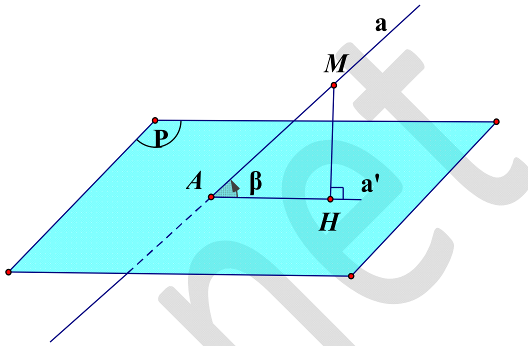
GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)



Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0^0 \le \alpha \le 90^0$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm A.

Trên d chọn điểm B khác A , dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).

Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)) , thì ta sử dụng công thức sau đây . Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra :

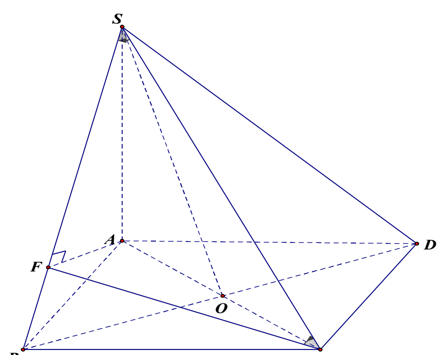
$$\sin\alpha = \frac{d\left(M, mp\left(P\right)\right)}{AM}.$$

Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ đáy và SA = $a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a). SC và (ABCD). b). SC và (SAB). c). AC và (SBC). d). SB và (SAC).

LỜI GIẢI



a). Có AC là hình chiếu của SC lên mp(ABCD) nên $\left[\widehat{SC,\left(ABCD\right)}\right] = \widehat{SCA}$,

Trong ΔSAC vuông tại A: $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$.

Vậy $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right]=60^0$.

b). Có $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp mp(SAB)$. Vậy SB là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB) $\Rightarrow\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\widehat{CSB}$.

Trong ΔSBC vuông tại B: $\tan\widehat{CSB}=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{a}{a\sqrt{7}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\Rightarrow\widehat{CSB}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

c). Dựng $AF\perp SB$ tại F. Có $\begin{cases} AF\perp SB \\ AF\perp BC \end{cases}\Rightarrow AF\perp mp(SBC)$.Vậy FC là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(SBC). Vậy $\left(\widehat{AC,(SBC)}\right)=\widehat{ACF}$.

Trong ΔAFC vuông tại F có:

$$\sin\widehat{ACF}=\frac{AF}{AC}=\frac{\frac{a\sqrt{42}}{7}}{a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}\ \Rightarrow\widehat{ACF}=\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$$

với $\dfrac{1}{AF^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{6a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{7}{6a^2}\Rightarrow AF=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vậy $\left(\widehat{AC,(SBC)}\right)=\arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

d). Có $\begin{cases} BO\perp AC \\ BO\perp SA \end{cases}\Rightarrow BO\perp mp(SAC)$.Nên SO là hình chiếu của SB lên mp(SAC), nên $\left(\widehat{SB,(SAC)}\right)=\widehat{BSO}$.

Trong ΔSBO vuông tại O: $\tan\widehat{BSO}=\dfrac{OB}{OS}=\dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\ \Rightarrow\widehat{BSO}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

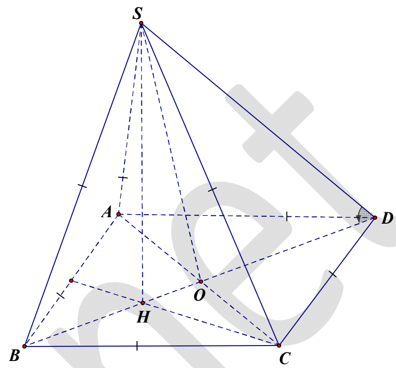
Với $SO=\sqrt{SA^2+AO^2}=\sqrt{6a^2+\dfrac{a^2}{2}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

Vậy $\left(\widehat{SB,(SAC)}\right)=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi. Biết SD = $a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.

a). Chứng minh (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC và SBD là tam giác vuông.
b). Xác định góc giữa SD và mp(ABCD).

LỜI GIẢI



a). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD).

Theo đề bài $SA = SB = SC$, Suy ra $HA = HB = HC$ (đường xiên bằng nhau thì hình chiếu bằng nhau). Vậy H thuộc BD (BD là đường trung trực của đoạn AC).

Vì $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SH\left(SH \subset (SBD)\right) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Từ $AC \perp mp(SBD)$ & $(SBD) \cap AC = O$, với O là trung điểm của AC. Vậy (SBD) là mp trung trực của đoạn AC.

Ta có $\Delta SAC = \Delta BAC(c.c.c) \Rightarrow SO = BO$ (2 đường trung tuyến xuất phát từ 2 đỉnh tương ứng bằng nhau)

Trong Δ SBD: có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S .

ΔSBD vuông tại S nên: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

b). HD là hình chiếu của SD trên mp(ABCD), nên $\left[\widehat{SD,(ABCD)}\right] = \widehat{SDH}$.

Trong tam giác vuông SHD: $\sin\widehat{SDH} = \frac{SH}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SDH} = 30^0$

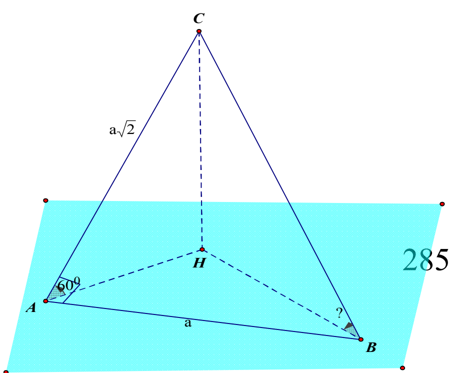
Vậy $\left[\widehat{SD,(ABCD)}\right] = 30^0$.

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a nằm trong mp(P), cạnh AC = $a\sqrt{2}$ và tạo với (P) một góc 60^0 . Tính góc giữa BC và (P).

LỜI GIẢI

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên mp (P).

AH là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(P).



$\left[\widehat{AC,(P)}\right] = \widehat{CAH} = 60^0$,

$\sin\widehat{CAH} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow CH = a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

BH là hình chiếu vuông góc của BC trên mp(P). $\left[BC,(P)\right] = \widehat{CBH}$

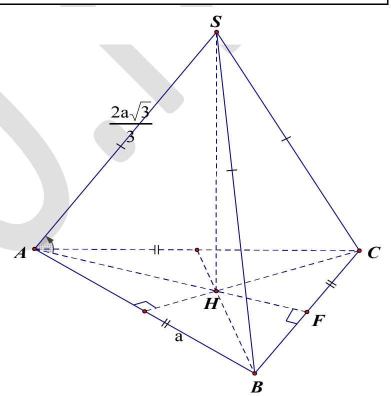
$\sin\widehat{CBH} = \dfrac{CH}{CB} = \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right):\left(a\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{CBH} = 45^0$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

a). Gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABC). Tính SH.

b). Tính góc giữa SA và (ABC).

LỜI GIẢI



a). Vì H là hình chiếu của S trên (ABC) và $SA = SB = SC \Rightarrow HA = HB = HC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, vì ABC đều nên H cũng là trọng tâm và trực tâm.

Nên có $AH = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

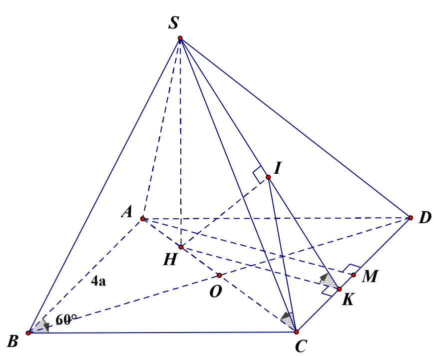
$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$

b). AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC), nên $\left[\widehat{SA,(ABC)}\right] = \widehat{SAH}$

Trong ΔSAH vuông tại H: $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^0$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh 4a, góc $\widehat{ABC} = 60^0$, H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD) là trung điểm của OA, góc giữa mp(SCD) và đáy (ABCD) bằng 60^0. Tính cosin của góc tạo bởi OA và (SCD).

LỜI GIẢI



Vì $\widehat{ABC} = 60^0$ nên tam giác ABC và ACD đều, nên $AC = 4a, BO = 2a\sqrt{3} \Rightarrow BD = 4a\sqrt{3}$

Gọi M trung điểm của CD có $AM \perp CD$, dựng $HK \perp CD, (K \in CD)$. Suy ra

$CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$. Vậy góc giữa mp(SCD) và đáy (ABCD) là góc $\widehat{SKH} = 60^0$.

Trong ΔCAM có $\frac{CH}{CA} = \frac{HK}{AM} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4} \cdot \frac{4a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Có $\tan\widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} \Rightarrow SH = HK\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{9a}{2}$.

Hai mặt phẳng (SCD) và (SHK) vuông góc với nhau theo giao tuyến SK. Dựng $HI \perp SK, (I \in SK) \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Suy ra CI là hình chiếu vuông góc của HC trên mp(SCD), vậy góc giữa AO và (SCD) là góc $\widehat{HCI}$.

Trong ΔSHK có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{16}{81a^2} \Rightarrow HI = \frac{9a}{4}$.

Trong ΔHIC vuông tại I có $CI = \sqrt{HC^2 - HI^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{9a}{4}\right)^2} = \frac{3a\sqrt{7}}{4}$.

$\cos\widehat{HCI} = \frac{CI}{CH} = \frac{\frac{3a\sqrt{7}}{4}}{3a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Vậy $\cos\left(\overline{SO,(SCD)}\right) = \frac{\sqrt{7}}{4}$.