b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB:

Ta có: $\begin{cases} AB \,//\, DC \\ AB \subset (SAB),\, DC \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx\left(Sx \,//\, AB \,//\, CD \right)$

Mà: $\begin{cases} I \in PQ \subset (SCD) \\ I \in MN \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SDC).$ Vậy $I \in Sx$.

Giới hạn quĩ tích : Khi $M \equiv A$ thì $I \equiv S$. Còn khi $M \equiv B$ thì $I \equiv S_0$

c) Tính diện tích của thiết diện theo a và x:

Ta có: $S_{MNPQ} = S_{\Delta IMQ} - S_{\Delta INP} = S_{\Delta SAD} - S_{\Delta INP}$ (Vì $\Delta IMQ = \Delta\, SAD$ (c.g.c))

Tính $S_{\Delta SAD}$: Ta có $\Delta\, SAD$ vuông cân tại A, do đó: $S_{SAD} = \frac{1}{2}.a^2$.

Tính $S_{\Delta INP}$: Xét tam giác SBC, tam giác SBS_0 và tam giác SAB có:

$NI \,//\, S_0B \Rightarrow \frac{NI}{S_0B} = \frac{SN}{SB}$ (1)

$PN \,//\, BC \Rightarrow \frac{PN}{BC} = \frac{SN}{SB}$ (2)

$MN \,//\, SA \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta được: $\frac{NI}{S_0B} = \frac{PN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NI = PN = AM = x$.

$\Rightarrow \Delta\, INP$ vuông cân tại N, vì NI // SA, PN // AD và $SA \perp AD$.

Do đó: $S_{INP} = \frac{1}{2}.x^2$.

Vậy: diện tích thiết diện: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}.a^2 - \frac{1}{2}.x^2 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$

Để $S_{MNPQ} = \frac{3.a^2}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 - x^2) = \frac{3.a^2}{8} \Leftrightarrow x^2 = a^2 - \frac{3.a^2}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

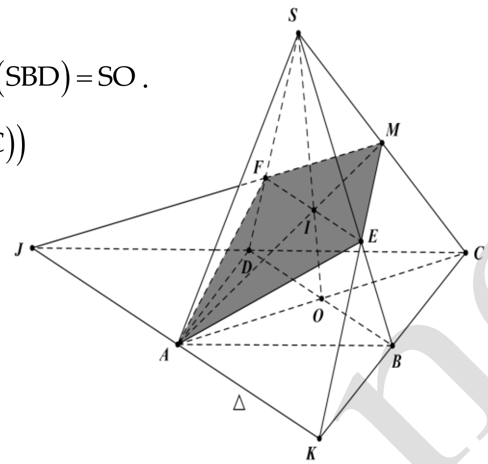
Câu 21: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh 3 điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$.

LỜI GIẢI



a) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow mp(SAC) \cap mp(SBD) = SO$.

Gọi $I = AM \cap SO\left(AM, SO \subset mp(SAC)\right)$

$\Rightarrow I \in mp(SBD)$.

$$\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ BD \text{ // } mp(P) \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow (SBD) \cap (P) = Ix\left(Ix \text{ // } BD\right)$

Gọi $E = Ix \cap SB, F = Ix \cap SD$.

Suy ra: E, F cũng là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (P).

Vậy: Thiết diện cần tìm là tứ giác AEMF.

b) Để ý ta có: I là trọng tâm của tam giác SAC nên: $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

Xét tam giác SBD có EF song song với BD ta có: $\frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$.

$$\frac{S_{SME}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2}SM.SE.\sin BSC}{\frac{1}{2}SC.SB.\sin BSC} = \frac{SE}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{1}{3};\ \frac{S_{SMF}}{S_{SCD}} = \frac{\frac{1}{2}SM.SF.\sin DSC}{\frac{1}{2}SC.SD.\sin DSC} = \frac{SF}{SD}.\frac{SM}{SC} = \frac{1}{3}$$

c) $K = EM \cap BC \Rightarrow K \in mp(P) \cap (ABCD)$ (1)

$J = FM \cap CD \Rightarrow J \in mp(P) \cap (ABCD)$ (2)

$A \in mp(P) \cap (ABCD)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm K, J, K thuộc giao tuyến (Δ) của mp (P) và mp (ABCD).

Ta có: $\begin{cases} mp(P) \cap mp(ABCD) = (\Delta) \\ BD \text{ // } mp(P) \end{cases} \Rightarrow (\Delta) \text{ // } BD$.

Xét tam giác MJK có: $EF \text{ // } JK\left(\text{vì } JK \text{ // } BD, EF \text{ // } BD\right)$:

$\frac{ME}{MK} = \frac{MF}{MJ} = \frac{MI}{MA} = \frac{EF}{JK} = \frac{1}{3}$. Vậy $\frac{EF}{KJ} = \frac{1}{3}$.

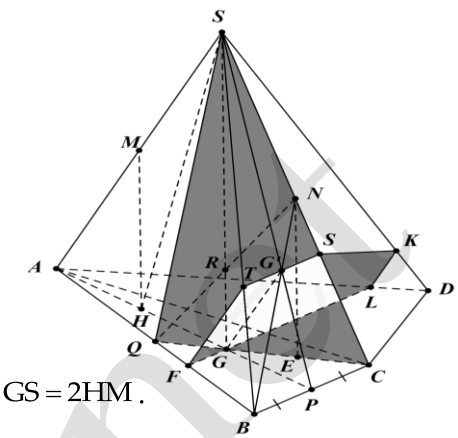
Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD có G là trọng tâm Δ ABC. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

a) Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và SG = 2MH = 4RG.

b) G' là trọng tâm Δ SBC. Chứng minh rằng GG' // (SAB), GG' // (SAC).

c) Mặt phẳng (α) qua GG' và song song BC. Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh rằng: S , R , G thẳng hàng và SG = 2MH = 4RG.

Gọi E trung điểm của GC .

Trong ΔQNE có RG là đường trung bình của tam giác nên có:

$\overrightarrow{RG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NE}$ (1)

Trong ΔSCG có: NE là đường trung bình của tam giác nên có:

$\overrightarrow{SG} = 2\overrightarrow{NE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm G, R, S thẳng hàng và GS = 4GR.

Trong ΔSAG có HM là đường trung bình của tam giác nên có $GS = 2HM$.

b) Chứng minh rằng: GG' // (SAB); GG' // (SAC).

Trong tam giác SAP có: $\frac{PG}{PA} = \frac{PG'}{PS} = \frac{1}{3} \Rightarrow GG' // SA$.

Hai mặt (SAB) và (SAC) cùng chứa SA.

Suy ra GG' // (SAB), GG' // (SAC).

c) Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α)

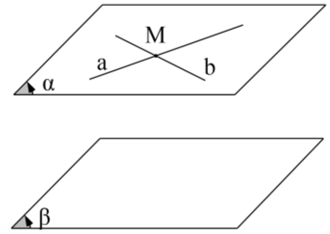
- Vì $(\alpha) // BC$, nên (α) cắt mặt phẳng đáy (ABCD) theo giao tuyến qua G và song song với BC. Giao tuyến này cắt AB tại F, cắt AD tại L.
- Vì GG' // SA nên (α) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.
- Vì GG' // SA nên (α) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.
- TG' là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SBC), giao tuyến này cắt SC tại S.

Thiết diện cần tìm là ngũ giác FLKST .

BÀI 3

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

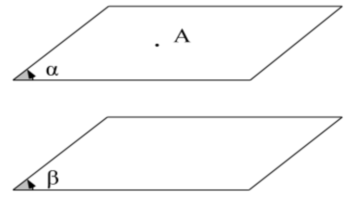
Định lí 1:

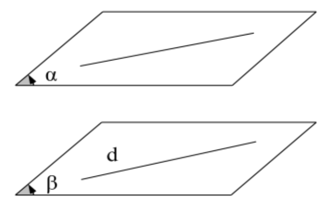


Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song:
Ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

Định lí 2:

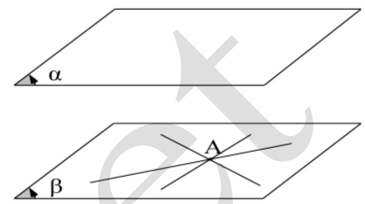




Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả:

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

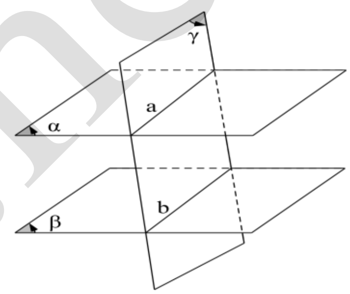


Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với (α): Ta phải chứng minh d thuộc (β) và $(\beta) \,//\, (\alpha) \Rightarrow d \,//\, (\alpha)$.

Hệ quả 2:

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3:



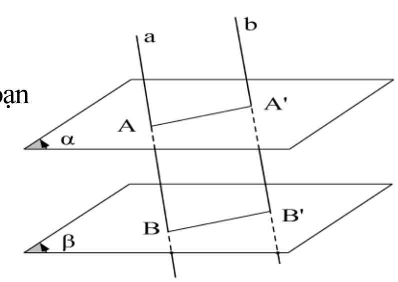
Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

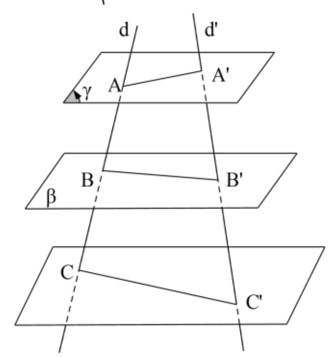
Định lí 3:

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Hệ quả:

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



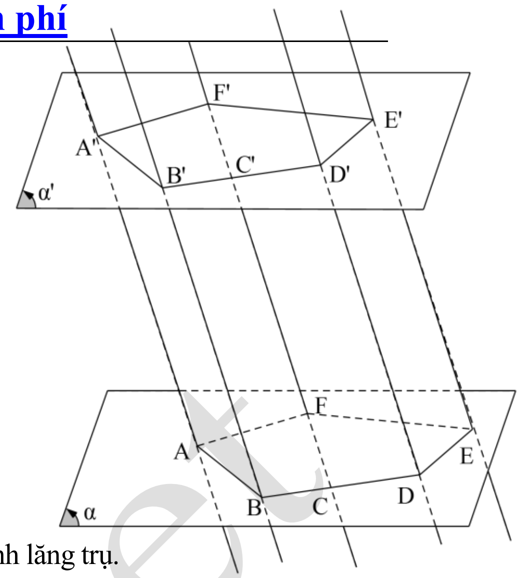


Định lí Ta-lét:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Hình lăng trụ và hình hộp.

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$.



Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A_1', A_2', ..., A_n'$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A_1'A_2'...A_n'$ và các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2$, $A_2A_2'A_3'A_3, ...,$ $A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là hình lăng trụ và được kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$.

Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'...A_n'$ được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ.

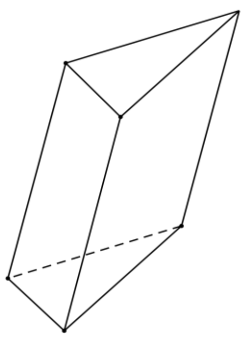
Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n'$ được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.

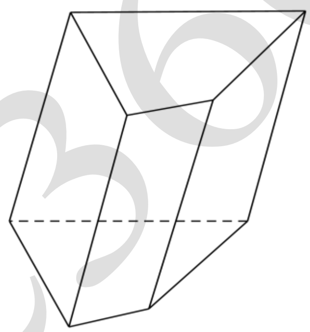
Các hình bình hành $A_1A_1'A_2'A_2, A_2A_2'A_3'A_3, ..., A_nA_n'A_1'A_1$ được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.

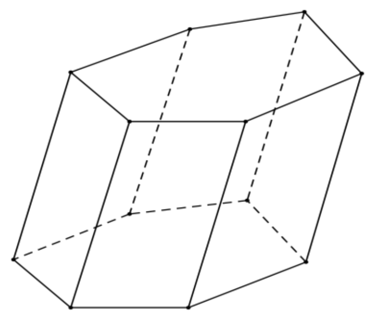
Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.

Nhận xét:

Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.
Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.
Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy.

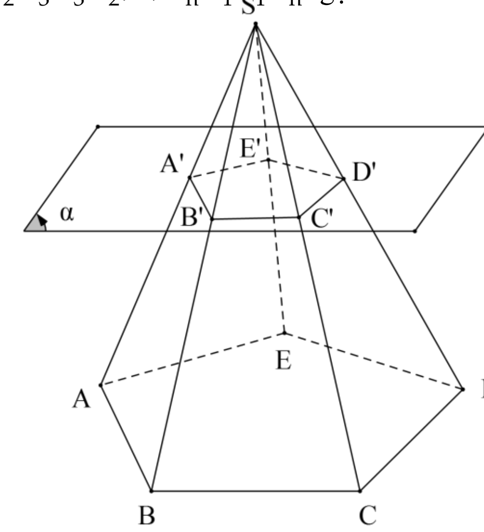

Hình lăng trụ tam giác


Hình lăng trụ tứ giác


Hình lăng trụ lục giác

Hình chóp cụt

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh $SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n$ lần lượt tại $A_1', A_2', ...A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1, A_2'A_3'A_3A_2, ..., A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt.



Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.

Các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1$, $A_2'A_3'A_3A_2, ...,$ $A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1A_1', A_2A_2', A_nA_n' gọi là các cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác …, ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác.

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của hình chóp cụt.

Tính chất:

- Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
- Các mặt bên là những hình thang.
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

DẠNG 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song, đường song song với mặt

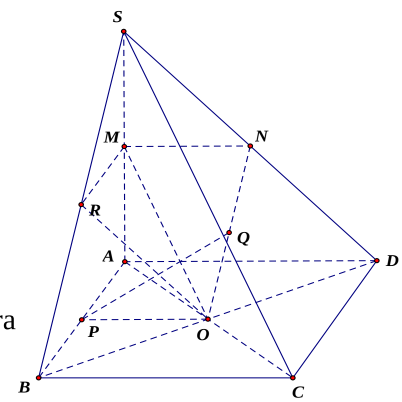
Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

a) Chứng minh rằng : $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi P, Q , R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh : PQ ∥ (SBC), (MOR) ∥ (SCD)

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$:



Trong hai tam giác SAC và SDB có

OM ∥ SC và ON ∥ SB (đường trung bình của tam giác)

Có $\begin{cases} OM, ON \subset (OMN) \\ SB\ ,\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$.

b) Chứng minh : PQ ∥ (SBC)

Có OP ∥ AD mà AD ∥ MN suy ra OP ∥ MN . Suy ra $P \in (OMN) \Rightarrow PQ \subset (OMN)$

Vì $(OMN) \parallel (SBC) \Rightarrow PQ \parallel (SBC)$

Chứng minh : $(MOR) \parallel (SCD)$

Ta có $MR \parallel AB$ mà $AB \parallel CD$, suy ra $MR \parallel CD$. Và có $OM \parallel SC$

Vì $MR, OM \subset (OMR)$ và $CD, SC \subset (SCD)$. Từ đó suy ra $(OMN) \parallel (SCD)$

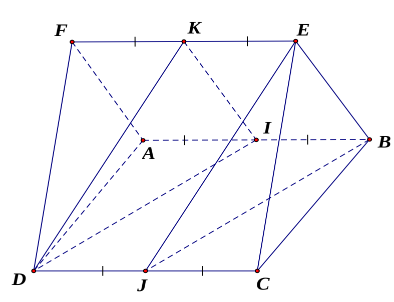
Câu 2: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh:

a) $(ADF) \parallel (BCE)$ b $(DIK) \parallel (JBE)$

LỜI GIẢI

a) mp(ADF)$\parallel$ mp(BCE):

Ta có $AF \parallel BE$ và $AD \parallel BC$. Mà



$AF, AD \subset (ADF)$ và $BE, BC \subset (BCE)$. Từ đó suy ra $(ADF) \parallel (BCE)$

b) mp (DIK)∥ mp(JBE)

Dễ dàng chứng minh hai tứ giác BIDJ và BIKE là hình bình hành. Từ đó suy ra $DI \parallel BJ$ và

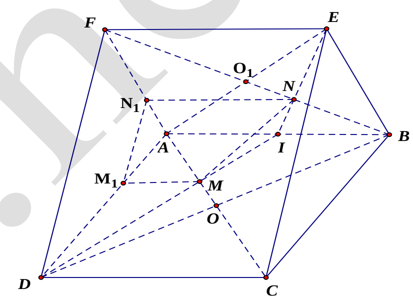
$IK \parallel BE$. Suy ra mp (DIK)∥ mp(JBE).

Câu 3: Cho các hình bình hành ABCD , ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M,N sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua M , N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1. Chứng minh rằng :

a) $MN \parallel DE$ b) $M_1N_1 \parallel (DEF)$ c) $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $MN \parallel DE$: Gọi I trung điểm của AB .



Ta có

$$\begin{cases} AC = 3AM \\ AC = 2AO \end{cases} \Rightarrow 3AM = 2AO \Rightarrow AM = \frac{2}{3}AO.$$

Ngoài ra AM là đường trung tuyến của tam giác ABD từ đó suy ra M trọng tâm của tam giác ABD. Chứng minh hoàn toàn tượng tự N là trọng tâm của tam giác EAB. Suy ra ba đường thẳng DM , EN , AB đồng qui tại điểm I

Trong ΔIDE, theo tính chất trọng tâm có $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE$.

b) Chứng minh $M_1N_1 \parallel (DEF)$ **:**

Ta có : $NN_1 \parallel AI \Rightarrow \frac{AN_1}{N_1F} = \frac{IN}{NE} = \frac{1}{2}$ (3) .

Tương tự có $MM_1 \parallel AI \Rightarrow \frac{AM_1}{M_1D} = \frac{IM}{MD} = \frac{1}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AN_1}{N_1F} = \frac{AM_1}{M_1D} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1N_1 \parallel DF$.

Vì $DF \subset (DEF) \Rightarrow M_1N_1 \parallel (DEF)$

c) Chứng minh $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$ **:**

Có $MN \parallel DE$ và $M_1N_1 \parallel DF$, mà MN, $M_1N_1 \subset (MNN_1M_1)$ và DE, $DF \subset (DEF)$.

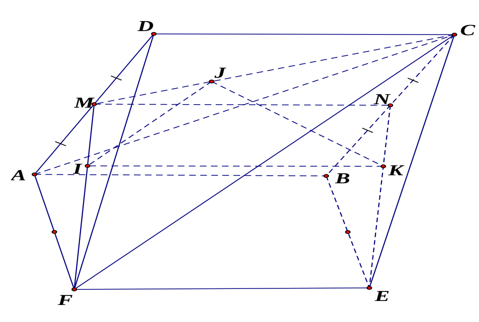
Từ đó suy ra $(MNN_1M_1) \parallel (DEF)$.

Câu 4: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE . Chứng minh (IJK)∥ (CDFE)

LỜI GIẢI

Xét tam giác MFC ta có :

$\frac{MI}{MF} = \frac{MJ}{MC} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)



$\Rightarrow IJ \parallel FC \quad (1)$

Xét hình bình hành MNEF có :

$\frac{MI}{MF} = \frac{NK}{NE} = \frac{1}{3} \Rightarrow IK \parallel FE \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được

$\begin{cases} IJ \parallel FC \text{ , } IK \parallel FE \\ IJ, IK \subset (IJK) \text{ , } IJ \cap IK = I \\ FC \text{ , } FE \subset (CDFE) \end{cases} \Rightarrow mp(IJK) \parallel mp(CDFE)$

Kết luận $(IJK) \parallel (CDFE)$.

Câu 5: Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax , By , Cz , Dt. Sao cho chúng cắt mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A' , B' , C' , D'.

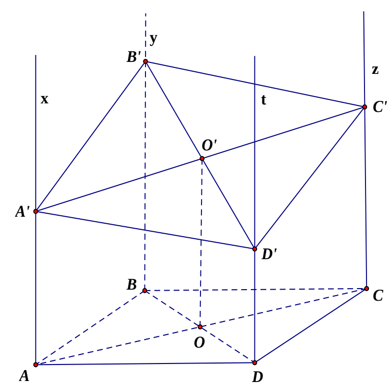
a) Chứng minh $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$

b) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

c) Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $(Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$ và $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$



Có $\begin{cases} Ax \parallel Dt \\ Dt \subset (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow Ax \parallel (Cz, Dt) \quad (1)$, và

$\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (Cz, Dt) \quad (2)$

Từ (1) và (2) và $Ax, AB \subset (Ax, By) \Rightarrow (Ax, By) \parallel (Cz, Dt)$

Chứng minh tương tự suy ra $(Ax, Dt) \parallel (By, Cz)$.

b) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, By) = A'B' \\ (\alpha) \cap (Cz, Dt) = C'D' \\ (Ax, By) \parallel (Cz, Dt) \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel C'D' \quad (1)$, và

$\begin{cases} (\alpha) \cap (Ax, Dt) = A'D' \\ (\alpha) \cap (By, Cz) = B'C' \\ (Ax, Dt) \parallel (By, Cz) \end{cases} \Rightarrow A'D' \parallel B'C' \quad (2)$