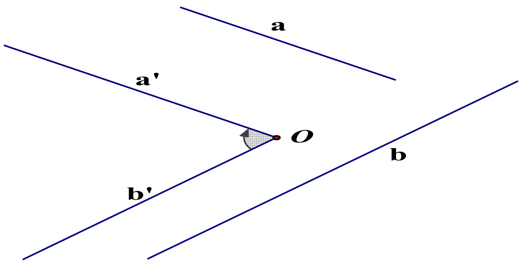
GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: a'// a và b'// b.



• Các phương pháp tính góc:

+ Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác:

Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Định lí cos: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

+ Tính góc theo vectơ chỉ phương: $\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

• Chú ý. + $0^0 \le \varphi \le 90^0$

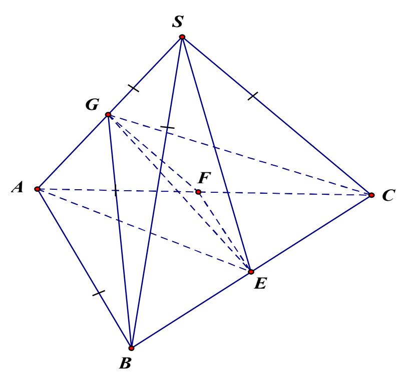
+ $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0.$

+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^0$.

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

LỜI GIẢI

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, SA. Ta có $EF \parallel AB,\ FG \parallel SC$ $\Rightarrow \left[\widehat{SC,AB}\right] = \left[\widehat{EF,FG}\right] = \widehat{EFG}$ hoặc $180^0 - \widehat{EFG}$. Ta có $FE = FG = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$



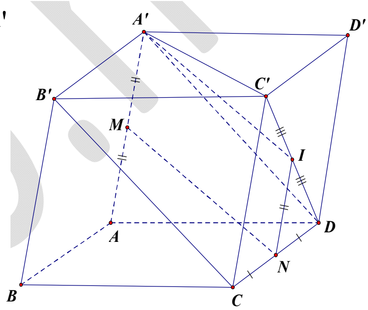
$\Delta BAG=\Delta CAG\left(c.g.c\right)\Rightarrow GB=GC$. Tam giác GBC cân tại G có GE là đường cao

$GE=\sqrt{BG^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$.

Tam giác EFG đều vì có 3 cạnh bằng nhau. Vậy $\widehat{EFG}=60^0$.

Câu 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a > 0 và $\widehat{BAD}=\widehat{DAA'}=\widehat{A'AB}=60^0$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AA' , CD. Chứng minh $MN\parallel mp\left(A'C'D\right)$ và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và B'C.

LỜI GIẢI



Gọi I trung điểm của DC'. Trong tam giác CDC' có NI là đường trung bình của tam giác, nên :

$$\begin{cases}NI\parallel CC'\\ NI=\frac{1}{2}CC'\end{cases}$$

mà $\begin{cases}CC'\parallel AA'\\ CC'=AA'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}NI\parallel AA'\\ NI=\frac{1}{2}AA'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}NI\parallel MA'\\ NI=MA'\end{cases}$

Vậy tứ giác MNIA' là hình bình hành nên $MN\parallel IA'$ mà $IA'\subset\left(A'C'D'\right)\Rightarrow MN\parallel\left(A'C'D\right)$.

Vì $\begin{cases}MN\parallel IA'\\ CB'\parallel DA'\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{CB',MN}\right)=\left(\widehat{DA',IA'}\right)=\widehat{DA'I}$ hoặc $180^0-\widehat{DA'I}$

Ta có tam giác DAA' đều nên DA' = a .

Áp dụng định lý cosin cho Δ ABC có $\widehat{ABC}=120^0$:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC.\cos120^0=3a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{3}.$$

$AB'=a\sqrt{3}$.

Vậy có $AC=A'C'=a,\ AB'=DC'=a\sqrt{3}$.

Trong $\Delta DA'C'$ có A'I là đường trung tuyến :

$$IA'^2=\frac{DA'^2+A'C'^2}{2}-\frac{DC'^2}{4}=\frac{a^2+3a^2}{2}-\frac{3a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow IA'=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

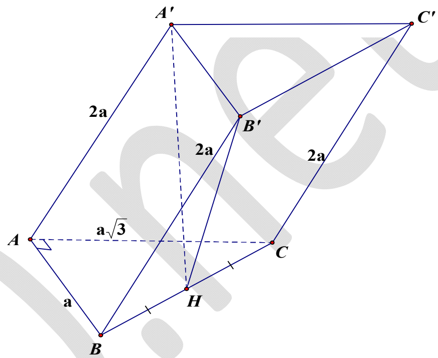
Trong $\Delta A'DI$ ta cã : $\cos\widehat{DA'I}=\frac{DA'^2+IA'^2-DI^2}{2.DA'.IA'}=\frac{3}{2\sqrt{5}}>0$.

Kết luận : $\cos\left[\widehat{MN,CB'}\right] = \left|\cos\widehat{DA'I}\right| = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 3: TSĐH K.A 2008

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

LỜI GIẢI



Gọi H trung điểm của BC , theo đề $A'H \perp mp(ABC)$.

Mà mp (ABC) // mp $(A'B'C')$

$\Rightarrow A'H \perp mp(A'B'C')$

Tam giác ABC vuông tại A :

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow BH = a$

Ta có: $\begin{cases} AA' \parallel BB' \\ B'C' \parallel BC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{AA',B'C'}\right) = \left(\widehat{BB',BC}\right) = \widehat{B'BH}$.

Trong tam giác A'B'H vuông tại A' có : $HB' = \sqrt{A'B^2 + A'H^2} = 2a$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác B'BH có :

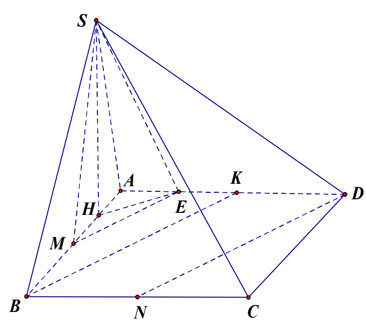
$$\cos\widehat{B'BH} = \frac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2.BB'.BH} = \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2.2a.a} = \frac{1}{4} > 0\ (\text{thỏa}) \Rightarrow \widehat{B'BH} = \arccos\frac{1}{4}.$$

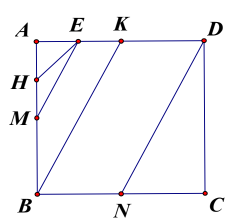
Câu 4: TSĐH K.B 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

LỜI GIẢI

Hạ $SH \perp AB$ tại H. Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD) theo giao tuyến AB. Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.





Trong mặt phẳng (ABCD) từ M kẻ $ME \parallel DN$ với E thuộc AD.

Vậy góc giữa SM và DN chính là góc giữa SM và ME .

Xét tam giác SAB có : $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$. Vậy ΔSAB vuông tại S.

Và : $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H : $HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Gọi K trung điểm của AD ta có $ME \parallel BK \parallel DN$, nên ME là đường trung bình tam giác ABK.

Vậy $AE = \frac{1}{2}AK = \frac{a}{2}$; $ME = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác HAE vuông tại A : $HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHE vuông tại H : $SE = \sqrt{SH^2 + EE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác SME có :

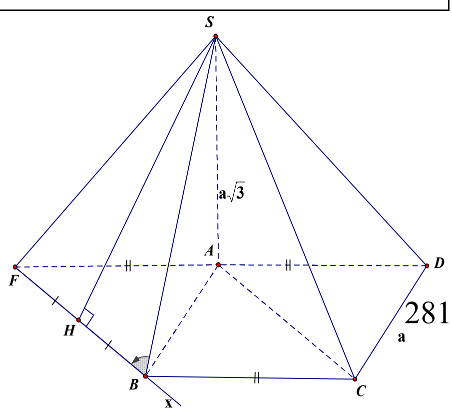
$$\cos\widehat{SME} = \frac{SM^2 + ME^2 - SE^2}{2.SM.ME} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0 \Rightarrow \widehat{SME} = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Kết luận $\left(\widehat{SM, DN}\right) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 5: Cho khối chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

LỜI GIẢI

Qua B kẻ đường thẳng Bx song song với AC . Bx cắt AD tại F. Góc giữa AC và SB , chính là góc giữa Bx và AC. Ta có AFBC là hình bình hành , nên AF = BC và AC = FB.



Suy ra SF = SB , tam giác SBF cân tại S. Có

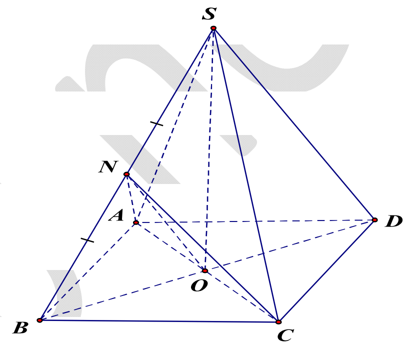
$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. $FB = AC = a\sqrt{2}$

Hạ $SH \perp FB$, thì H trung điểm FB

$$\cos\widehat{SBF} = \frac{HB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{SBF} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN; AN và SD.

LỜI GIẢI



Theo đề bài

$SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = a$

Gọi $O = AC \cap BD$, có

$AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSAB đều). $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSBC đều).

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANC:

$$\cos\widehat{ANC} = \frac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2.AN.CN} = \frac{-1}{3} < 0 \Rightarrow \widehat{ANC} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Trong tam giác BDS có ON là đường trung bình của tam giác.

$$\left(\widehat{AN, SD}\right) = \left(\widehat{AN, NO}\right) = \widehat{ANO} \text{ hoặc } 180 - \widehat{ANO}$$

Áp dụng định lý cosin cho ΔANO:

$$\cos\widehat{ANO} = \frac{AN^2 + ON^2 - AO^2}{2.AN.ON} = \frac{\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow \widehat{ANO} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Vậy $\left(\widehat{AN, SD}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.