = \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^0$.

Kết luận $\left(\widehat{(SBC),(SAD)}\right) = \widehat{BAI} = 30^0$.

e). Góc giữa (SBD) và (ABCD)

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$. Hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) có giao tuyến BD , hai đường thẳng AO và SO lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AO và SO chính là góc $\widehat{SOA}$. Ta có

$$\tan\widehat{SOA} = \frac{AO}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \widehat{SOA} = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\widehat{(SBD),(ABCD)}\right] = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

f). Góc giữa (SBD) và (SAB)

Vì $(SAC) \perp (SBD)$ theo giao tuyến SO .

Dựng $AJ \perp SO(J \in SO) \quad \Rightarrow AJ \perp (SBD)$.

Có $AJ \perp (SBD), AD \perp (SAB) \Rightarrow \left(\widehat{(SBD),(SAB)}\right) = \left(\widehat{AJ,AD}\right) = \widehat{DAJ}$.

Có $\frac{1}{AJ^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AO^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AJ=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vì $AJ\perp(SBD)\Rightarrow AJ\perp JD\left(JD\subset(SBD)\right)\Rightarrow \Delta AJD$ vuông tại J

nên $\cos\widehat{DAJ}=\frac{AJ}{AD}=\frac{\sqrt{21}}{7}\Rightarrow \widehat{DAJ}=\arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

Kết luận $\left(\widehat{(SBD),(SAB)}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

g). Góc giữa (SBC) và (ABCD)

Ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$. Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC và $AB\perp BC, SB\perp BC\Rightarrow\left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right]=\left(\widehat{AB,SB}\right)=\widehat{SBA}=60^0$ (vì $\widehat{BSA}=30^0$).

h). Góc giữa (SCD) và (ABCD)

Ta có $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD$. Hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có giao tuyến CC và $AD\perp CD, SD\perp CD\Rightarrow\left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right]=\left(\widehat{AD,SD}\right)=\widehat{SDA}=60^0$ (vì $\widehat{DSA}=30^0$).

i). Góc giữa (SBD) và (SBC)

Ta có $AI\perp(SBC), AJ\perp(SBD)\Rightarrow\left[\widehat{(SBC),(SBD)}\right]=\left(\widehat{AI,AJ}\right)=\widehat{JAI}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAB và SAO có

$SA^2=SI.SB\Rightarrow SI=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2}$,

$SA^2=SJ.SO\Rightarrow SI=\frac{SA^2}{SO}=\frac{SA^2}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\frac{3a^2}{\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{2}}}=\frac{3a\sqrt{14}}{7}$.

$AI.SB=AS.AB\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{3}.a}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSBO vuông tại O có $\cos\widehat{BSO}=\frac{SO}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{14}}{2}}{2a}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Trong ΔSJI có

$$IJ^2 = SI^2 + SJ^2 - 2.SI.SJ.\cos\widehat{BSO} = \frac{9a^2}{4} + \frac{18a^2}{7} - 2.\frac{3a}{2}.\frac{3a\sqrt{14}}{7}.\frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{9a^2}{28}$$

Trong ΔAIJ có

$$\cos\widehat{IAJ} = \frac{AI^2 + AJ^2 - IJ^2}{2.AI.AJ} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{7} - \frac{9a^2}{28}}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Kết luận $\left[\widehat{(SBC),(SBD)}\right] = \widehat{JAI} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

k). Góc giữa (SBC) và (SCD)

Ta có $\Delta SBC = \Delta SDC$ cạnh huyền cạnh góc vuông, dựng $BK \perp SC\,(K \in SC) \Rightarrow DK \perp SC$ và $DK = BK$. Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) có SC cạnh chung nên $\left[\widehat{(SBC),(SCD)}\right] = \left(\widehat{BK,DK}\right) = \widehat{BKD}$ hoặc $180^0 - \widehat{BKD}$.

Xét ΔSBC vuông tại B có

$$BK.SC = BS.BC \Rightarrow BK = \frac{BS.BC}{SC} = \frac{BS.BC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Trong ΔBDK có

$$\cos\widehat{BKD} = \frac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2.BK.DK} = \frac{\frac{4a^2}{5} + \frac{4a^2}{5} - 2a^2}{2.\frac{4a^2}{5}} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \widehat{BKD} = \arccos\frac{1}{4}$$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a. Tính góc giữa các mặt phẳng sau :

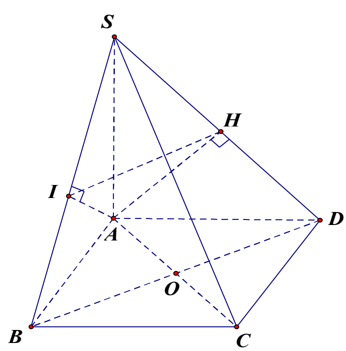
a). Góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

b). Góc giữa hai mặt bên liên tiếp .

c). Góc giữa hai mặt bên đối diện

LỜI GIẢI

a). Góc giữa các mặt bên và mặt đáy :



- Ta có

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} mp(SAB) \perp mp(ABCD) \\ mp(SAD) \perp mp(ABCD) \end{cases}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAD) với mặt phẳng (ABCD) bằng 90^0.

➢ $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$ (định lý ba đường vuông góc) .Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC nên góc của chúng là góc giữa SB và AB là góc $\widehat{SBA}$.

Trong ΔSAB có : $\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^0 \Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right] = 45^0$.

➢ $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp SD$ (định lý ba đường vuông góc) .Hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có giao tuyến CD nên góc của chúng là góc giữa SD và AD là góc $\widehat{SDA}$.

Trong ΔSAD có:

$$\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right] = \arctan\frac{1}{2}.$$

b). Góc giữa hai mặt bên liên tiếp .

Góc giữa (SAB) và (SBC)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)\left(BC \subset (SBC)\right)$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90^0 .

Góc giữa (SAD) và (SCD)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)\left(CD \subset (SCD)\right)$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90^0 .

Góc giữa (SBC) và (SCD)

Dựng $AI \perp SB \Rightarrow AI \perp (SBC)$, dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa AIvà AH chính là góc $\widehat{IAH}$ hoặc 180^0 - $\widehat{IAH}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông SAB và SAD có

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}, \quad SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}.$$

$$AI.SB = AB.AS \Rightarrow AI = \frac{a.a}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad AH.SD = AD.AS \Rightarrow AH = \frac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

$$SI = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad SH = \frac{SA^2}{SD} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Áp dụng hàm số cos cho hai tam giác BSD và ISH có chung góc S

$$\cos\hat{S} = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \frac{2a^2 + 5a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{2}.a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2.SI.SH.\cos\hat{S} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} - 2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{a}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\cos\widehat{IAH} = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2.AI.AH} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{4a^2}{5} - \frac{a^2}{2}}{2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{2a}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{IAH} = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

Kết luận $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \widehat{IAH} = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

c). Góc giữa hai mặt bên đối diện

Góc giữa (SAB) và (SCD)

Vì $AD \perp (SAB)$ và $AH \perp (SCD)$ nên góc giữa (SAB) và (SCD) là góc giữa AD và AH là góc nhọn $\widehat{DAH}$

Ta có $\tan\widehat{DSA} = \frac{AD}{AS} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{DSA} = \arctan 2 \Rightarrow \widehat{DAH} = \arctan 2$ (vì hai góc DAH và DSA cùng phụ với góc SAH).

Tương tự ta tính được góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy (ABCD) là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$,dựng $AH \perp SC(H \in SC)$, gọi M trung điểm AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 60^0 .

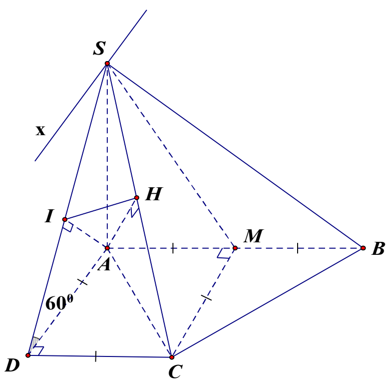
a). Tính góc giữa SD và (SAB) b). Góc giữa (SAD) và (SMC).

c). Tính góc giữa (SBC) và (ABCD) d). Tính góc giữa (SBC) và (SCD)

LỜI GIẢI

Ta có

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$$



Hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) có SD là giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng này là góc giữa AD và SD chính là góc $\widehat{SDA} = 60^0$, nên có $SA = AD.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$,

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

a). Tính góc giữa SD và (SAB)

Có $AD \perp (SAB)$ nên SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAB). Nên góc giữa SD và (SAB) là góc $\widehat{DSA}$. Kết luận $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right) = \widehat{DSA} = 30^0$ (cùng phụ với $\widehat{SDA} = 60^0$).

b). Góc giữa (SAD) và (SMC).

Hai mặt phẳng (SAD) và (SMC) có điểm chung là S và có AD // MC nên giao tuyến của chúng là Sx và song với AD và MC .

$$\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp AM, \text{ mà } CM \parallel Sx \Rightarrow AM \perp Sx \quad (1).$$

$SA \perp AD$, mà $AD \parallel Sx \Rightarrow SA \perp Sx$ (2) .

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\widehat{(SAD),(SMC)}\right) = \left(\widehat{SA,SM}\right) = \widehat{MAS}$.

Trong ΔMAS vuông tại A có $\tan\widehat{MSA} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MSA} = 30^0$.

c). Tính góc giữa (SBC) và (ABCD)

Trong tam giác ABC có CM là đường trung tuyến và $CM = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C .

Có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC , hai đường thẳng SC và AC lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC . Nên góc giữa hai mặt phẳng này là góc giữa SC và AC là góc $\widehat{SCA}$. Trong ΔSAC vuông tại A có

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Kết luận $\left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right] = \widehat{SCA} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

d). Tính góc giữa (SBC) và (SCD)

vì $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC , dựng $AH \perp SC\,(H \in SC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$ (3)

Và có (SAD) và (SCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SD, dựng $AI \perp SD\,(I \in SD) \Rightarrow AI \perp (SCD)$ (4) .

Từ (3) và (4) thì $\left[\widehat{(SBC),(SCD)}\right] = \left(\widehat{AI,AH}\right) = \widehat{IAH}$

Hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAD và SAC có

$AI.SD = AS.AD \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA^2 = SI.SD \Rightarrow SI = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$.

$AH.SC = AC.AS \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$; $SH.SC = SA^2 \Rightarrow SH = \frac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Ta có $\cos\widehat{CSD} = \frac{SD}{SC} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho hai tam giác SIH và AIH có

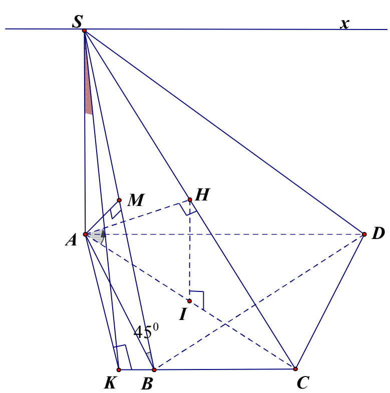
$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2.SI.SH.\cos\widehat{CSD} = \frac{9a^2}{4} + \frac{9a^2}{5} - 2.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9a^2}{20}$.

$\cos\widehat{IAH} = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2.AI.AH} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{6a^2}{5} - \frac{9a^2}{20}}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{30}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow \widehat{IAH} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình thang đáy lớn AD, $AB = BC = DC = a$, $DA = 2a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm SB. Góc giữa SB và mp(ABCD) là 45^0. Tính góc:

a). $\left(\widehat{AM,(SBD)}\right)$ b). $\left(\widehat{AH,(ABCD)}\right)$ c). $\left(\widehat{(SAD),(SBC)}\right)$

LỜI GIẢI



a). Theo đề bài ABCD nữa lục giác đều , nên ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD , có $AC = BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(SAB)$, vậy AB là hình chiếu của SB lên mp(ABCD) nên : $\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \widehat{SBA} = 45^0 \Rightarrow SA = AB = a$ (Vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Có $\begin{cases} AM \perp SB(gt) \\ AM \perp BD(BD \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow \left(\widehat{AM,(SBD)}\right) = 90^0$.

b). Trong tam giác SAC dựng $HI \parallel SA, I \in AC \Rightarrow HI \perp mp(ABCD)$.

Vậy AI là hình chiếu của AH trên mp(ABCD), do đó $\left(\widehat{AH,(ABCD)}\right) = \widehat{HAI} = \widehat{HAC}$.

Trong ΔSAC vuông tại A : $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$.

Trong ΔHAC: $\widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^0$.

c). Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), ta phải tìm giao tuyến của hai mặt phẳng này :

Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBD) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBD) = Sx(Sx \parallel AD \parallel BC)$ (1).

Kẻ $AK \perp BC$ tại K . Có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAK) \Rightarrow BC \perp SK$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} SA \perp Sx \\ SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{(SAD),(SBC)}\right] = \widehat{ASK}$.

Trong ΔAKB vuông tại K : $AK = AB.\cos\widehat{KAB} = a.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì $\widehat{DAB} = 60^0$)

Trong ΔSAK vuông tại A : $\tan\widehat{ASK} = \frac{AK}{AS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASK} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$

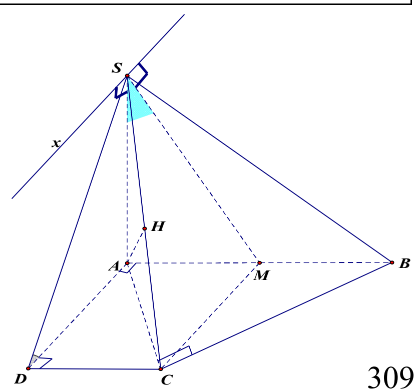
Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy ABCD, đáy là hình thang vuông tại A, có đáy lớn AB, $AB = 2a, AD = DC = a$. Vẽ $AH \perp SC, H \in SC$ và M là trung điểm của AB. Góc giữa (SDC) và (ABC) là 60^0. Tính :

a). $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)$ b). $\left(\widehat{(SAD),(SMC)}\right)$ c). chứng minh $BC \perp (SAC)$

LỜI GIẢI

a). Có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.



Có $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ AD\perp CD\,,\,SD\perp CD\\ AD\subset(ABCD),SD\subset(SCD)\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SDA}=60^0$.

Trong ΔSAD có $SA=AD.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases}AD\perp AB\\ AD\perp SA\end{cases}\Rightarrow AD\perp mp(SAB)$, suy ra SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mp(SAB). Vậy $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)=\widehat{DSA}=30^0$

b). Ta có $AD\parallel CM$ (dễ dàng chứng minh được). Tìm giao tuyến của mp(SAD) và mp(SCM): có $\begin{cases}S\in(SAD)\cap(SCM)\\ AD\parallel CM\\ AD\subset(SAD),CM\subset(SCM)\end{cases}$ $\Rightarrow(SAD)\cap(SCM)=Sx(Sx\parallel AD\parallel CM)$

Ta có $DA\perp SA(DA\perp(SAB))\Rightarrow SA\perp Sx$

$CM\perp(SAB)(\text{vì } CM\parallel AD)\Rightarrow SM\perp CM\Rightarrow SM\perp Sx$

Vậy $\left[\widehat{(SAD),(SCM)}\right]=\left(\widehat{SA,SM}\right)=\widehat{ASM}$.

Có $\tan\widehat{ASM}=\frac{AM}{AS}=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{ASM}=30^0$.

c). Ta có ACDM là hình vuông nên CM = a , trong tam giác ACB có CM là đường trung tuyến và bằng một nửa cạnh BC . Suy ra tam giác ACB vuông tại C .

Có $\begin{cases}BC\perp AC\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, ΔABD đều, $SO\perp(ABCD)$ và $SO=a$.

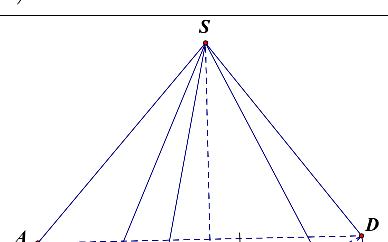
a). Chứng minh: $BD\perp(SAC)$.

b).Gọi I là hình chiếu của O trên BC. Chứng minh: $(SBC)\perp(SOI)$.

c). Tính góc giữa SI và $(ABCD)$.

d). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

b). Có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$,

mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SOI) \perp (SBC)$.

c). Có OI là hình chiếu vuông góc của SI trên mp(ABCD). Do đó góc giữa SI và (ABCD) là góc $\widehat{SIO}$

Vì ABD là tam giác đều nên $BD = a$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔOBI vuông tại I có $OI = OB\sin 60^0 = \dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔSOI vuông tại O có $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SIO} = \arctan\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c). Theo chứng minh câu b) hai mặt phẳng (SOI) và (SBC) vuông góc với nhau theo giao tuyến SI, trong mp(SOI) dựng $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC)$

Có $\begin{cases} OB \perp (SAC) \\ OH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{(SAC),(SBC)}\right] = \left(\widehat{OB,OH}\right) = \widehat{BOH}$.

Vì $OH \perp (SBC) \Rightarrow OH \perp HB \Rightarrow \Delta OHB$ vuông tại H.

Trong ΔSOI vuông tại O có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{16}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$

Trong ΔOHB vuông tại H có

$$\cos\widehat{BOH} = \frac{OH}{OB} = \frac{\dfrac{a\sqrt{57}}{19}}{\dfrac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{57}}{19} \Rightarrow \widehat{BOH} = \arccos\frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

Kết luận $\left[\widehat{(SAC),(SBC)}\right] = \arccos\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

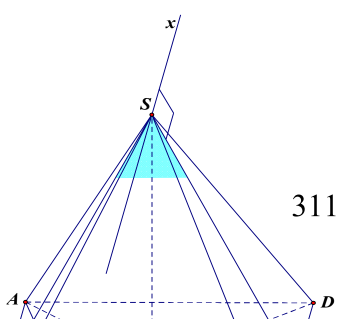
Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với mặt đáy góc 60^0. Tính góc giữa các mặt phẳng:

a). (SAB) và (SCD). b). (SAB) và (SBC).

LỜI GIẢI

a). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Gọi O là tâm của đáy . Gọi H , I lần lượt trung điểm của CD , AB.



Ta có : $\begin{cases} (SCD)\cap(ABCD)=CD \\ OH\perp CD, OH\subset(ABCD) \\ SH\perp CD, SH\subset(SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{[(SCD),(ABCD)]}=\widehat{SHO}=60^0$.

Trong ΔSHO vuông tại O có

$\tan\widehat{SHO}=\dfrac{SO}{OH}\Rightarrow SO=OH.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

Ta có : $\begin{cases} S\in(SAB)\cap(SCD) \\ AB\parallel CD \\ AB\subset(SAB), CD\subset(SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB)\cap(SCD)=Sx\left(Sx\parallel AB\parallel CD\right)$

$AB\perp SI\Rightarrow Sx\perp SI, CD\perp SH\Rightarrow Sx\perp SH$

Vậy góc $[(SAB),(SCD)]=\widehat{ISH}$. Vì ΔISH cân có góc $\widehat{SHI}=60^0$ nên ΔISH đều nên $\widehat{ISH}=60^0$

b). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau do đó $\Delta SAB=\Delta SCB(c.c.c)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) có giao tuyến SB . Hạ $AH\perp SB$ thì $CH\perp SB$. Vậy góc giữa $[(SAB),(SCB)]=\widehat{AHC}$.

Trong ΔSOB vuông tại O : $SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔSAB có : $S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}SI.AB=\dfrac{1}{2}AH.SB\Rightarrow AH=\dfrac{SI.AB}{SB}=\dfrac{a.a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Ta có tam giác ACH cân tại H từ chứng minh trên , nên $AH=CH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AHC :

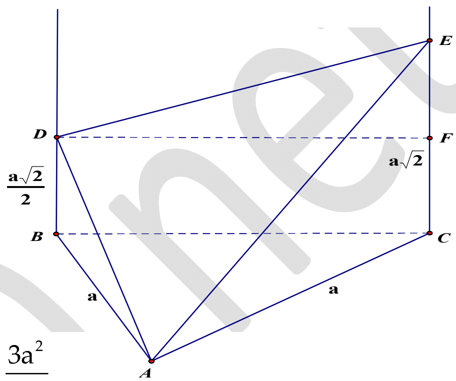
$$\cos\widehat{AHC}=\frac{AH^2+CH^2-AC^2}{2AH.CH}=\frac{\dfrac{4a^2}{5}+\dfrac{4a^2}{5}-2a^2}{2.\dfrac{4a^2}{5}}=-\frac{1}{4}<0\Rightarrow \widehat{AHC}=\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a nằm trong mp(P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

a). Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích tam giác này.

b). Tính góc giữa hai mp(ADE) và (P).

LỜI GIẢI



Gọi F là trung điểm của CE có $FE = FC = \frac{CE}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ABD , ACE , DEF có :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = \frac{3a^2}{2},$$

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 = 3a^2;\ DE^2 = DF^2 + FE^2 = \frac{3a^2}{2}$$

Trong tam giác ADE : $AE^2 = AD^2 + DE^2 = \frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} = 3a^2$. Vậy tam giác ADE vuông tại D

Vì $BD \perp (ABC), CE \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác ADE

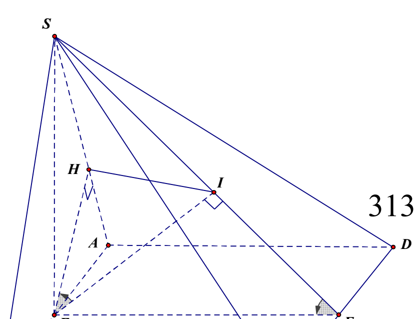
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và mp(P).Chú ý mặt phẳng (ABC) chính là mp(P).

$$S_{\Delta ABC} = \cos\varphi . S_{\Delta ADE} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}} = \frac{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}DE.DA} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2.\frac{3a^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Tính góc giữa:

a). (SCD) và (ABCD). b). (SCD) và (SAD).

LỜI GIẢI



a). Gọi E , F lần lượt trung điểm của AB, CD. Có $SE \perp AB$ (SAB tam giác đều) $\Rightarrow SE \perp mp(ABCD)$

Có $\begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow CD \perp SF$.

Vậy $\left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right] = \widehat{SFE}$.

Trong ΔSEF vuông tại E :

$\tan\widehat{SFE} = \frac{SE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b). $CD \perp EF$ vµ $CD \perp SE \Rightarrow CD \perp mp(SEF) \Rightarrow (SCD) \perp (SEF)$.

+ Dựng $EI \perp SF (I \in SF) \Rightarrow EI \perp (SCD) \Rightarrow d(E,(SCD)) = EI$

+ Trong ΔSEF vuông tại E có $\frac{1}{EI^2} = \frac{1}{ES^2} + \frac{1}{EF^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

+ Vì $AE \parallel CD \Rightarrow AE \parallel (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(E,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

+ Ta có $SD^2 = SE^2 + ED^2 = SE^2 + EA^2 + AD^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + a^2 = 2a^2$.

+ Dựng $AH \perp SD (H \in SD)$, vì ΔSAD cân tại A nên

$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $(SAD) \cap (SCD) = SD$,

$A \in (SAD), d(A,SD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}, d(A,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

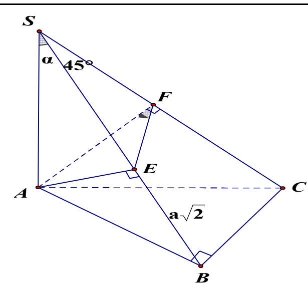
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) . Sử dụng công thức tính góc ở trường hợp 3 ta được $\sin\varphi = \frac{d(A,(SCD))}{d(A,SD)} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{42}}{7} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)$

Câu 9: Cho tứ diện S.ABC ,hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau , có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ,biết $SB = a\sqrt{2}, \widehat{BSC} = 45^0, \widehat{ASB} = \alpha$.

a). Chứng minh BC vuông góc với SB .

b). Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau góc 60^0 .

LỜI GIẢI



a). Chứng minh BC vuông góc với SB .

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ (1)

Theo đề bài $(SAB)\perp(SBC)$ (2)

Và $(ABC)\cap(SBC)=BC$ (3)

(1) , (2) , (3) suy ra $BC\perp(SAB)$ $\Rightarrow BC\perp SB$ (hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba).
Dựng $AE\perp SB$ tại E , Dựng $AF\perp SC$ tại F . theo câu a) thì $AE\perp(SBC)\Rightarrow AE\perp SC$

Vậy $SC\perp(AEF)\Rightarrow SC\perp EF$.

Hai đường thẳng AF và EF lần lượt thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với giao tuyến SC . Nên $\left[\widehat{(SAC),(SBC)}\right]=\widehat{AFE}=60^0$.

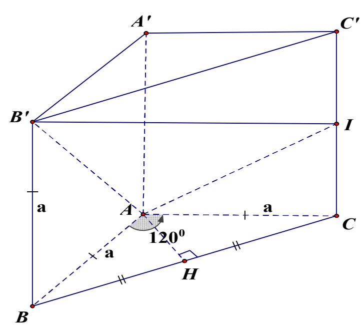
Ta có ΔAEF vuông tại E (vì $AE\perp(SBC)\Rightarrow AE\perp EF$) có $AE=EF.\tan 60^0=EF.\sqrt{3}$.

Xét ΔSAE có $AE=SE.\tan\alpha$, xét ΔSEF có $EF=SE.\sin 45^0=\dfrac{SE.\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $AE=EF.\sqrt{3}\Leftrightarrow SE.\tan\alpha=\dfrac{SE.\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\alpha=\arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10: DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2003
cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB = AC = a, $\widehat{BAC}=120^0$, $BB'=a$. Gọi I trung điểm CC'. Chứng minh tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

LỜI GIẢI



gọi H trung điểm BC. Vì ABC cân tại A nên $AH\perp BC$,do $\widehat{BAC}=120^0\Rightarrow\widehat{ACH}=30^0$

Ta có $AH=AC.\sin\widehat{ACH}=a.\sin 30^0=\dfrac{a}{2}$;

$CH=AC.\cos\widehat{ACH}=a.\cos 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BC=2CH=a\sqrt{3}$

Áp dụng PITAGO cho các tam giác vuông: B'C'I, ABB', ACI

$IB'^2=B'C'^2+IC'^2=3a^2+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{13a^2}{4}$; $AB'^2=AB^2+BB'^2=a^2+a^2=2a^2$

$AI^2=AC^2+IC^2=a^2+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5a^2}{4}$

Ta có $IB'^2=AB'^2+AI^2=\dfrac{13a^2}{4}$. Vậy tam giác B'AI vuông tại A.

Ta có

$S_{\Delta B'AI} = \frac{1}{2}AI.AB' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

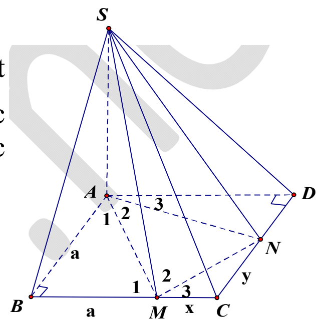
Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (AB'I) ta có

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'I}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right):\left(\frac{a^2\sqrt{10}}{4}\right) = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

Câu 11: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy hai điểm M , N thuộc CB và CD. Đặt CM = x , CN = y . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A lấy một điểm S . Tìm hệ thức giữa x, y để:

a). $\left(\widehat{(SAM),(SAN)}\right) = 45^0$ b). $(SAM) \perp (SMN)$

LỜI GIẢI



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM, SA \perp AN$, hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có giao tuyến là SA . Nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AM và AN chính là góc $\widehat{MAN} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{A_2} = 45^0$.

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45^0$.

Có $\tan(A_1 + A_3) = \frac{\tan A_1 + \tan A_3}{1 - \tan A_1.\tan A_3} \Leftrightarrow \frac{\tan A_1 + \tan A_3}{1 - \tan A_1.\tan A_3} = 1$. (1)

Xét trong hai tam giác vuông ABM và ADN có

$\tan A_1 = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a}$, $\tan A_2 = \frac{DN}{AD} = \frac{a-y}{a}$ (2) .

Thay (2) vào (1) :

$$\frac{\frac{a-x}{a} + \frac{a-y}{a}}{1 - \frac{a-x}{a}\frac{a-y}{a}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2a-x-y}{a} = \frac{a^2-(a-x)(a-y)}{a^2} \Leftrightarrow a(2a-x-y) = a(x+y) - xy$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = 2a(x+y) - xy$$

b). Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAM) \perp (ABCD)$. Giả sử $(SMN) \perp (SAM)$,thì hai mặt phẳng (ABCD) và (SMN) cùng vuông góc với mặt phẳng (SAM) nên giao tuyến của chúng là MN vuông góc với mặt phẳng (SAM). Suy ra $MN \perp AM$ hay $\widehat{AMN} = 90^0$.

Lúc đó $\widehat{M_1} + \widehat{M_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{M_3} = \widehat{A_1}$ (vì cùng phụ với $\widehat{M_1}$)

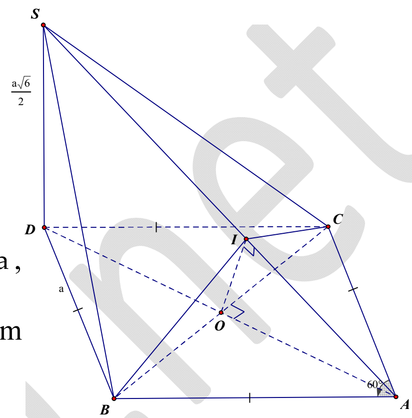
Nên có $\tan M_3 = \tan A_1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow ay = ax - x^2 \Leftrightarrow x^2 = a(x-y)$

Câu 12: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh:

a). $(SBC) \perp (SAD)$. b) $(SAB) \perp (SAC)$.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh:(SBC) ⊥ (SAD).

$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD\left(SD \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD)$$

mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$.

b). (SAB) ⊥ (SAC).

Vì tam giác ABC đều nên $AB = BC = AC = a$, và có tam giác DBC đều $BD = DC = BC = a$.

Gọi $O = AC \cap BD$. AO là đường cao của tam giác đều ABC nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$.

Tam giác SDA vuông tại S: $SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Hạ $OI \perp SA$ tại I. Tam giác $\Delta AIO \sim \Delta ADS(g-g)$.

Nên $\frac{OI}{DS} = \frac{AO}{AS} \Rightarrow OI = \frac{AO}{AS}.DS = \frac{a}{2}$

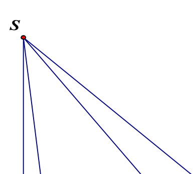
Trong tam giác BIC có IO là đường trung tuyến và $IO = \frac{1}{2}BC$. Suy ra tam giác BIC vuông tại I, nghĩa là góc $\widehat{BIC} = 90^0$. Vậy $(SAB) \perp (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC\left(\text{do } BC \perp (SAD)\right) \\ SA \perp OI \\ BC, OI \subset (BCI) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCI) \Rightarrow \begin{cases} BI \perp SA \\ CI \perp SA \end{cases}$ (1).

Từ (1) suy ra $\left[\widehat{(SAB),(SAC)}\right] = \left[\widehat{BI,CI}\right] = \widehat{BIC} = 90^0 \Rightarrow mp(SAB) \perp mp(SAC)$.

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, có cạnh bằng a và đường chéo BD = a, SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABCD). Chứng minh (SAB) ⊥ (SAD).

LỜI GIẢI



Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $OH \perp SA$ tại H. Ta có ΔABD đều nên $AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSAC có $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

Ta có $\Delta AHO \sim \Delta ACS(g.g) \Rightarrow \frac{HO}{CS} = \frac{AO}{AS}$

$$\Rightarrow HO = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Trong tam giác HBD có HO là đường trung tuyến và $HO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta HBD$ vuông tại H.

$$\begin{cases} BD \perp AC(\text{vì } ABCD \text{ hình thoi}) \\ BD \perp SC(SC \perp (ABCD)) \\ AC, SC \subset mp(SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$$

Có $\begin{cases} SA \perp BD, SA \perp OH \\ BD, OH \subset mp(BDH) \end{cases} \Rightarrow SA \perp mp(BDH) \Rightarrow \begin{cases} BH \perp SA \\ DH \perp SA \end{cases}$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc BHD . Theo chứng minh trên $\widehat{BHD} = 90^0 \Rightarrow mp(SAD) \perp mp(SAB)$

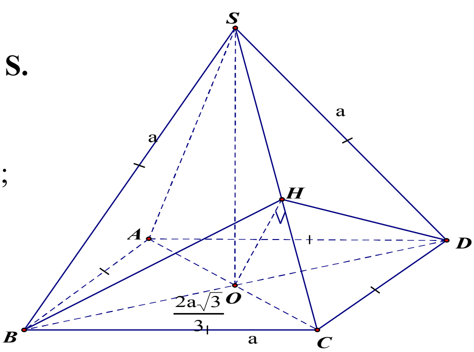
Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, $SB = SD = a, BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy.

a). Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.

b). Chứng minh $(SBC) \perp (SCD)$.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.



Ta có

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3};$$

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác SAC có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}AC$ nên SAC vuông tại S.

b). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SCD).

Kẻ OH vuông góc với SC tại H.

Theo câu a) trong ΔSOC vuông tại O, ta có : $OA = OC = OS$, suy ra H trung điểm của SC.

Và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{OS.OC}{\sqrt{OS^2 + OC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét ΔBDH có HO là đường trung tuyến và $HO = \frac{1}{2}BD$, nên BHD vuông tại H (1)

ΔBCS cân tại B, suy ra $BH \perp SC$ (2) . Tương tự $DH \perp SC$ (3)

Từ (1), (2), (3) : Vậy $\left[\widehat{(SBC),(SCD)}\right] = \widehat{BHD} = 90^0 \Rightarrow (SBC) \perp (SCD)$.

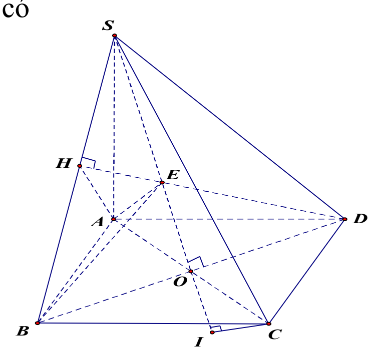
Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy là hình vuông ABCD. Gọi O là tâm của đáy, vẽ CI vuông góc với SO tại I, vẽ DH vuông góc với SB tại H. Chứng minh rằng :

a). Mặt phẳng (SAB) vuông với mặt phẳng (ADH).

b). CI vuông góc với mặt phẳng (SBD).

c). Hai mặt phẳng (ABE) và (SAD) vuông góc nhau , với E là giao điểm của SO và DH.

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$, có

$\begin{cases} SB \perp DH \\ SB \perp AD \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ADH)$,

mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ADH)$.

b). Có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp CI\left(CI \subset (SAC)\right)$.

Có $\begin{cases} CI \perp SO, CI \perp BD \\ SO, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SBD)$.

c). Ta có $\begin{cases} SD \perp BE \\ SD \perp AB\left(AB \perp (SAD)\right) \end{cases} \Rightarrow SD \perp (ABE)$,

mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBE)$.

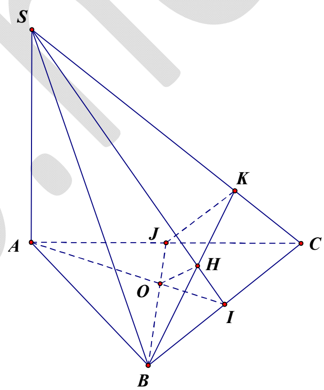
Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O.Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$ .Gọi I là trung điểm BC.

a). Chứng minh: $BC \perp (SAI)$ và $(SAI) \perp (SBC)$.

b). Tính góc giữa SB và (ABC) .

c). Gọi BK là đường cao của ΔSBC và J là trung điểm của AC. Chứng minh: $SC \perp (BJK)$.

LỜI GIẢI



a). Có $BC \perp AI$ (Tính chất tam giác đều), $BC \perp SA\big(\text{do } SA \perp (ABC)\big) \Rightarrow BC \perp (SAI)$,

mà $BC \perp (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI)$.

b). Có $BJ \perp AC$ (Tính chất tam giác đều), $BJ \perp SA\big(\text{do } SA \perp (ABC)\big) \Rightarrow BJ \perp (SAC)$, $\Rightarrow BJ \perp SC$.

Có $\begin{cases} SC \perp BK \\ SC \perp BJ \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BJK)$

c). Có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp OH\big(\text{do } OH \subset (SAI)\big)$ (1).

Có $SC \perp (BJK) \Rightarrow SC \perp OH\big(\text{do } OH \subset (BJK)\big)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SBC)$.

Cách 2: Có $\begin{cases} (SAI) \cap (BJK) = OH \\ (SBC) \perp (SAI) \\ (SBC) \perp (BJK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$.

Có $\Delta IHO \sim \Delta IAS(g.g) \Rightarrow \dfrac{HO}{AS} = \dfrac{IO}{IS}$

$$\Rightarrow HO = \frac{\frac{1}{3}AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}}.SA = \frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{3a^2}{4}}}.a\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{15}}{15}.$$

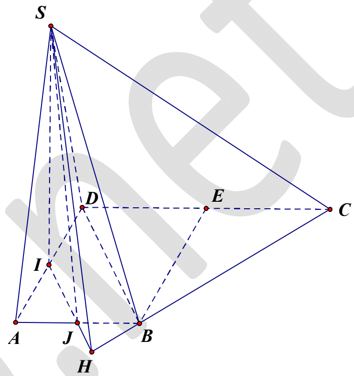
Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và đáy lớn CD. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD và AB, biết $AB = AD = a, CD = 2a$.

a). Chứng minh: $SI \perp (ABCD)$ và $(SAB) \perp (SAD)$.

b). Tính góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$.

c). Tính góc tạo bởi SC và (SIJ).

LỜI GIẢI



a). Vì ΔSAD đều nên $SI \perp AD$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có $\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ SI \perp AD; SI \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SI \\ AD, SI \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$,

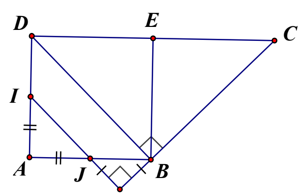
nhưng $AB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$.

b). Có IB là hình chiếu vuông góc của SB trên mp(ABCD) do đó góc giữa SB và mp(ABCD) là góc $\widehat{SBI}$.

Trong ΔABI vuông tại A có $IB = \sqrt{AB^2 + IA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔSIB vuông tại I có $\tan\widehat{SBI} = \frac{SI}{BI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \widehat{SBI} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{5}$.

c). Gọi E trung điểm của AD. Suy ra tứ giác ADEB là hình vuông. Trong tam giác BCD có BE là đường trung tuyến và $BE = \frac{1}{2}DC \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại B.



Hình 2

Ngoài ra có IJ là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow IJ \parallel BD \Rightarrow IJ \perp BC$. Gọi $H = IJ \cap BC$

Có $\begin{cases} CH \perp IJ \\ CH \perp SI \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SIJ) \Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(SIJ).

Do đó góc giữa SC và mp(SIJ) là góc $\widehat{CSH}$.

Mặt phẳng đáy (ABCD) được vẽ lại ở hình 2.

Dễ dàng chứng minh ΔBHJ vuông cân tại $H \Rightarrow HB = HJ = \frac{JB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Trong các tam giác vuông cân AIJ và BCE, có $IJ = AI\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BC = BE\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

$IH = IJ + JH = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$; $CH = CB + BH = a\sqrt{2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{5a\sqrt{2}}{4}$.

Trong ΔSIH vuông tại I có $SH = \sqrt{SI^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$.

Trong ΔSCH vuông tại H có

$$\tan\widehat{CSH} = \frac{CH}{SH} = \frac{\frac{5a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{30}}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \widehat{CSH} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Kết luận $\left[\widehat{SC,(SIJ)}\right] = \arctan\frac{\sqrt{15}}{3}$

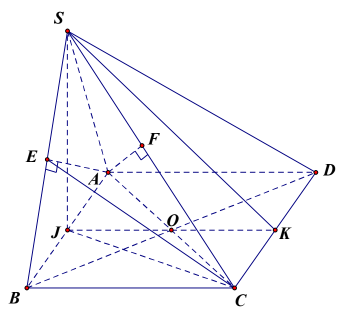
Câu 18: Cho hình vuông ABCD cạnh a và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, gọi J trung điểm của AB, K trung điểm của CD.

a). Chứng minh rằng $(SJK) \perp (SCD)$

b). Tính góc giữa SA, SC với mp(ABCD).

c). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh sáu điểm A, B, C, D, E, F luôn cách đều một điểm cố định.

LỜI GIẢI



Hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB, trong mp(SAB) có $SJ \perp AB$ (do SAB là tam giác đều) $\Rightarrow SJ \perp (ABCD)$.

a). JK là đường trung bình của $ABCD \Rightarrow CD \perp JK$, ngoài ra $CD \perp SJ$ (do $SJ \perp (ABCD)$) $\Rightarrow CD \perp (SJK)$ mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SJK) \perp (SCD)$.

b). Có AJ là hình chiếu vuông góc của SA trên mp(ABCD) $\Rightarrow \left[\widehat{SA,(ABCD)}\right] = \widehat{SAJ} = 60^0$ (Do SAB đều).

có JC là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(ABCD) $\Rightarrow \left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCJ}$

Trong ΔSJC vuông tại J, có $SJ = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $JC = \sqrt{BC^2 + BJ^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, nên có

$$\tan\widehat{SCJ} = \frac{SJ}{CJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \widehat{SCJ} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

b). Có $OA = OB = OC = OD$ (O là tâm của hình vuông ABCD) (1).

Có ΔACF vuông tại F, nên $OA = OC = OF$ (2).

Có $\begin{cases} BC \perp SJ \\ BC \perp AB \\ SJ, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, và $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC)$ mà

$CE \subset (SBC) \Rightarrow AE \perp CE \Rightarrow \Delta ACE$ vuông tại $E \Rightarrow OA = OC = OE$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra sáu điểm A, B, C, D, E, F cách đều tâm O cố định.