Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O.M, N là trung điểm SA, SD.

a). Xác định giao điểm của NC và (OMD)

b). Xác định thiết diện của hình chóp với $mp\alpha$ qua MO và $\parallel SC$.

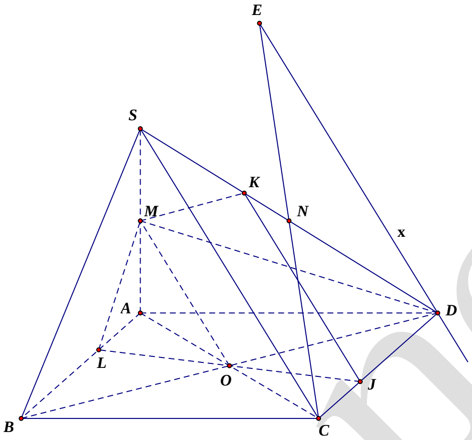
LỜI GIẢI

a) Có $\begin{cases} D=(OMD)\cap(SCD) \\ OM\parallel SC \\ OM\subset(OMD), SC\subset(SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (OMD)\cap(SCD)=Dx\parallel OM\parallel SC$

Trong mp(SCD) gọi $E=CN\cap Dx$, có

$\begin{cases} E\in CN \\ E\in Dx\subset(OMD) \end{cases}\Rightarrow E=CN\cap(OMD)$.



Hình 1

b)

Trường hợp 1:

Gọi $d=(\alpha)\cap(SCD)$, có $\begin{cases} d=(\alpha)\cap(SCD) \\ OM\parallel SC \\ OM\subset(\alpha); SC\subset(SCD) \end{cases}\Rightarrow d\parallel OM\parallel SC$.

Trong m(SCD) gọi J, K lần lượt là giao điểm của d với CD và SD (1).

Trong mp(ABCD) gọi L là giao điểm của OJ và AB (2).

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác MKJL.

Trường hợp 2:

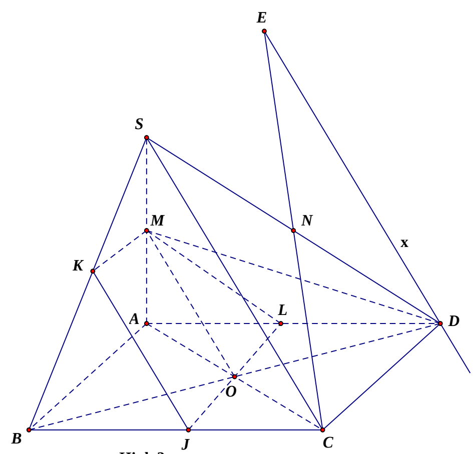
Gọi $d=(\alpha)\cap(SBC)$, có

$\begin{cases} d=(\alpha)\cap(SBC) \\ OM\parallel SC \\ OM\subset(\alpha); SC\subset(SBC) \end{cases}\Rightarrow d\parallel OM\parallel SC$.

Trong m(SBC) gọi J, K lần lượt là giao điểm của d với BC và SB (1).

Trong mp(ABCD) gọi L là giao điểm của OJ và AD (2).

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác MKJL.



Hình 2

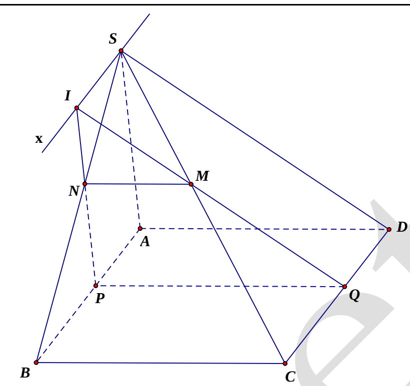
Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a; SAD là tam giác vuông cân tại A; M là một điểm trên SC; (α) là qua M và song song với SA và BC cắt các cạnh SB, AB, CD lần lượt tại N, P, Q.

a) Hình MNPQ là hình gì? Tính diện tích MNPQ trong trường hợp SAC là tam giác vuông tại $A, SM=x\left(0<x<a\sqrt{3}\right)$

b) CM: $(\alpha) \parallel SD$

c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp các điểm I khi M di động SC.

LỜI GIẢI



Có $\begin{cases}(\alpha)\cap(SBC) = MN \\ BC \parallel (\alpha); BC \subset (SBC)\end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$ (1).

Có $\begin{cases}(\alpha)\cap(SAB) = NP \\ SA \parallel (\alpha); SA \subset (SAB)\end{cases} \Rightarrow NP \parallel SA$ (2).

Có $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABCD) = PQ \\ BC \parallel (\alpha); BC \subset (ABCD)\end{cases} \Rightarrow PQ \parallel BC$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác MNPQ là hình thang, vì có $MN \parallel PQ \parallel BC$ $(*)$.

Ngoài ra có $\begin{cases} NP \parallel SA \\ PQ \parallel AD \parallel BC \Rightarrow NP \perp PQ \quad (**) \\ SA \perp AD \end{cases}$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra MNPQ là hình thang vuông tại N và P.

Vì ΔSAC vuông tại A nên có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSBC có $\frac{SN}{SB} = \frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SC} = \frac{x}{a\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{x}{\sqrt{3}}$ và

$\frac{BN}{BS} = 1 - \frac{SN}{SB} = 1 - \frac{x}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}}$.

Trong ΔSAB có $\frac{PN}{SA} = \frac{BN}{BS} = \frac{a\sqrt{3} - x}{a\sqrt{3}} \Rightarrow PN = \frac{a\sqrt{3} - x}{\sqrt{3}}$.

Vì ABCD là hình vuông và $PQ \parallel BC \Rightarrow PQ = BC = a$.

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN)PN}{2} = \frac{\left(a + \frac{x}{\sqrt{3}}\right)\frac{a\sqrt{3} - x}{\sqrt{3}}}{2}$$

b) Có $\frac{CM}{CS} = \frac{BN}{BS} = \frac{BP}{BA}$, ngoài ra $\frac{BP}{BA} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow \frac{CM}{CS} = \frac{CQ}{CD} \Rightarrow MQ \parallel SD$ (Theo định lý đảo Ta lét).

Mà $MQ \subset (\alpha) \Rightarrow SD \parallel (\alpha)$.

c) Có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$.

Có $MQ \cap NP = I$, có $\begin{cases} I \in NP \subset (SAB) \\ I \in MQ \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$. Hay $I \in Sx$. Suy ra I chạy trên tia Sx cố định khi M di động trên SC.

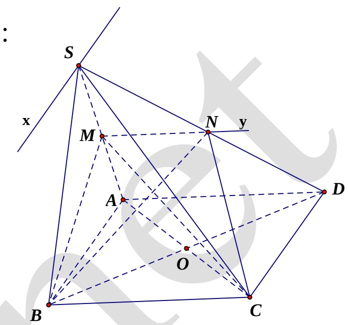
Câu 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $AB = 2a, BC = 3a$, biết hai tam giác SAB và SCD đều. Điểm M thuộc cạnh SA và $SM = x\left(0 < x < 2a\right)$. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD); (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh tứ giác BMNC là hình thang cân.

c) Tính diện tích tứ giác BMNC theo a và x.

LỜI GIẢI



a) Có S, O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Do đó:

$(SAC) \cap (SBD) = SO$

Có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$

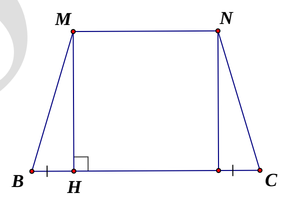
b) Có $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (MBC); AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = My \parallel BC \parallel AD$.

Trong (SAD) gọi $N = SD \cap My \Rightarrow N = SD \cap (MBC)$.

Từ đó suy ra BCNM là hình thang (với $MN \parallel BC$).

Có $MN \parallel AD \Rightarrow \dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{x}{2a} \Rightarrow MN = \dfrac{x}{2a}.AD = \dfrac{3x}{2}$.

Xét tam giác SBM và tam giác SCN có:



$\begin{cases} SB = SC \\ SM = SN \\ BSM = CSN = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta SBM = \Delta SCN \Rightarrow BM = CN$

Tứ giác BMNC có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN < BC \Rightarrow BMNC \\ BM = CN \end{cases}$ là hình thang cân.

c) Áp dụng định lý cosin vào ΔSBM ta có:

$BM^2 = SB^2 + SM^2 - 2SB.SM\cos 60^0$

$= 4a^2 + x^2 - 2.2ax.\dfrac{1}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{4a^2 + x^2 - 2ax} = CN$

Dựng $MH \perp BC$ tại H. Ta có $BH = \dfrac{BC - MN}{2} = \dfrac{3a - \dfrac{3x}{2}}{2} = \dfrac{6a - 3x}{4}$.

$MH = \sqrt{BM^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 + x^2 - 2ax - \left(\dfrac{6a - 3x}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{28a^2 + 7x^2 + 4ax}$

Diện tích tứ giác BMNC là:

$$S = \dfrac{\left(MN + BC\right)MH}{2} = \dfrac{\left(\dfrac{3x}{2} + 3a\right)\dfrac{1}{4}\sqrt{28a^2 + 7x^2 + 4ax}}{2} = \dfrac{6a + 3x}{16}.\sqrt{28a^2 + 7x^2 + 4ax}$$

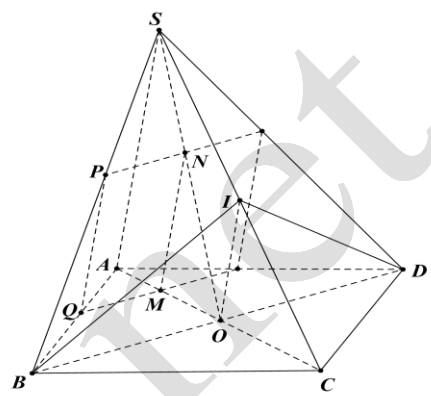
Câu 19: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho SB = SD. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với AM = x. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO , SB , AB tại N, P , Q .

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Cho SA = a. Tính diện tích MNPQ theo a và x. Tính x để diện tích lớn nhất.

LỜI GIẢI

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?



Ta có: SB = SD $\Rightarrow \Delta SBC = \Delta SDC(c.c.c)$

$\Rightarrow SCB = SCD$

Gọi I là trung điểm SC thì $\Delta IBC = \Delta IDC(c.g.c)$

$\Rightarrow IB = ID$.

Vậy ΔIBD cân tại I $\Rightarrow IO \perp BD$.

Mà OI // SA $\Rightarrow SA \perp BD$ (*)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, BD \\ BD \subset (ABO) \\ (\alpha) \cap (ABO) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ \,//\, BD$ (1)

Tương tự: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, BD \\ BD \subset (SBO) \\ (\alpha) \cap (SBO) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \,//\, BD$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra MQ // NP // BD (3)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAO) \\ (\alpha) \cap (SAO) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, SA$ (4)

Tương tự : $\begin{cases} (\alpha) \,//\, SA \\ SA \subset (SAB) \\ (\alpha) \cap (SAB) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \,//\, SA$ (5)

Từ (4) và (5), suy ra MN // PQ // SA (6)

Từ (3), (6) và (*), suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x:

Ta có: $S_{MNPQ} = MQ.MN$.

<u>Tính MQ</u>: Xét tam giác AQM:

Ta có: $A = 45^0$, $Q = 45^0$, $M = 90^0 \Rightarrow \Delta AQM$ cân tại M. Vậy MQ = AM = x.

<u>Tính MQ</u>: Xét tam giác SAO:

Ta có: MN // SA $\Rightarrow \dfrac{MN}{AS} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow MN = AS.\dfrac{OM}{OA} = a.\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\frac{a.\sqrt{2}}{2}} = a - x.\sqrt{2}$

$\Rightarrow\ S_{MNPQ} = MQ.MN = x.(a - x.\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x.\sqrt{2}(a - x.\sqrt{2})$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $x.\sqrt{2}$ và ($a - x.\sqrt{2}$):

$$x\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \le \left(\frac{x\sqrt{2} + a - x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \le \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow S_{MNPQ} \le \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x.\sqrt{2} = a - x.\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2.\sqrt{2}} = \dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm AO

Vậy: $x = \dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

Câu 20: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trên cạnh AB lấy một điểm M với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC, và CD lần lượt tại N, P, Q.

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp. Thiết diện là hình gì?

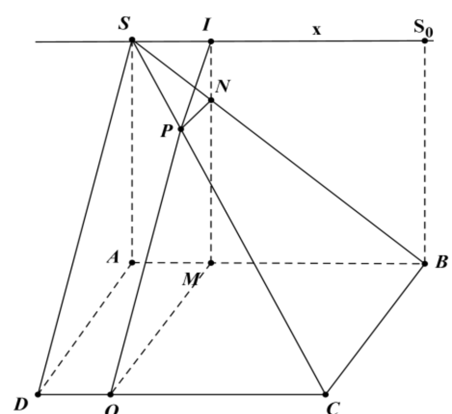
b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.

c) Cho $SAD = 90^0$ và SA = a. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

Tìm x để diện tích của thiết diện bằng $\dfrac{3a^2}{8}$.

LỜI GIẢI

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp:



Vì mp $(\alpha) // (SAD) \Rightarrow$ mp (α) // với mọi đường thuộc mặt phẳng (SAD).

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABCD).

Có M là điểm chung của hai mặt phẳng mp (α) và mp (ABCD), vì mp(α) // AD, nên giao tuyến của chúng qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt CD tại điểm Q.

Tương tự:

- Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAB) có M là điểm chung và $(\alpha) // SA$, nên giao tuyến của chúng là MN với MN // SA và $N \in SB$.
- Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBC) có N là điểm chung và $(\alpha) // AD // BC$, nên giao tuyến của chúng là NP với NP // BC và $P \in SC$ (2)
- Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SCD) có 2 là điểm chung là P, Q.

Vậy: giao tuyến của chúng là PQ.

Suy ra: thiết diện cần tìm là MNPQ.

Từ (1) và (2) thì MQ // PN. Vậy MNPQ là hình thang.