HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

HÌNH CHÓP ĐỀU

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét:

+ Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

+ Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Cách 1: Ta chứng minh mặt phẳng này **chứa một đường thẳng vuông góc** với mặt phẳng kia.

Cách 2: Ta chứng minh góc giữa chúng là 90^0.

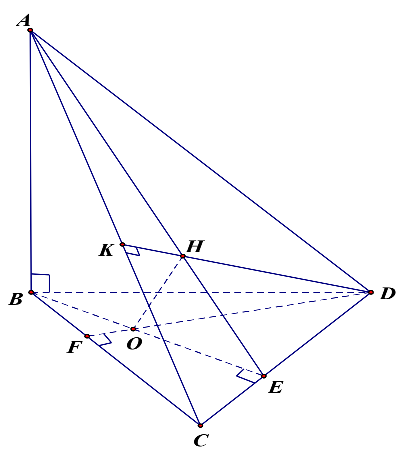
Câu 1: Cho tứ diện ABCD có AB $\perp$ (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mp(ACD) vẽ DK $\perp$ AC. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a). Chứng minh (ACD) $\perp$ (ABE) và (ACD) $\perp$ (DFK).

b). Chứng minh OH $\perp$ (ACD).

LỜI GIẢI

a). Chứng minh (ACD) $\perp$ (ABE) và (ACD) $\perp$ (DFK).



$$\begin{cases} CD \perp BE(gt) \\ CD \perp AB\left(do\ AB \perp (BCD)\right) \\ BE, AB \subset (ABE) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE),$$

mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (ABE)$

$$\begin{cases} DF \perp BC,\ DF \perp AB \\ BC, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC)$$

$$\Rightarrow DF \perp AC\left(AC \subset (ABC)\right)\ (1).$$

$$\begin{cases} AC \perp DF\left(do\,(1)\right),\ AC \perp DK(gt) \\ DF, DK \subset (DFK) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK),$$

mà $AC \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$

b.Chứng minh OH $\perp$ (ACD).

Ta có $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp OH(\text{vì } OH \subset (ABE))\ (*)$

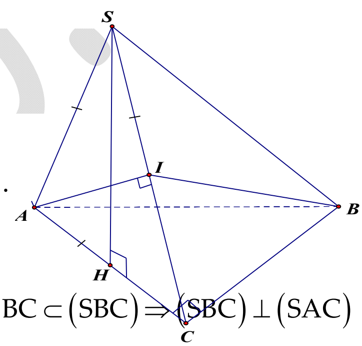
Ta có $AC \perp (DKF) \Rightarrow AC \perp OH(\text{vì } OH \subset (DKF))\ (**)$

Từ $(*),(**): \begin{cases} OH \perp CD\ ,\ OH \perp AC \\ CD, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.

Cách khác Ta có : $\begin{cases} (ABE) \cap (DFK) = OH \\ (ABE) \perp (ACD) \\ (DEF) \perp (ACD) \end{cases}$. Suy ra $OH \perp (ACD)$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.
a). Chứng minh (SBC)$\perp$(SAC). b) Chứng minh (ABI)$\perp$(SBC).

LỜI GIẢI



Gọi H trung điểm của AC . Ta có ΔSAC đều nên $SH \perp AC$, $AI \perp SC$.

Có $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ SH \perp AC\ ,\ SH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp mp(ABC)$.

Có $\begin{cases} BC \perp AC(gt)\ ,\ BC \perp SH \\ AC, SH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$ mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$

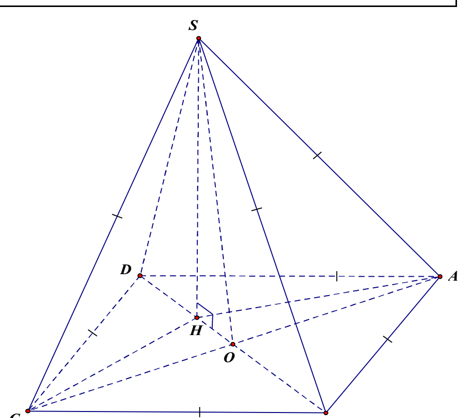
Có $\begin{cases} AI \perp SC(gt) \\ AI \perp BC(BC \perp (SAC)) \Rightarrow AI \perp (SBC) \text{ mà } AI \subset (ABI) \Rightarrow (ABI) \perp (SBC) \\ SC, BC \subset (SBC) \end{cases}$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a.
a). Chứng minh (SBD) $\perp$ (ABCD). b). Chứng minh tam giác SBD vuông.

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) .

Vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$



Suy ra H nằm trên đường trung trực của đoạn AC, vậy $H \in BD$.

a). Chứng minh (SBD) $\perp$ (ABCD).

$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \\ BD, SO \subset mp(SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow AC \perp mp(SBD)$ mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$.

b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

Ta có ba tam giác : $\Delta SAC = \Delta BAC = \Delta DAC(c.c.c)$. Suy ra ba đường trung tuyến xuất phát từ 3 đỉnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau , nghĩa là $SO = BO = DO$.

Trong tam giác SBD có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại O.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC. Trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm S. Gọi D là trung điểm của BC.

a). Chứng minh (SAD) $\perp$ (SBC).

b). Kẻ CI $\perp$ AB, CK $\perp$ SB. Chứng minh SB $\perp$ (ICK).

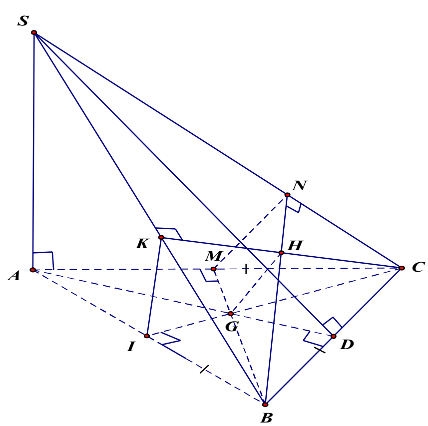
c). Kẻ BM $\perp$ AC, MN $\perp$ SC. Chứng minh SC $\perp$ BN.

d). Chứng minh (CIK) $\perp$ (SBC) và (BMN) $\perp$ (SBC).

e). MB cắt CI tại G, CK cắt BN tại H. Chứng minh GH $\perp$ (SBC).

LỜI GIẢI

a) Chứng minh (SAD) $\perp$ (SBC). Vì ΔABC đều nên $AD \perp BC$



Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AD,\ BC \perp SA \\ AD, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD),$$

mà $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$

b). Chứng minh SB $\perp$ (ICK).

$$\begin{cases} CI \perp AB\ ,\ CI \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB \quad (1)$$

có $\begin{cases} SB \perp CK(gt) \\ SB \perp CI(do(1)) \\ CK, CI \subset (CIK) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CIK)$

c). Chứng minh SC $\perp$ BN. Vì ΔABC đều nên $BM \perp AC$.

Có $\begin{cases} BM \perp AC\ ,\ BM \perp SA \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp SC\ (2)$

Có $\begin{cases} SC \perp MN(gt) \\ SC \perp BM(do(2)) \\ MN, BM \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BMN) \Rightarrow SC \perp BN$

d). Theo câu b) $SB \perp (CIK)$ mà $SB \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (CIK)$

Theo câu c) $SC \perp (BMN)$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (BMN)$

e). Ta có : $\begin{cases} (CIK) \cap (BMN) = HG \\ (CIK) \perp (SBC) \\ (BMN) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow HG \perp (SBC)$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy ABCD .

a). Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBD).

b). Từ O kẻ OK $\perp$ BC. Chứng minh BC $\perp$ (SOK).

c). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SOK).

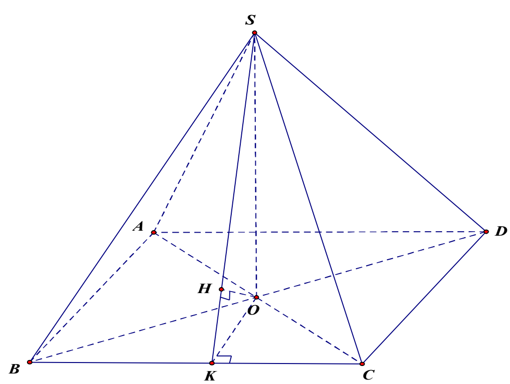
d). Kẻ OH $\perp$ SK tại H. Chứng minh OH $\perp$ (SBC).

LỜI GIẢI

a). Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBD).

Ta có :

$$\begin{cases} (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$



Có $\begin{cases} AC \perp BD(ABCD \text{ hình thoi}) \\ AC \perp SO(\text{vì } SO \perp (ABCD)) \\ BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD)$ mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

b). Chứng minh BC ⊥ (SOK).

$$\begin{cases} BC \perp OK(gt),\ BC \perp SO(SO \perp (ABCD)) \\ OK, SO \subset (SOK) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOK).$$

c). Chứng minh (SBC) ⊥ (SOK). vì $\begin{cases} BC \perp (SOK) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SOK)$

d). Chứng minh OH ⊥ (SBC).

$$\begin{cases} OH \perp SK(gt),\ OH \perp BC(BC \perp (SOK)) \\ SK, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$$

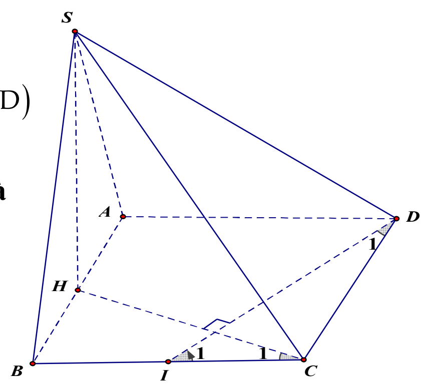
Câu 7: Cho hình vuông ABCD. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD) .Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a). Chứng minh (SAB) ⊥ (SAD) và (SAB) ⊥ (SBC).

b). Chứng minh (SHC) ⊥ (SDI).

LỜI GIẢI

Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.



$$\text{Có } \begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

a). Chứng minh (SAB) ⊥ (SAD) và (SAB) ⊥ (SBC).

$$\begin{cases} AD \perp AB(gt) \\ AD \perp SH(SH \perp (ABCD)) \Rightarrow AD \perp (SAB), \\ AB, SH \subset (SAB) \end{cases}$$

mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$

Chứng minh hoàn toàn tương tự , ta chứng minh được $(SBC) \perp (SAB)$.

b). Chứng minh (SHC) ⊥ (SDI).

Có $\Delta BCH = \Delta CDI(c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$, mà $\widehat{D_1} + \widehat{I_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{I_1} = 90^0$.

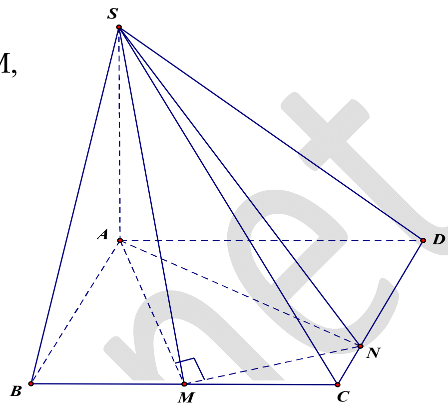
Vậy $HC \perp DI$

$$\text{Có } \begin{cases} DI \perp CH \\ DI \perp SH(SH \perp (ABCD)) \\ CH, SH \subset (SHC) \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SHC),$$

mà $DI \subset (SDI) \Rightarrow (SDI) \perp (SHC)$

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ đáy. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho BM = $\frac{a}{2}$, $DN = \frac{3a}{4}$.
Chứng minh (SAM) $\perp$ (SMN).

LỜI GIẢI



Pitago cho các tam giác vuông ABM, CMN, ADN . Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AM^2 = AB^2 + BM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \\ MN^2 = CM^2 + CN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{16} \\ AN^2 = AD^2 + DN^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{25a^2}{16} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AM^2 + MN^2 = AN^2$.

Theo định lý đảo Pitago thì ΔAMN vuông tại M. . Suy ra $MN \perp AM$.

$$\begin{cases} MN \perp AM \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp mp(SAM). \quad \text{Mà } MN \subset mp(SMN) \Rightarrow (SAM) \perp (SMN).$$