$\Rightarrow H \in (AMN) \cap (SBD)$ (1). Ngoài ra $N \in (AMN) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (SBD) = NH$.

Suy ra điểm I cần tìm là giao điểm của NH và SD.

Có H là trọng tâm của tam giác SAC.

Trong ΔSOB có $\dfrac{OH}{OS} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NH \parallel SB$.

Trong ΔDBS theo Ta let có $\dfrac{DN}{DB} = \dfrac{DI}{DS} = \dfrac{2}{3}$. Do đó $\dfrac{IS}{ID} = \dfrac{1}{2}$.

Trong ΔSCQ có IM là đường trung bình của tam giác nên $IM \parallel CQ$, mà $IM \subset (AMN)$ do đó $CQ \parallel (AMN)$.

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD.

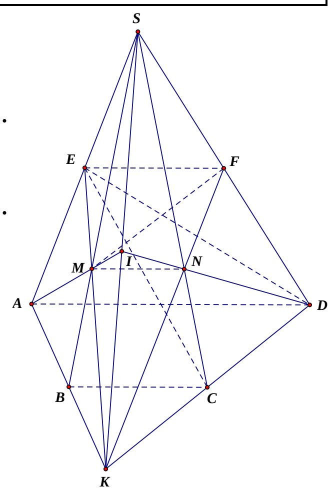
a) Tìm giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE).

b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác EFNM là hình gì?

c) Chứng minh các đường thẳng AM, DN, SK đồng quy.

d) Cho biết $AD = 2BC$. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF.

LỜI GIẢI



a) Có $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong mp(SAB), gọi $M = KE \cap SB$, có $KE \subset (CDE)$.

Do đó $SB \cap (CDE) = M$.

b) Trong mp(SCD), gọi $N = KF \cap SC$, có $KF \subset (EFM)$.

Do đó $SC \cap (EFM) = N$.

Có $\begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF \parallel BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \parallel EF \parallel BC$.

Suy ra tứ giác EFNM là hình thang.

c) Trong mp(ADNM), gọi $I = AM \cap DN$. Mà $\begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, hay $I \in SK$. Kết luận 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I.

d) Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD. Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK. Do đó

$MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống hai đáy MN và EF dễ thấy $h_1 = \frac{2}{3}h_2$. Vậy $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN.h_1}{\frac{1}{2}EF.h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF.\frac{2}{3}h_2}{EF.h_2} = \frac{4}{9}$.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD.

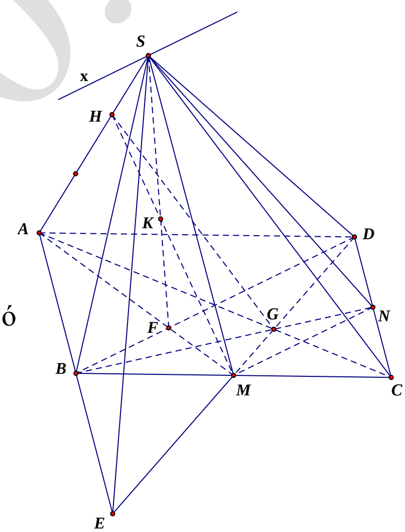
a) Tìm giao tuyến của $mp(SMD)$ và $mp(SAB)$.

b) Tìm giao tuyến của $mp(SMN)$ và $mp(SBD)$.

c) H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD). Tính $\frac{KH}{KM}$.

d) G là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $HG \parallel (SBC)$

LỜI GIẢI



a) Có $S \in (SAB) \cap (SMD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $E = AB \cap DM$, có

$$\begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in DM \subset (SDM) \end{cases}$$

$\Rightarrow E \in (SAB) \cap (SMD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAB) \cap (SMD) = SE$.

b) Có MN là đường trung bình của ΔBCD, do đó $MN \parallel BD$

Có $\begin{cases} S \in (SMN) \cap (SBD) \\ MN \parallel BD; MN \subset (SMN), BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SMN) \cap (SBD) = Sx \parallel MN \parallel BD$.

c) Bước 1: Chọn mp(SAM) chứa HM.

Bước 2: Tìm giao tuyến của mp(SAM) và (SBD).

Có $S \in (SAM) \cap (SBD)$ (3). Trong mp(ABCD) gọi $F = AM \cap BD$, có

$$\begin{cases} F \in AM \subset (SAM) \\ F \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAM) \cap (SBD) \ (4).$$

Từ (3) và (3) suy ra $(SAM) \cap (SBD) = SF$. Vậy điểm K cần tìm là giao điểm của giao tuyến SF với đường thẳng HM.

Dễ thấy F là trọng tâm của ΔABC. Do đó trong ΔSAM có $\frac{AH}{AS}=\frac{AF}{AM}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow HF \parallel SM$, như vậy có $\Delta KHF \sim \Delta KMS(g.g) \Rightarrow \frac{KH}{KM}=\frac{HF}{SM}=\frac{2}{3}$.

d) Dễ thấy G là trọng tâm của ΔBCD. Do đó có $\frac{AG}{AC}=\frac{AO+OG}{2OC}=\frac{2}{3}$.

Trong ΔSAC có $\frac{AH}{AS}=\frac{AG}{AC}=\frac{2}{3} \Rightarrow HG \parallel SC$, mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow HG \parallel (SBC)$.

Câu 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy (ABCD) là hình thang. AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh OG // mp(SBC).

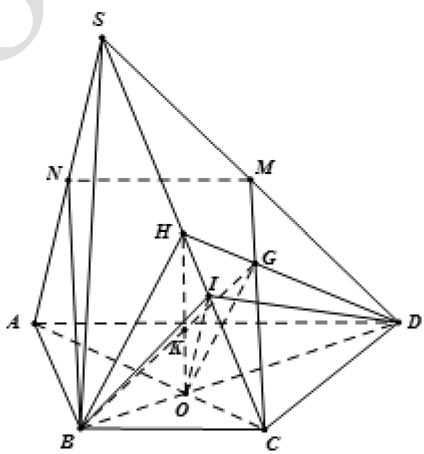
b) Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Chứng minh CM // mp(SAB).

c) Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $SC=\frac{3}{2}SI$.

Chứng minh: SA // mp(BID).

d) Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC). Tính $\frac{KB}{KG}$

LỜI GIẢI



Vì AD // $BC \Rightarrow \Delta OBC \sim \Delta ODA\ (g.g)$

$\frac{OB}{OD}=\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$

a) Gọi H trung điểm của SC.

Trong ΔDHB có: $\frac{DG}{DH}=\frac{DO}{DB}=\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow OG$ // BH.

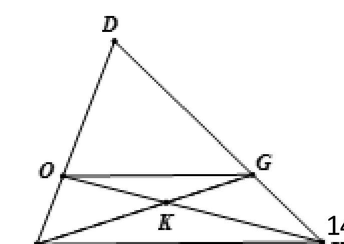
Ta có $\begin{cases} OG \text{ // } BH \\ BH \subset (SBC), OG \not\subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow OG$ // mp(SBC).

b) Gọi N trung điểm của SA. Ta có MN là đường trung bình của ΔSAD.

Nên $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (1)

Theo đề bài có $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (2)



Hình 2

Từ (1) và (2) có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NM}$.

Vậy tứ giác BCMN là hình bình hành.

Ta có: $\begin{cases} CM \,//\, BN \\ BN \subset (SAB), CM \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \,//\, mp(SAB)$.

c). Trong ΔSAC có: $\dfrac{CO}{CA} = \dfrac{CI}{CS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OI \,//\, SA$.

Có: $\begin{cases} SA \,//\, OI \\ OI \subset (BID), SA \not\subset (BID) \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, mp(BID)$.

d). Ta có O và H là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BDH) và (SAC).

Vậy $(SAC) \cap (BDH) = OH$.

Trong mp (BDH), gọi $K = BG \cap OH \Rightarrow K = BG \cap (SAC)$.

Ta có: $\Delta KOG \sim \Delta KHB (g.g) \Rightarrow \dfrac{KG}{KB} = \dfrac{OG}{HB} = \dfrac{2}{3}$ (vì $\dfrac{OG}{BH} = \dfrac{DG}{DH} = \dfrac{2}{3}$)

Kết luận: $\dfrac{KB}{KG} = \dfrac{3}{2}$.

<u>DẠNG 2:</u> Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) và song song với một dường thẳng cho trước. Tính diện tích thiết diện.

Dạng toán này các bạn phải nhớ kỹ tính chất:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (P) \\ (\alpha) \parallel d, \; d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (P) = Mx \; (Mx \parallel d)$$

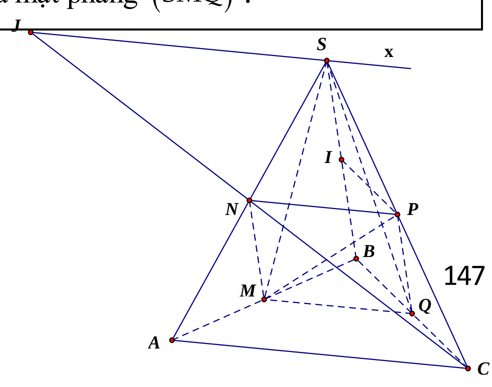
Câu 1: Cho hình chóp S.ABC, gọi M, P và I lần lượt là trung điểm của AB, SC và SB. Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q.

a) Chứng minh đường thẳng BC song song với mặt phẳng (IMP).

b) Xác định thiết diện của (α) và hình chóp. Thiết diện này là hình gì?

c) Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ).

LỜI GIẢI



a) Có IP là đường trung bình của $\Delta SBC \Rightarrow IP \parallel BC$

mà $IP \subset (IMP) \Rightarrow BC \parallel (IMP)$.

b) Có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ (ABC) \supset AC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel AC, Q \in BC$.

Có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (SAC) \supset AC \parallel (\alpha) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = PN \parallel AC, N \in SA$.

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành MNPQ. Thật vậy dễ dàng chứng minh Q, N lần lượt là trung điểm của BC và SA. Do đó $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) Chọn mặt phẳng (SAC) chứa NC. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SMQ):

Có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMQ) \\ AC \parallel MQ; AC \subset (SAC), MQ \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SMQ) = Sx \parallel AC \parallel MQ$

Trong mp(SAC) gọi $J = CN \cap Sx$, có $\begin{cases} J \in CN \\ J \in Sx \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow J = CN \cap (SMQ)$.

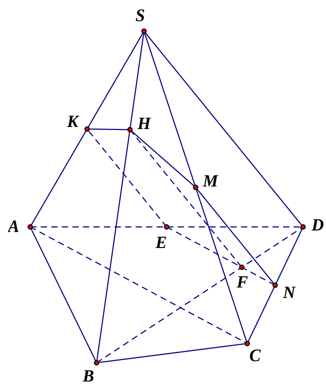
Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC.

a) Tìm giao tuyến của (α) với $mp(ABCD)$.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với $mp(\alpha)$.

c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AC \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = NE \parallel AC; E \in AD$.

b) Có MN là đường trung bình của $\Delta SCD \Rightarrow MN \parallel SD$.

Trong mp(ABCD) gọi $F = BD \cap NE$.

Có $\begin{cases} F \in (\alpha) \cap (SBD) \\ MN \parallel SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Fx \parallel MN \parallel SD$

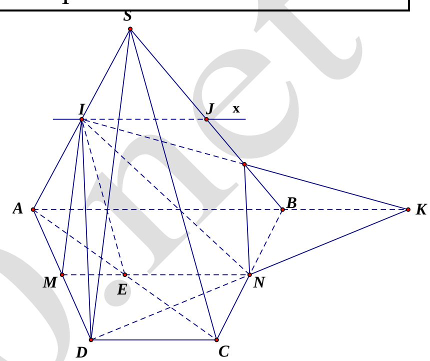
Trong mp(SBD) gọi $H = Fx \cap SB$, vì $\begin{cases} H \in SB \\ H \in Fx \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow H = SB \cap (\alpha)$.

c) Có $\begin{cases} E \in (\alpha) \cap (SAD) \\ MN \parallel SD; MN \subset (\alpha), SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = EK \parallel SD; K \in SA$.

Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác MNEKH.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA.
a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).
b). Tìm giao điểm của SB và (IMN).
c). Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI



a) Có $I \in (IMN) \cap (SAC)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi

$E = MN \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in MN \subset (IMN) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (IMN) \cap (SAC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(IMN) \cap (SAC) = EI$.

b) Có MN là đường trung bình của hình thang ABCD $\Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$.

Có $\begin{cases} I \in (IMN) \cap (SAB) \\ MN \parallel AB \\ MN \subset (IMN); AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (IMN) \cap (SAB) = Ix \parallel MN \parallel AB$.

c) Trong mp(SAB) gọi $J = Ix \cap SB \Rightarrow \begin{cases} J \in SB \\ J \in Ix \subset (IMN) \end{cases} \Rightarrow J = SB \cap (IMN)$.

d) $I \in (IDN) \cap (SAB)$ (3)

Trong mp(ABCD) gọi $K = DN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} K \in DN \subset (IDN) \\ K \in AB \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (IDN) \cap (SAB)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(IDN) \cap (SAB) = IK$

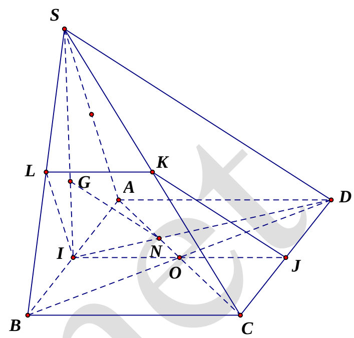
Trong mp(SAB) gọi $P = IK \cap SB \Rightarrow$ thiết diện cần tìm là tứ giác MNPI.

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm ΔSAB; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho: $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$; I là trung điểm AB.

1) Chứng minh: $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

2) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với SA và BC. Mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K. Tìm hình tính thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI



a) Có OI là đường trung bình của tam giác ABD nên $OI \parallel AD$ mà

$AD \subset (SAD) \Rightarrow OI \parallel (SAD)$.

Có $AN = \frac{1}{3}AC \Rightarrow AN = \frac{2}{3}AO \Rightarrow N$ là trọng tâm của tam giác ABD.

Có $\frac{IN}{ID} = \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$

(Tính chất trọng tâm) $\Rightarrow NG \parallel SD$ (Định lý đảo Talét).

b) giao tuyến của mp(α) và (ABCD) qua O và song song với BC, giao tuyến này cắt CD tại J.

Có $\begin{cases} LI = (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \parallel SA; SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow LI \parallel SA$.

Có $\begin{cases} LK = (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) \parallel BC; BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow LK \parallel BC$.

Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là hình thang IJKL (với $IJ \parallel KL$).

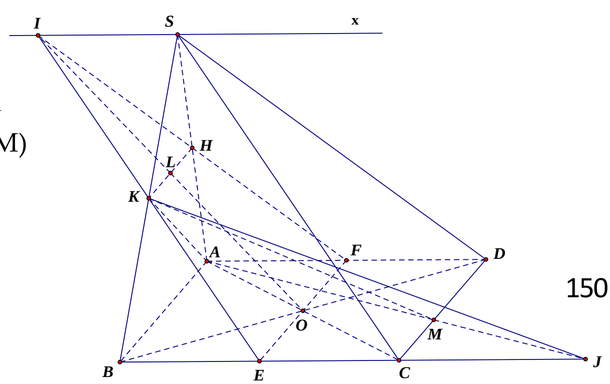
Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. M là điểm thuộc cạnh CD(M khác C và D).

a). Tìm giao tuyến của: (KAM) và (SBC), (SBC) và (SAD).

b). Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp S.ABCD. Thiết diện là hình gì?

c). Gọi L là trung điểm đoạn HK. Tìm giao điểm I của OL với (SBC). Chứng tỏ $SI \parallel BC$.

LỜI GIẢI



a) Có $K \in (KAM) \cap (SBC)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $J = AM \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in AM \subset (KAM) \\ J \in BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (KAM) \cap (SBC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra
$(KAM) \cap (SBC) = KJ$.

Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD); BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$.

b) Có $\begin{cases} O \in (KHO) \cap (ABCD) \\ HK \parallel AB \\ HK \subset (KHO); AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (KHO) \cap (ABCD) = Oy \parallel AB \parallel HK$.

Trong mp(ABCD) gọi E, F lần lượt là giao điểm của BC và AD với Oy. Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang HKEF (Với $HK \parallel EF$).

c) Trong mp(HKEF) gọi $I = EK \cap OL \Rightarrow \begin{cases} I \in OL \\ I \in EK \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I = OL \cap (SBC)$.

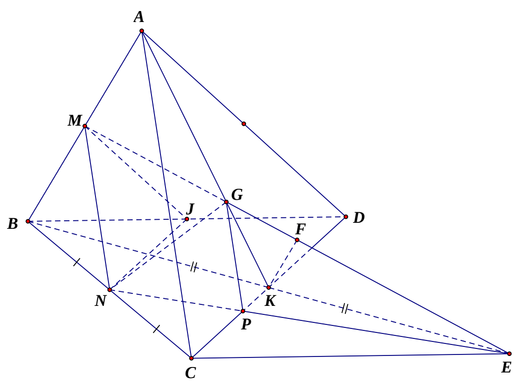
Câu 6: Cho tứ diện ABCD, M, N là trung điểm của cạnh AB, BC. G là trọng tâm ΔACD.

a) Tìm giao điểm E của MG và (BCD).

b) Xác định giao tuyến d của (MNG) và (BCD), d cắt CD tại P. Chứng minh $GP \parallel (ABC)$.

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và $\parallel AD$. Tìm thiết diện của (α) với tứ diện ABCD.

LỜI GIẢI



a) Gọi K trung điểm của CD. Trong mp(ABK) gọi $E = MG \cap BK$

$\Rightarrow \begin{cases} E \in MG \\ E \in BK \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E = MG \cap (BCD)$.

b) Có N và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (MNG). Do đó $(BCD) \cap (MNG) = EN$.

Trong mp(ABK) dựng $KF \parallel AB, F \in ME$, nên $\Delta GKF \sim \Delta GAM (g.g)$

$\Rightarrow \frac{GK}{GA} = \frac{KF}{AM} \Leftrightarrow \frac{KF}{AM} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{KF}{BM} = \frac{1}{2} \Rightarrow KF$ là đường trung bình của tam giác BEM nên K trung điểm của BE.

Trong tam giác BCE có P là giao điểm của hai đường trung tuyến CK và EN, nên P là trọng tâm của tam giác BCE.

Từ đó có $\frac{KG}{KA} = \frac{KP}{KC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GP \parallel AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow GP \parallel (ABC)$.

c) Có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel AD; AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MJ, J \in BD$. Từ đó thiết diện cần tìm là tam giác MNJ.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang với AD là đáy lớn. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, AB, CD.

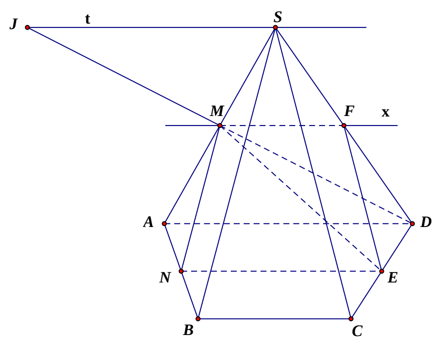
a) Chứng minh rằng: $EN \parallel (SBC), (MNE) \parallel (SBC)$.

b) Tìm giao điểm F của SD với mặt phẳng (MNE).

c) Chứng minh $SC \parallel (MNE)$. Đường thẳng DM có song song với (SBC) hay không? Giải thích.

d) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với (MNE). Thiết diện đó là hình gì? Tại sao?

LỜI GIẢI



a) Có NE là đường trung bình của hình thang ABCD $\Rightarrow NE \parallel BC \parallel AD$, mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow NE \parallel (SBC)$.

Có $\begin{cases} NE \parallel BC, NM \parallel SB \\ NE, MN \subset (MNE); BC, SB \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (MNE) \parallel (SBC)$.

b) Chọn mp(SAD) chứa SD. Tìm giao tuyến của (SAD) và (MNE):

Có $\begin{cases} M \in (MNE) \cap (SAD) \\ NE \parallel AD \\ NE \subset (MNE), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (MNE) \cap (SAD) = Mx \parallel NE \parallel AD$. Điểm F cần tìm là giao điểm của Mx với SD.

c) Theo câu a). có $(MNE) \parallel (SBC)$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \parallel (MNE)$.

Có $\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (SAD) = St \parallel BC \parallel AD$. Trong mp(SAD) gọi $J = DM \cap St$, vì $St \subset (SBC) \Rightarrow J \in (SBC)$. Từ đó suy ra $DM \cap (SBC) = J$. Kết luận DM không song song với mp(SBC).

d) Từ cách dựng điểm của câu b). suy ra thiết diện cần tìm là hình thang MNEF với $MF \parallel NE$.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành, M là điểm thuộc cạnh $DC, mp(\alpha)$ qua M và $\parallel BD;\ SC$. (α) cắt BC, SB, SA, SD tại N, P, Q, R.

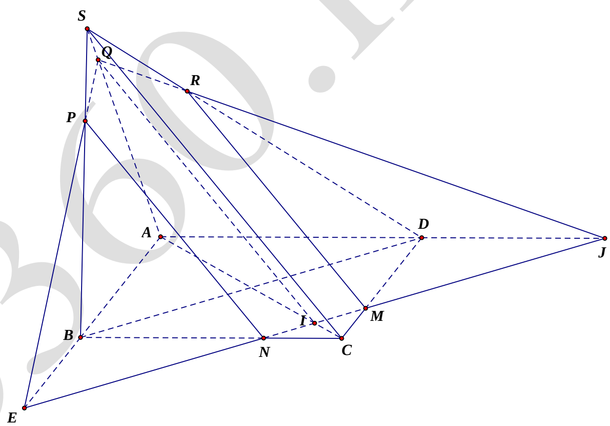
a) Chứng minh: $MN \parallel BD$.

b) Chứng minh: $SC \parallel MR;\ SC \parallel NP$.

c) Xác định giao điểm I của AC và (α). Chứng minh: $IQ \parallel SC$

d) RQ cắt MN tại J. Chứng minh: A, D, J thẳng hàng.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ BD \parallel (\alpha) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \parallel BD$.

b) Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SCD) = MR \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow SC \parallel MR$.

Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SBC) = NP \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow SC \parallel NP$.

c) Trong mp(ABCD) gọi $I = AC \cap MN$, có $\begin{cases} I \in AC \\ I \in MN \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow I = AC \cap (\alpha)$.

Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAC) = QI \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow QI \parallel SC$.

d) Có $(SAD) \cap (ABCD) = AD$

Có $J = RQ \cap MN$, có $\begin{cases} J \in RQ \subset (SAD) \\ J \in MN \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAD) \cap (ABCD)$. Hay $I \in AD$, vậy 3 điểm A, D, J thẳng hàng.

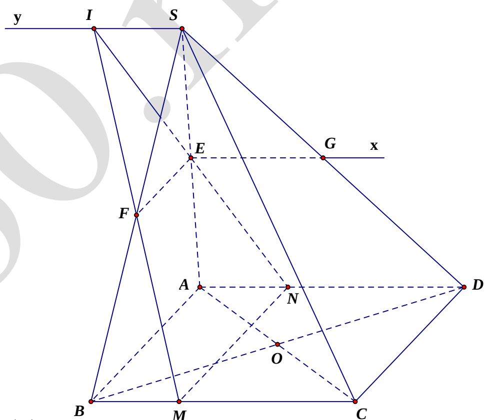
Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm SA, M thuộc cạnh BC.

a) Tìm giao điểm của SD và $mp(EBC)$

b) $Mp\alpha$ chứa ME và $\parallel AB$ cắt SB, AD lần lượt tại F, N. Tứ giác MNEF là hình gì và chứng minh.

c) MF cắt NE tại I. Chứng minh: I di động trên 1 đường cố định khi M di động trên BC.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} E \in (SAD) \cap (BCE) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (BCE) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (BCE) = Ex \parallel AD \parallel BC$.

Trong mp(SAD) gọi $G = Ex \cap SD$, có

$\begin{cases} G \in SD \\ G \in Ex \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow G = SD \cap (BCE)$.

b) Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAB) = EF \\ AB \parallel (\alpha); AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AB$ (1).

Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ AB \parallel (\alpha); AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác MNEF là hình thang (vì $EF \parallel MN \parallel AB$)

c) Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy \parallel AD \parallel BC$.

Có $MF \cap NE = I$, có $\begin{cases} I \in NE \subset (SAD) \\ I \in MF \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$. Hay $I \in Sy$. Suy ra I chạy trên tia Sy cố định khi M di động trên BC.

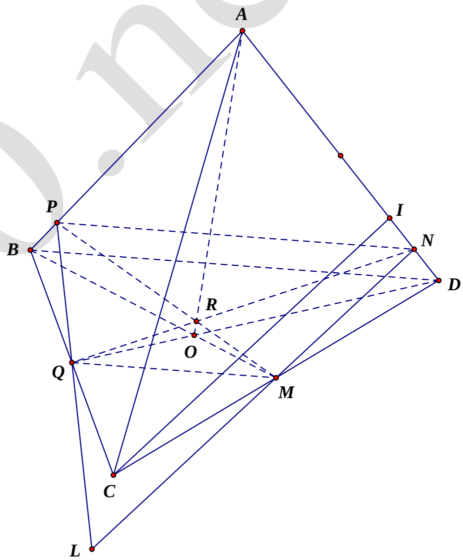
Câu 10: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của CD, I là một điểm thuộc cạnh AD thỏa $IA = 3ID$; (α) là mặt phẳng qua M, (α) song song với CI và BD; (α) cắt các cạnh AD; AB; BC lần lượt tại N; P; Q.

a) Chứng minh $MN \parallel CI$.   b) MNPQ là hình gì?

c) Gọi R là giao điểm của MP và NQ. Tính $\frac{RP}{RM}$ và $\frac{RN}{RQ}$.

d) Khi I di động trên cạnh AD. Chứng minh R chạy trên một đường thẳng cố định.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (ACD) \\ (\alpha) \parallel CI \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CI$;

$\begin{cases} NP = (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel BD \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel BD$ (1) và

$\begin{cases} MQ = (\alpha) \cap (BCD) \\ (\alpha) \parallel BD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel BD$ (2).

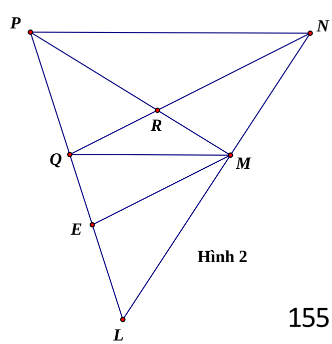
b) Từ (1) và (2) suy ra $NP \parallel MQ$. Kết luận tứ giác MNPQ là hình thang.

c) Áp dụng định lý Ta lét trong hai tam giác ABD và CBD được:

$$\frac{PN}{BD} = \frac{AN}{AD} = \frac{7}{8} \Rightarrow PN = \frac{7}{8}BD;$$

$$\frac{QM}{BD} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow QM = \frac{1}{2}BD, \text{ do đó } \frac{PN}{QM} = \frac{7}{4}.$$

Trong mp(MNPQ) gọi $L = MN \cap PQ$.



Hình 2

Mặt phẳng (MNPQ) được vẽ lại ở hình 2. Dựng $EM \parallel NQ, (E \in PQ)$, có

$$\frac{LE}{LQ} = \frac{LM}{LN} = \frac{LQ}{LP} = \frac{MQ}{NP} = \frac{4}{7}.$$

Vì $\frac{LE}{LQ}=\frac{4}{7}\Rightarrow QE=\frac{3}{7}LQ$; $\frac{LQ}{LP}=\frac{4}{7}\Rightarrow LQ=\frac{4}{7}LP$ và $\frac{QP}{LP}=\frac{3}{7}$. Ngoài ra $\frac{RP}{RM}=\frac{QP}{QE}=\frac{7}{4}$.

Chứng minh hoàn tương tự được $\frac{RN}{RQ}=\frac{7}{4}$.

d) Gọi $O=BM\cap DQ$, vì M, Q lần lượt trung điểm của CD và BC nên hai điểm này cố định. Suy ra O cố định, có $SO=(ABM)\cap(ADQ)$.

Có $R=MP\cap QN\Rightarrow\begin{cases}R\in MP\subset(ABM)\\R\in QN\subset(ADQ)\end{cases}\Rightarrow R\in(ABM)\cap(ADQ)$ hay $R\in SO$ cố định.

Kết luận khi I chạy trên đoạn thẳng AD thì R chạy trên đoạn thẳng AO cố định.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành . Điểm M thuộc cạnh SA thỏa $3MA=2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

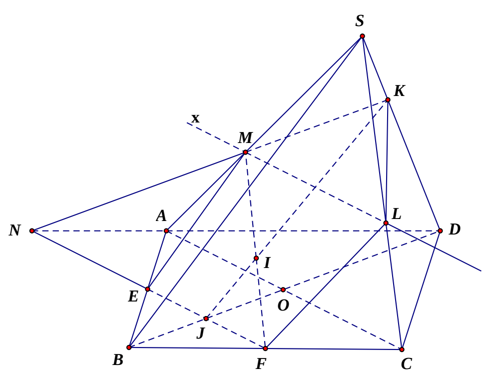
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) .

b) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính $\frac{KS}{KD}$.

c) Tìm giao điểm I của MF với mp(SBD). Tính $\frac{IM}{IF}$.

d) Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) cắt các mặt của hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

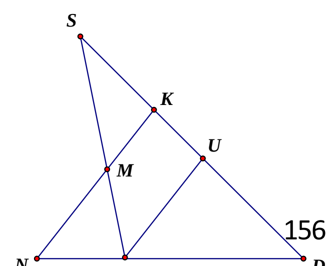


a) Có $\begin{cases}M\in(MEF)\cap(SAC)\\EF\parallel AC; EF\in(MEF), AC\subset(SAC)\end{cases}$

$\Rightarrow(MEF)\cap(SAC)=Mx\parallel EF\parallel AC$.

b) Trong mp(ABCD) gọi $N=EF\cap AD$, có MN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAD). Đường thẳng MN cắt đường thẳng SD tại một điểm, đó chính là giao điểm K cần tìm.

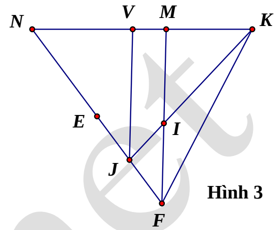
Mặt phẳng (SAD) được vẽ lại ở hình 2. Dễ dàng chứng minh $NA=\frac{1}{2}AD$



Hình 2

Dựng $AU \parallel NK, U \in SD$. Có $\frac{SK}{KU} = \frac{SM}{MA} = \frac{3}{2}$ và $\frac{DA}{AN} = \frac{DU}{UK} = 2$.

Vậy $\frac{KS}{KD} = \frac{\frac{3}{2}KU}{DU+UK} = \frac{\frac{3}{2}KU}{2UK+UK} = \frac{1}{2}$.



Hình 3

c) Theo câu b) có $\frac{SK}{SU} = \frac{KM}{UA} = \frac{3}{5} \Rightarrow KM = \frac{3}{5}UA$ và $\frac{UA}{KN} = \frac{DU}{DK} = \frac{2}{3} \Rightarrow UA = \frac{2}{3}KN$. Do đó $\frac{KM}{KN} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{MN}{MK} = \frac{3}{2}$.

Mặt phẳng (MEF) được vẽ lại ở hình 3. Dựng $JV \parallel FM, V \in NK$. Áp dụng định lý Ta lét trong 2 tam giác NMF và KVJ có: $\frac{NV}{NM} = \frac{NJ}{NF} = \frac{JV}{FM} = \frac{3}{4} \Rightarrow NV = \frac{3}{4}NM$

$, VM = \frac{1}{4}NM$; $\frac{MI}{VJ} = \frac{KM}{KV} = \frac{KM}{KM+MV} = \frac{\frac{2}{3}MN}{\frac{2}{3}MN + \frac{1}{4}MN} = \frac{8}{11} \Rightarrow MI = \frac{8}{11}VJ$.

Kết luận: $\frac{MI}{MF} = \frac{\frac{8}{11}VJ}{\frac{4}{3}VJ} = \frac{6}{11} \Rightarrow \frac{IM}{IF} = \frac{6}{5}$.

d) Trong mp(SAC) gọi $L = Mx \cap SC$. Suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác EFLKM.

Câu 12: Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

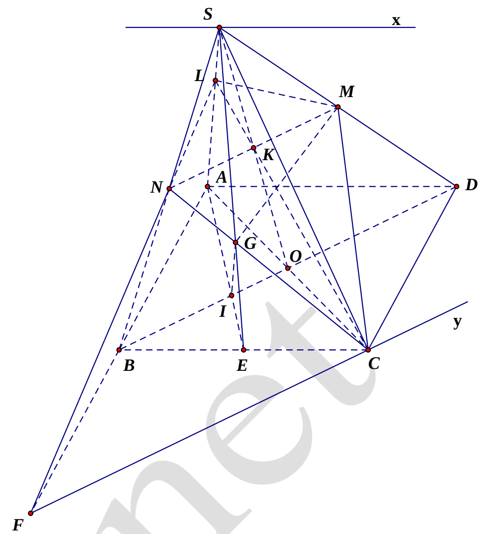
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, điểm I thuộc BD sao cho $BI = \frac{1}{3}BD$. Chứng minh rằng $GI \parallel (SAB)$.

c) Gọi M là trung điểm của SD. Tìm giao điểm L của SA với mặt phẳng (CMG). Chứng minh ba đường thẳng MN, CL, SO đồng quy tại điểm K. Tính $\frac{KL}{KC}$

d) Tìm thiết diện tạo bởi (CMG) với hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC; AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$.

b) Vì I thuộc BD và $BI = \frac{1}{3}BD \Rightarrow I$ là trọng tâm của tam giác ABC. Do đó ba đường thẳng SG, AI, BC đồng quy tại trung điểm E của BC. Có $\frac{EG}{ES} = \frac{EI}{EA} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow IG \parallel SA$ (định lý đảo Ta lét) mà $SA \subset (SAB) \Rightarrow IG \parallel (SAB)$.

c) Gọi N trung điểm của SB, mặt phẳng (CMN) chính là mp(CMG).

Có $\begin{cases} C \in (CMN) \cap (ABCD) \\ MN \parallel BD; MN \subset (CMN), BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (CMN) \cap (ABCD) = Cy \parallel MN \parallel BD$

Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $F = Cy \cap AB$. Có FN là giao tuyến của hai mặt phẳng (CMN) và (SAB). Giao điểm L cần tìm, chính là giao điểm của FN và SA.

Có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Trong mp(CMN) gọi $K = MN \cap CF$, có

$\begin{cases} K \in MN \subset (SBD) \\ K \in CF \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$, có nghĩa $K \in SO$. Kết luận 3 đường thẳng MN, CF và SO đồng quy tại điểm K.

Có MN là đường trung bình của tam giác SBD nên có $\frac{NK}{BO} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2}$. Có BO là đường trung bình của ΔACF, có $\frac{BO}{FC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{NK}{FC} = \frac{1}{4}$.

Trong ΔLCF có $NK \parallel CF \Rightarrow \frac{LK}{LC} = \frac{NK}{FC} = \frac{1}{4}$. Kết luận $\frac{KL}{KC} = \frac{1}{3}$.

d) Theo câu b) và c) thiết diện cần tìm là tứ giác CMLN.

Câu 13: Cho hình chóp S.MNPQ có đáy MNPQ là hình thang (MQ là đáy lớn). Gọi I, J lần lượt trung điểm của SN, SQ. K thuộc đoạn MQ sao cho $MK = 2KQ$.

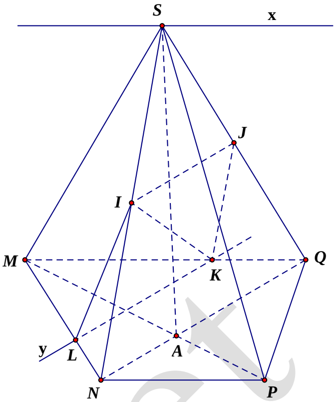
a) Tìm giao tuyến của (SMP) và (SNQ); (SMQ) và (SNP).

b) Chứng minh: $IJ \parallel (MNP)$.

c) Xác định giao điểm L của MN và (IJK). Tính $\frac{LM}{LN}$.

d) Tìm hình dạng của thiết diện tạo bởi $mp(IJK)$ và tứ diện S.MNQ.

LỜI GIẢI



a) $S\in(SMP)\cap(SNQ)$ (1)

Trong mp(MNPQ) gọi $A=MP\cap NQ$,

$\begin{cases}A\in MP\subset(SMP)\\A\in NQ\subset(SNQ)\end{cases}\Rightarrow A\in(SMP)\cap(SNQ)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SMP)\cap(SNQ)=SA$.

Có $\begin{cases}S\in(SMQ)\cap(SNP)\\MQ\parallel NP;MQ\subset(SMQ),NP\subset(SNP)\end{cases}$

$\Rightarrow(SMQ)\cap(SNP)=Sx\parallel MQ\parallel NP$

b) Có IJ là đường trung bình của $\Delta SNQ\Rightarrow IJ\parallel NQ$, mà $NQ\subset(MNP)$

$\Rightarrow(MNP)\parallel IJ$.

c) Có $\begin{cases}L\in(IJK)\cap(MNPQ)\\IK\parallel NQ;IK\subset(IJK),NQ\subset(MNPQ)\end{cases}\Rightarrow(IJK)\cap(MNPQ)=Ky\parallel IK\parallel NQ$.

Suy ra điểm L cần tìm là giao điểm của Ky với MN.

Trong ΔMNQ có $\frac{ML}{LN}=\frac{MK}{KQ}=2$.

d) Theo cách dựng điểm câu c) suy ra thiết diện cần tìm là hình thang IJKL (với $IJ\parallel KL$).

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD.

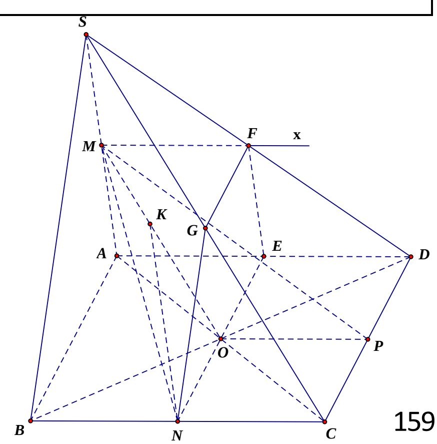
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MOP).

b) Chứng minh $(MOP)\parallel(SBC)$.

c) Gọi K là điểm bất kỳ trên OM. Chứng minh $KN\parallel(SCD)$.

d) Mặt phẳng (α) qua N, song song với SA và CD. Tìm thiết diện của $mp(\alpha)$ và hình chóp. Xác định hình tính thiết diện.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases}M\in(SAD)\cap(OMP)\\AD\parallel OP\\AD\subset(SAD);OP\subset(OMP)\end{cases}$

$\Rightarrow(SAD)\cap(OMP)=Mx\parallel AD\parallel OP$.

b) Có $\begin{cases}OP\parallel BC\\OM\parallel SC\\OM\cap OP=O\\OM,OP\subset(OMP);BC,SC\subset(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow (OPM) \parallel (SBC)$.

c) Có $\begin{cases} ON \parallel CD \\ OM \parallel SC \\ OM \cap ON = O \\ OM, ON \subset (OMN); CD, SC \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (OMN) \parallel (SCD)$

mà $NK \subset (OMN) \Rightarrow NK \parallel (SCD)$.

d). Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD, CD \subset (ABCD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$, nên giao tuyến của mp$(\alpha)$ với mp(ABCD) qua N và song song với CD, giao tuyến này cắt AD tại E.

Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel SA, SA \subset (SAD) \\ E \in (\alpha) \cap (SAD) \end{cases}$, nên giao tuyến của mp$(\alpha)$ với mp(SAD) qua E và song song với SA, giao tuyến này cắt SD tại F.

Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel CD, CD \subset (SCD) \\ F \in (\alpha) \cap (SCD) \end{cases}$, nên giao tuyến của mp$(\alpha)$ với mp(SCD) qua F và song song với CD, giao tuyến này cắt SC tại G.

Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang NEFG, do $NE \parallel FG \parallel CD$.

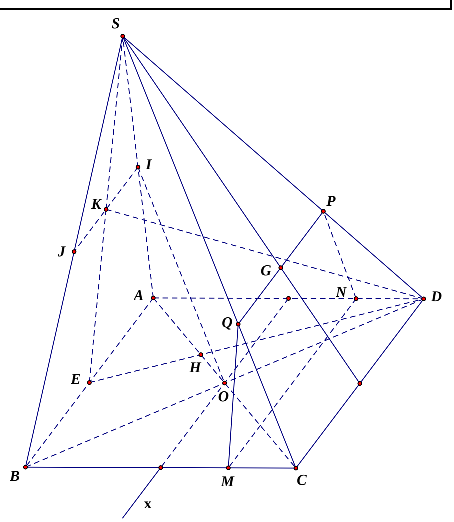
Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm SA, SB, IJ. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của (IJO) và $(ABCD)$.

b) Tìm giao tuyến H của AC và (SDK).

c) Gọi M là điểm thuộc cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua MG và $\parallel$ CD cắt AD, SD, DC lần lượt tại N, P, Q. Xác định các điểm N, P, Q; từ đó suy ra thiết diện của (α) với hình chóp.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} O = (IJO) \cap (ABCD) \\ IJ \parallel AB \\ IJ \subset (IJO); AB \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (IJO) \cap (ABCD) = Ox \parallel IJ \parallel AB$.

b) Trong mp(SAB) gọi $E = SK \cap AB$, trong mp(ABCD) gọi $H = ED \cap AC$, có

$\begin{cases} H \in AC \\ H \in ED \subset (SDK) \end{cases} \Rightarrow H = AC \cap (SDK)$.

c) Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ CD \parallel (\alpha); CD \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \parallel AB, N \in AB \qquad (1).$

Có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SCD) = PQ \\ CD \parallel (\alpha); CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$

(Với PQ qua G và $P \in SD, Q \in SC$) (2).
Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là hình thang MNPQ với $MN \parallel PQ \parallel CD$).