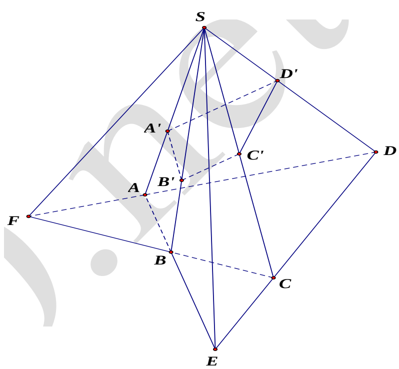
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$. Vì O, O' là tâm của hai bình bình hành ABCD và A'B'C'D', nên có OO' là đường trung bình của hai hình thang ACC'A' và BDD'B', theo tính chất đường trung bình của hình thang suy ra :

$OO' = \dfrac{AA'+CC'}{2} = \dfrac{BB'+DD'}{2} \Rightarrow AA'+CC' = BB'+DD'$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD, mp(P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Tìm điều kiện của mặt phẳng (P) để A'B'C'D' là hình bình hành.

LỜI GIẢI



+ A'B'C'D' là hình bình hành

$\Leftrightarrow \begin{cases} A'B' \parallel C'D' \\ A'D' \parallel B'C' \end{cases}$.

Trong mp(ABCD) gọi $E = AB \cap CD$ và $F = AD \cap BC$

Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$ và $SF = (SAD) \cap (SBC)$.

+ Ta có:

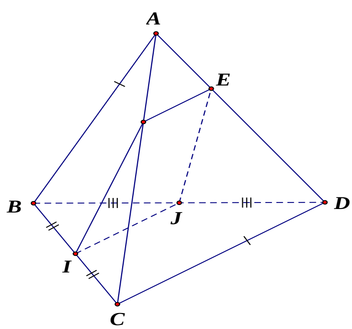
$\begin{cases} A'B' = (P) \cap (SAB) \\ C'D' = (P) \cap (SCD) \\ SE = (SAB) \cap (SCD) \\ A'B' \parallel C'D' \end{cases} \Rightarrow SE \parallel A'B' \parallel C'D' \Rightarrow SE \parallel (P)$ (Định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng).

+ Tương tự, $SF \parallel (P)$.

Vậy nếu $(P) \parallel SE$ và $(P) \parallel SF$ thì A'B'C'D' là hình bình hành.

Câu 7: Cho tứ diện ABCD có AB = CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là điểm thuộc AD khác Avà D. Tìm vị trí của E để thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp(JEI) là hình thoi.

LỜI GIẢI



- Có IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Do đó, $IJ \parallel CD \Rightarrow CD \parallel mp(IJEF) \Rightarrow CD \parallel EF$ (do CD, EF đồng phẳng). Do đó, thiết diện IJEF là hình thang.

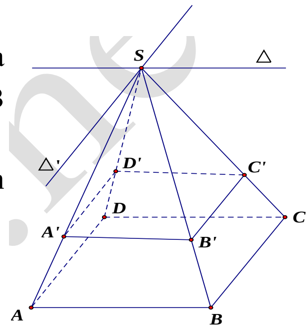
Để thiết diện là hình thoi thì $\begin{cases} EF = JI \\ EF = JE \end{cases} \Rightarrow$ E là trung điểm của AD.

Ngược lại, khi E là trung điểm của AD thì $\begin{cases} EF \parallel JI \parallel CD\ ,\ FE = JI = \dfrac{CD}{2} \\ JE \parallel FI \parallel AB\ ,\ JE = FI = \dfrac{AB}{2} \\ CD = AB \end{cases}$

$\Rightarrow$ IJEF là hình thoi.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các đoạn SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với mp(ABCD).

LỜI GIẢI



- Giả sử $mp(P) \parallel mp(ABCD)$. Khi đó mp(P) và (ABCD) bị mp(SAB) cắt theo hai giao tuyến A'B' và AB song song. Tương tự, $C'D' \parallel CD$, $B'C' \parallel BC$, $A'D' \parallel AD$.

$\Rightarrow A'B' \parallel C'D'$ và $A'D' \parallel B'C'$ $\Rightarrow$ A'B'C'D' là hình bình hành.

- Giả sử A'B'C'D' là hình bình hành :

+ Ta có: $\begin{cases} A'B' \parallel C'D' \\ A'B' \subset (SAB) \\ C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta = (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow \Delta \parallel A'B'\ ,\ \Delta \parallel C'D'$.

+ Mặt khác: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta = (SAB) \cap (SCD)\ ,\ \Delta \parallel AB\ ,\ \Delta \parallel CD$.

Do đó, $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABCD)$. (1)

+ Tương tự $A'D' \parallel (ABCD)$. (2)

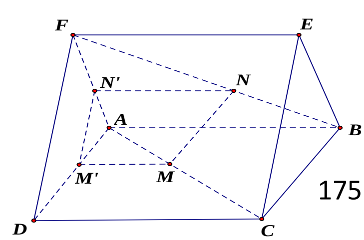
Từ (1) , (2) suy ra $mp(P) \parallel mp(ABCD)$.

Câu 9: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh rằng:

a) $mp(ADF) \parallel mp(BCE)$ b) $mp(DEF) \parallel mp(MM'N'N)$.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $AF \parallel BE$, $BE \subset (BCE)$ và $AD \parallel BC$, $BC \subset (BCE)$



$\Rightarrow$ AF và AD cùng song song với mp(BCE) , mà AF, AD $\subset$ (ADF) .

Vậy : (ADF) $\parallel$ (BCE).

b) Ta có: $MM' \parallel AB$ mà $AB \parallel EF \Rightarrow MM' \parallel EF \subset (DEF)$ (*)

Mặt khác : $MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (1) , $NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$ (2)

Mà AM = BN, AC = BF $\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF \subset (DEF)$ (**)

Mà MM', M'N' $\subset$ (MM'N'N) (***) .

Từ (*), (**), (***) $\Rightarrow$ (DEF) $\parallel$ (MM'N'N).

DẠNG 2: THIẾT DIỆN CỦA HÌNH CHÓP VỚI MẶT PHẲNG (α), BIẾT (α) SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG THUỘC KHỐI CHÓP.

PHƯƠNG PHÁP:

Vì (α) song song với mặt phẳng, suy ra (α) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng đã biết.

Sau đó tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối chóp. Dựa vào tính chất:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (P) \\ (\alpha) \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (P) = Mx \parallel d.$$

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, O là giao điểm hai đường chéo, $AC = a, BD = b$, tam giác SBD đều.

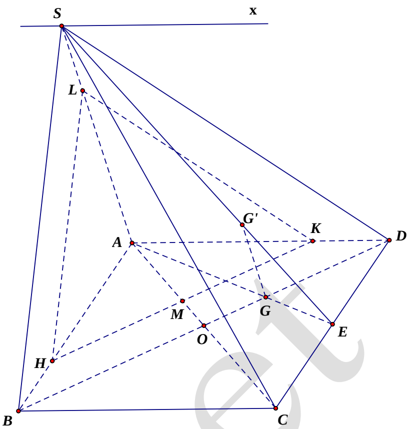
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

b) Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD, SCD. Chứng minh GG' song song với mặt phẳng (SAC).

c) Gọi M là điểm di động trên đoạn AO với $AM = x$ (với $0 < x \le \dfrac{a}{2}$). Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SBD). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD.

d) Tính diện tích thiết diện tìm được ở câu c) theo a, b, x. Tìm x để diện tích này đạt giá trị lớn nhất.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD); BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$.

b) Gọi E trung điể của CD.Xét trong ΔSAE, theo tính chất trọng tâm có:

$\frac{EG}{EA} = \frac{EG'}{ES} \Rightarrow GG' \parallel SA$ (Tính chất Talét), mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow GG' \parallel (SAC)$.

c) Do có $(\alpha) \parallel (SBD) \Rightarrow \begin{cases} (\alpha) \parallel SB \\ (\alpha) \parallel SD \\ (\alpha) \parallel BD \end{cases}$

- Có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel BD \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) và (ABCD) qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AB, AD lần lượt tại H và K.
- Có $\begin{cases} K \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \parallel SB \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) và (SAB) qua K và song song với BD. Giao tuyến này cắt SA tại L.
- Có $\begin{cases} LK = (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow LK \parallel SD$

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác HKL.

Trong ΔABD có $HK \parallel BD \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AD} = \frac{HK}{BD} = \frac{AM}{AO} \Leftrightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AK}{AD} = \frac{HK}{b} = \frac{2x}{a}$

$\Rightarrow HK = \frac{2bx}{a}$.

Trong ΔSAB có $HL \parallel SB \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{HL}{SB} \Rightarrow \frac{HL}{SB} = \frac{2x}{a} \Rightarrow HL = \frac{2bx}{a}$.

Tương tự $KL = \frac{2bx}{a}$.

Từ đó suy ra tam giác HKL đều.

d) Vì HKL là tam giác đều nên $S_{\Delta HKL}=\left(\frac{2bx}{a}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$. Để diện tích này lớn nhất khi x lớn nhất $\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$.

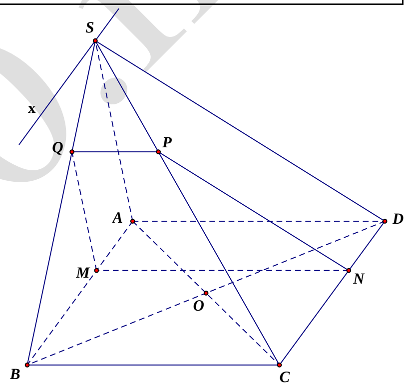
Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, $AB=a, AD=2a$

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Gọi M là điểm di động trên cạnh AB với $AM=x(0<x<a)$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD.

c) Cho tam giác SAD vuông cân tại A. Tính diện tích của thiết diện tìm được ở câu b) theo a và x.

LỜI GIẢI



a) Vì $(\alpha)\,||\,(SAD)\Rightarrow\begin{cases}(\alpha)\,||\,SD\\(\alpha)\,||\,SA\\(\alpha)\,||\,AD\end{cases}$

Do $\begin{cases}(\alpha)\,||\,AD, AD\subset(ABCD)\\M\in(\alpha)\cap(ABCD)\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của mp(α) với mp(ABCD) qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt CD tại N.

Do $\begin{cases}(\alpha)\,||\,SD, SD\subset(SCD)\\N\in(\alpha)\cap(SCD)\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của mp(α) với mp(SCD) qua N và song song với SD, giao tuyến này cắt SC tại P.

Do $\begin{cases}(\alpha)\,||\,SA, SA\subset(SAB)\\M\in(\alpha)\cap(SAB)\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của mp(α) với mp(SAB) qua M và song song với SA, giao tuyến này cắt SB tại Q.

Ngoài ra có $\begin{cases}PQ=(\alpha)\cap(SBC)\\(\alpha)\,||\,BC\,||\,AD\end{cases}\Rightarrow PQ\,||\,BC\,||\,AD$.

Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ, do $MN\,||\,PQ\,||\,BC\,||\,AD$.

b) Do $\begin{cases}SA\perp AD\\MQ\,||\,SA; MN\,||\,AD\end{cases}\Rightarrow MQ\perp MN$

Trong ΔSAB có $MQ\,||\,SA\Rightarrow\frac{MQ}{SA}=\frac{BQ}{BS}=\frac{BM}{BA}\Leftrightarrow\frac{MQ}{2a}=\frac{BQ}{BS}=\frac{a-x}{a}$

$\Rightarrow MQ = 2(a-x)$ và $\frac{BQ}{BS} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow \frac{SB-SQ}{SB} = 1-\frac{x}{a} \Rightarrow \frac{SQ}{SB} = \frac{x}{a}$.

Trong ΔSBC có $QP \parallel BC \Rightarrow \frac{QP}{BC} = \frac{SQ}{SB} \Leftrightarrow QP = \frac{x}{a}.2a = 2x$

Vì ADNM là hình bình hành nên $MN = AD = 2a$.

Diện tích hình thang MNPQ:

$$S = \frac{(MN+PQ)MQ}{2} = \frac{(2a+2x)2(a-x)}{2} = 2(a-x)(a+x).$$

KHỐI TRỤ

Câu 1: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

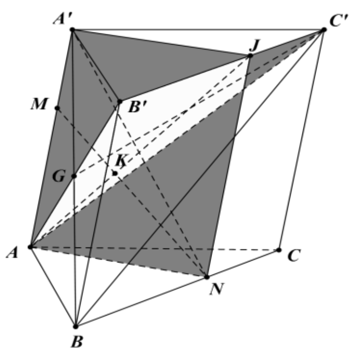
b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên trên AA' và BC. Tìm giao điểm của B'C' với mặt phẳng (AA'N) và giao điểm của MN với (AB'C').

LỜI GIẢI

C' là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi G là giao điểm của AB' và BA'.

Suy ra G là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').



Kết luận $(AB'C') \cap (BA'C') = GC'$.

Chọn mặt phẳng (BCC'B') chứa B'C'.

Ta có: $\begin{cases} N \in (AA'N) \cap (BCC'B') \\ AA' \,//\, BB' \\ AA' \subset (AA'N), BB' \subset (BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow (AA'N) \cap (BCC'B') = Nx\,(Nx \,//\, AA' \,//\, BB')$.

Gọi $J = Nx \cap B'C' \Rightarrow J = B'C' \cap (AA'N)$.

Chọn mặt phẳng (ANJA') chứa MN.

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ANJA') và (AB'C').

Ta có $A \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (1)

Và $\begin{cases} J \in (ANJA') \\ J \in B'C' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow J \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AJ=\left(ANJA'\right)\cap\left(AB'C'\right)$.

Trong mp(ANJA') gọi $K=MN\cap AJ \Rightarrow K=MN\cap\left(AB'C'\right)$.

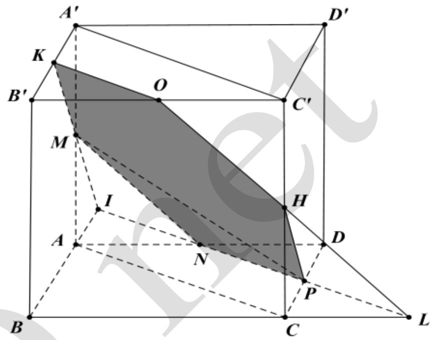
Câu 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', AD, DC. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P với hình lập phương.

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng đáy ABCD gọi I và L là giao điểm của đường thẳng NP với AB và BC.

MI là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABB'A'). MI cắt A'B' tại điểm K.

K là điểm chung của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D') và có NP // AC // A'C', nên giao tuyến của chúng qua K và song song với A'C', giao tuyến này cắt B'C' tại điểm O.



O và L là hai điểm chung của (MNP) và (BCC'B') nên $\left(MNP\right)\cap\left(BCC'B'\right)=OL$, giao tuyến OL cắt CC' tại H.

Kết luận thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là lục giác MNPHOK, có các cặp cạnh đối song song.

Câu 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DC, AD, BB'. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp và giao tuyến của (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D').

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng đáy ABCD gọi F và E là giao điểm của đường thẳng MN với AB và BC.

PF là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (ABB'A').

Gọi H là giao điểm của AA' và PF.

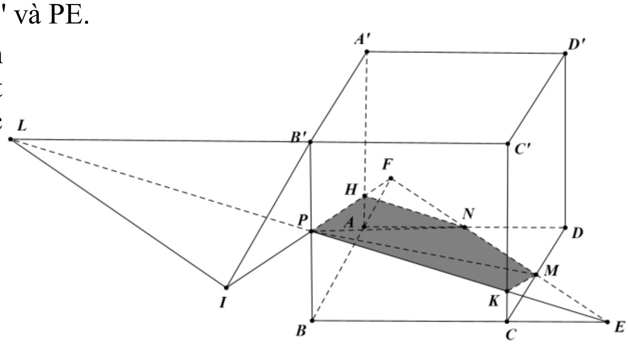
PE là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (BCC'B').

Gọi K là giao điểm của CC' và PE.

Kết luận thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác MNHPK.

Trong mp (ABB'A'), gọi: $I=HP\cap A'B'$.

Trong mp (BCC'B'), gọi: $L=KP\cap C'B'$.

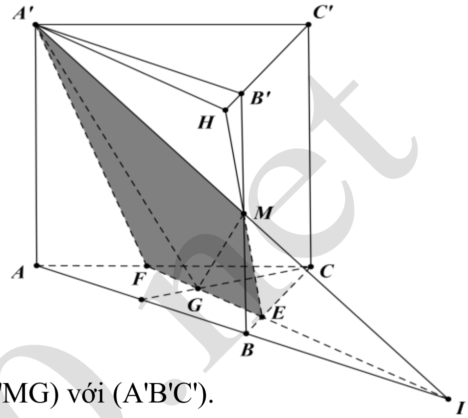


L và I là hai điểm chung của hai mp (MNP) và (A'B'C'D').

Nên $(MNP) \cap (A'B'C'D') = LI$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của BB', G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm thiết diện tạo bởi (A'MG) cắt hình lăng trụ ABC.A'B'C', và giao tuyến của mặt phẳng (A'MG) với (A'B'C').

LỜI GIẢI



Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi $I = A'M \cap AB$.

Ta có I và G là hai điểm chung của (ABC) và (A'MG).

Vậy $(A'MG) \cap (ABC) = IG$.

Trong mặt phẳng đáy (ABC) gọi E, F lần lượt là giao điểm của IG với BC và AC. Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là A'FEM .

Trong mặt phẳng (BCC'B'), gọi:

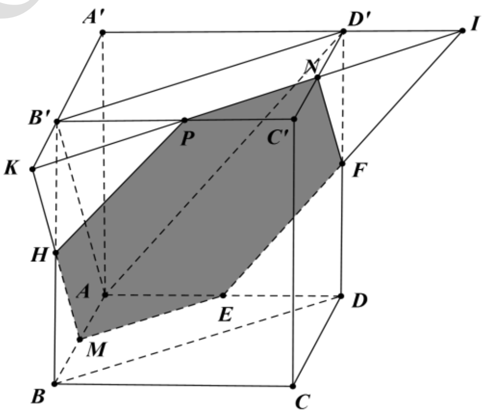
$H = EM \cap B'C'$.

Suy ra A' và H là hai điểm chung của (A'MG) với (A'B'C').

Kết luận $(A'MG) \cap (A'B'C') = A'H$.

Câu 5: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) song song với (AB'D') và đi qua M cắt hình hộp.

LỜI GIẢI



Vì mặt phẳng (P) song song với mp(AB'D') suy ra mặt phẳng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (AB'D').

M là điểm chung của (P) và (ABCD), có (P) //BD // B'D', suy ra giao tuyến qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AD tại E.

E là điểm chung của (P) và (ADD'A'), có (P) // AD'.

$\Rightarrow$ Giao tuyến qua E và song song với AD'.

Giao tuyến này cắt DD' tại F.

M là điểm chung của (P) và (ABB'A'), có (P) // AB', suy ra giao tuyến qua M và song song với AB'. Giao tuyến này cắt BB' tại H .

Trong mặt phẳng (ABB'A'), gọi:

$K = MH \cap A'B'$ (1)

Trong mặt phẳng (ADD'A'), gọi:

$I = EF \cap A'D'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KI = (P) \cap (A'B'C'D')$.

Trong mặt (A'B'C'D') gọi $P = KI \cap B'C'$, $N = KI \cap C'D'$.

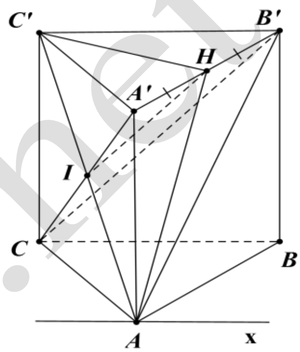
Thiết diện cần tìm là lục giác MEFNPH .

Câu 6: Cho hình lăng trụ tam giác ACB.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của A'B'.

a) Tìm giao tuyến của hai mp(AB'C') và (ABC).

b) Chứng minh rằng CB' // (AHC')

LỜI GIẢI



a) Ta có A là điểm chung của (AB'C') và (ABC).

Mà $\begin{cases} B'C' \,//\, BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow (AB'C') \cap (ABC) = Ax\,(Ax \,//\, B'C' \,//\, BC)$

b) Ta có tứ giác AA'C'C là hình bình hành.

Suy ra A'C cắt AC' tại trung điểm I của mỗi đường.

Do đó IH // CB' (IH là đường trung bình của ΔCB'A').

Mặt khác IH ⊂ (AHC') nên CB' // (AHC').

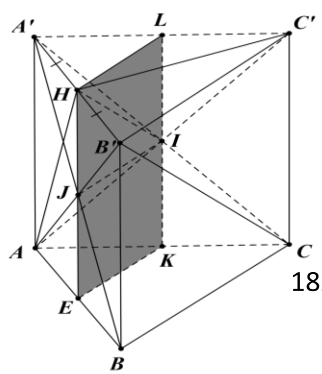
Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

a) CMR đường thẳng CB' song song với mp(AHC').

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mp(BB'C'C).

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mặt phẳng(H, d).

LỜI GIẢI



a) Gọi I là tâm của hình bình hành AA'C'C.
Có HI là đường trung bình của tam giác A'B'C, nên CB' // HI .
Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC').
Vậy CB' // mp(AHC')

b) Gọi J là tâm của hình bình hành AA'B'B.

Rõ ràng I, J là là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC).

Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ.

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác A'BC

$\Rightarrow$ d // BC, mà $BC \subset (BCC'B') \Rightarrow$ d // (BB'C'C).

c) Trong mp(ABB'A') gọi $E = AB \cap HJ$.

Có E là điểm chung của hai mặt phẳng (H,d) và (ABC), nên giao tuyến của chúng qua E và song song với BC // d, giao tuyến này cắt AC tại K.

KI là giao tuyến của (H,d) và (ACC'A'), KI cắt A'C' tại L.

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành HEKL. Vì dễ dàng chứng minh E, K, L lần lượt trung điểm của AB, AC, A'C'.

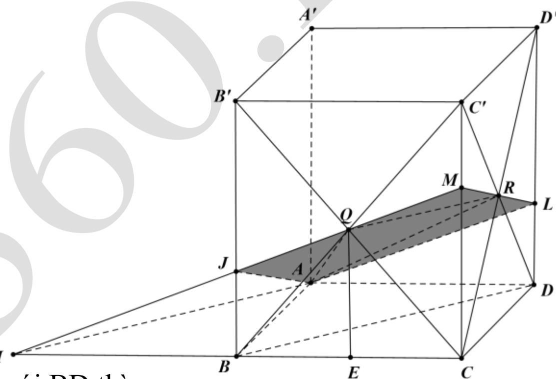
Câu 8: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi Q, R, lần lượt là tâm các mặt (BCC'B'), (CDD'C').

a). Chứng minh RQ // (ABCD).

b). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).

c). Gọi M là giao điểm của CC' với (AQR). Tính tỉ số MC'/MC.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh RQ // (ABCD).

Vì QR là đường trung bình của tam giác C'BD , nên QR // BD .

Do BD $\subset$ (ABCD) nên RQ // (ABCD).

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).

A là điểm chung của mặt phẳng (AQR) và mặt đáy (ABCD).

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD thì:

$d = (AQR) \cap (ABCD)$.

Giao tuyến d cắt đường thẳng BC tại điểm I.

I và Q là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AQR) và (BCC'B') nên:

$(AQR) \cap (BCC'B') = IQ$, giao tuyến IQ cắt BB' tại J và cắt CC' tại M.

MR là giao tuyến của hai mp (AQR) và (CDD'C').

Gọi L là giao điểm của MR và DD' .

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành AJML.

Vì: $\begin{cases} (AQR) \cap (ADD'A') = AL \\ (AQR) \cap (BCC'B') = JM \\ (ADD'A') // (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow AL // JM;$

$$\begin{cases}(AQR)\cap(ABB'A')=AJ\\(AQR)\cap(CDD'C')=LM\Rightarrow AJ\ //\ LM\\(ADD'A')\ //\ (BCC'B')\end{cases}.$$

c) Trong mặt phẳng đáy (ABCD) có AI // BD và AD // IB, nên tứ giác ADBI là hình bình hành.

BI là đường trung bình của tam giác ICM có: $BJ=\frac{1}{2}CM$ (1)

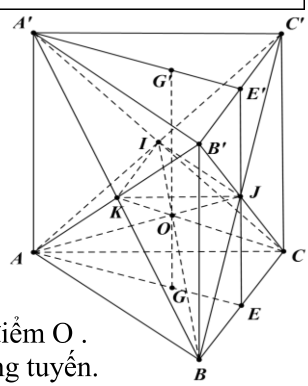
Dựng $QE\ //\ BJ\left(E\in BC\right)$, trong ΔIQE có: $\frac{IB}{IE}=\frac{JB}{QE}=\frac{2}{3}\Rightarrow JB=\frac{2}{3}QE$ (2)

QE là đường trung bình của $\Delta BCC'$ $\Rightarrow QE=\frac{1}{2}CC'$ (3)

Từ (1) , (2) và (3), ta có: $\frac{1}{2}CM=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}CC'$ $\Leftrightarrow CM=\frac{2}{3}CC'\Rightarrow\frac{MC'}{MC}=\frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', gọi I, J, K lần lượt là tâm của hình bình hành ACC'A', BCC'B', ABB'A' .
a) Chứng minh :IJ // (ABB'A'), JK // (ACC'A'), IK // (BCC'B'), mp (IJK) song song với mặt đáy của lăng trụ.
b) Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O.
c) Gọi G, G' là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh G, O, G' thẳng hàng.

LỜI GIẢI



a) KI là đường trung bình của $\Delta A'BC\Rightarrow KI\ //\ BC$.
Suy ra KI // (BCC'B').
IJ là đường trung bình của tam giác C'AB, suy ra IJ // AB. Suy ra IJ // (ABB'A').
KJ là đường trung bình của tam giác B'AC, suy ra KJ // AC. Suy ra KJ // (ACC'A').
Suy ra (IJK) // (ABC) vì (ABC) // (A'B'C') nên (IJK) // (A'B'C').

b) Chứng minh ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O .
Trong mặt phẳng (C'AB) có AJ và BI là hai đường trung tuyến.
Gọi $O=AJ\cap BI$.

Suy ra O là trọng tâm của tam giác (C'AB) có $BO=\frac{2}{3}BI$ (1)

Trong mặt phẳng (A'BC) có BI và CK là hai đường trung tuyến.
Gọi $O'=BI\cap CK$.

Suy ra O' là trọng tâm của tam giác (A'BC) có $BO'=\frac{2}{3}BI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra O và O' trùng nhau.
Kết luận ba đường thẳng AJ , BI , CK đồng qui tại điểm O .

c) Chứng minh G, O, G' thẳng hàng.

Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'.

Suy ra EE' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên

$BB' // EE'$. Mà $BB' // AA'$ $\Rightarrow AA' // EE'$ $\Rightarrow$ AEE'A' là hình bình hành.

Vì G, G' lần lượt là trọng tâm của hai Δ ABC và Δ A'B'C'.

Ta có: $\frac{A'G'}{A'E'} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow GG' // EE'$ (3)

Trong Δ AEI có: $\frac{AO}{AJ} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow GO // EJ$ (4)

Ta có ba điểm E, J, E' thẳng hàng.

Từ (3) và (4) suy ra ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

Câu 10: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', gọi O' là tâm hình bình hành A'B'C'D', K là trung điểm của CD, E là trung điểm của BO'. Chứng minh E thuộc (ACB'). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua K và song song với (EAC).

LỜI GIẢI

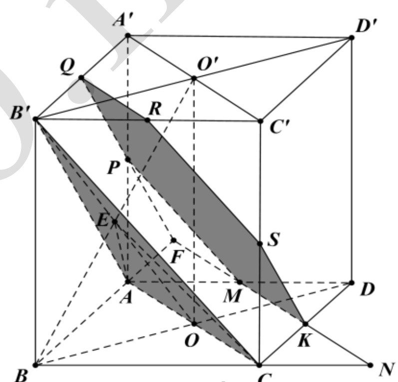
Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD.

Ta có BOO'B' là hình bình hành, nên hai đường chéo BO' và B'O cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Suy ra E trung điểm của B'O. Mà B'O nằm trong mặt phẳng (ACB') suy ra E thuộc (ACB').

Ta có: mp (ACB') cũng là mp (ACE).

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ACB') nên mặt phẳng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (ACB').



Trong mp(ABCD) có: K là điểm chung và AC // (P) nên giao tuyến của chúng qua K và song song với AC. Giao tuyến này cắt AB, AD, BC lần lượt tại F, M, N.

F là điểm chung của hai mặt phẳng (ABB'A') và mặt phẳng (P), có AB' // (P).

Nên giao tuyến của chúng qua F và song song với AB', giao tuyến này cắt AA', A'B' lần lượt tại P và Q.

Giao tuyến của (P) và mp(A'B'C'D') qua Q và song song với A'C', giao tuyến này cắt B'C' tại R.

Giao tuyến của (P) và mp(BCC'B') qua R và song song với B'C, giao tuyến này cắt CC' tại S.

Kết luận: thiết diện cần tìm là lục giác KMPQRS. Lục giác có tính chất các cặp cạnh đối song song.