Có $\Delta IAF = \Delta IDE(g.c.g) \Rightarrow IF = IE$

Trong ΔSEF có SI là đường trung tuyến và $\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ G là trọng tâm của ΔSEF.

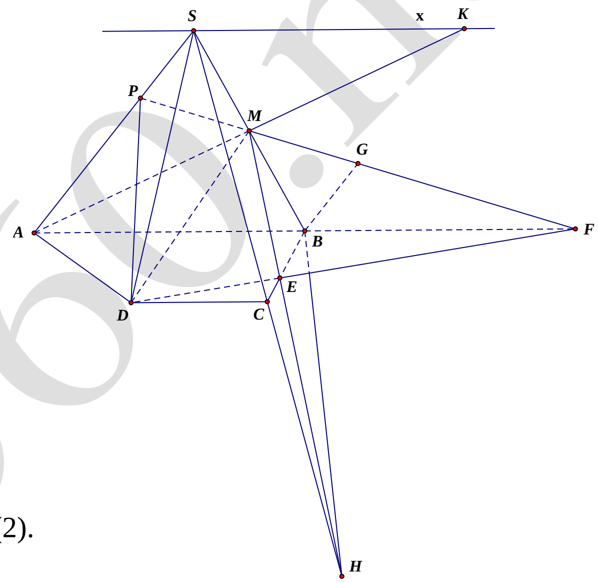
Do đó $\frac{HG}{HE} = \frac{1}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi M là trung điểm cạnh SB và P là điểm thuộc cạnh SA sao cho $AP = 2SP$

a). Tìm giao tuyến K của AM với (SCD)

b). Tìm giao điểm S của BC với (DMP). Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.

LỜI GIẢI



a) Có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$.

Trong mp(SAB) gọi $K = AM \cap Sx$, có

$\begin{cases} K \in AM \\ K \in Sx \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K = AM \cap (SCD)$

b) Có $D \in (DMP) \cap (ABCD)$ (1).

Trong mp(SAB) gọi $F = PM \cap AB$, có

$\begin{cases} F \in AB \subset (ABCD) \\ F \in PM \subset (DMP) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABCD) \cap (DMP)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(ABCD) \cap (DMP) = DF$.

Trong mp(ABCD) gọi $E = BC \cap DF$, có $\begin{cases} E \in BC \\ E \in DF \subset (DMP) \end{cases} \Rightarrow E = BC \cap (DMP)$.

Trong mp(SAB) dựng $BG \parallel SA, G \in FP$. Có $\Delta MBG = \Delta MSP(g.c.g) \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{PS}$

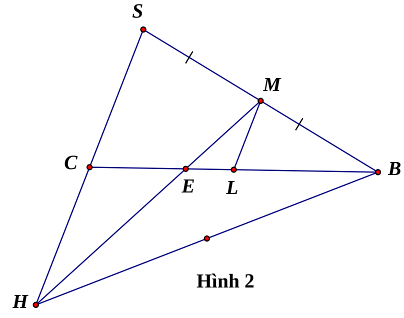
Ngoài ra $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$. Trong ΔAFP có $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} \Rightarrow$ BG là đường trung bình của tam giác này. Do đó B là trung điểm của AF.

Có $\Delta EBF \sim \Delta ECD(g.g) \Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{BF}{CD} = \frac{AB}{CD} = 2$. Kết luận $\frac{EB}{EC} = 2$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác DEMP.

c) Trong mp(SBC) gọi $H = SC \cap ME$, có

$\begin{cases} H \in SC \\ H \in ME \subset (DMP) \end{cases} \Rightarrow H = SC \cap (DMP)$.



Hình 2

Tam giác SBH được vẽ lại ở hình 2. Dựng $ML \parallel SH, L \in BC \Rightarrow L$ trung điểm của BC và $\frac{ML}{SC} = \frac{1}{2}$ (3). Nên $EC = 2EL$. Có

$\Delta EML \sim \Delta EHC \Rightarrow \frac{ML}{HC} = \frac{EL}{EC} = \frac{1}{2}$ (4).

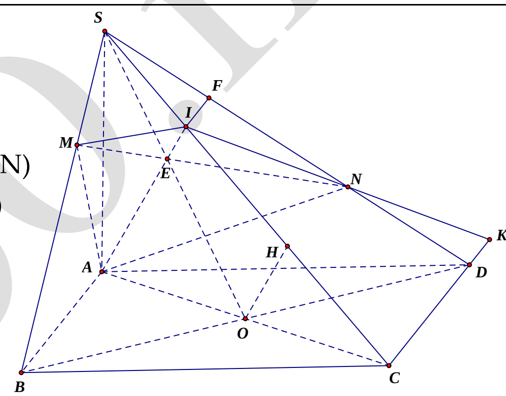
Từ (3) và (4) suy ra $\frac{HC}{HS} = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh SB, SD sao cho: $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{3}, \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$

a) Tìm giao điểm I của SC và CD mặt phẳng (AMN). Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (AMN).

b) Gọi K là giao điểm của IN và CD. Tính tỉ số : $\frac{KC}{KD}$.

LỜI GIẢI



a) Có $(SAC) \cap (SBD) = SO$

Có $A \in (AMN) \cap (SAC)$ (1).

Trong mp(SBD) gọi $E = MN \cap SO$, có $\begin{cases} E \in MN \subset (AMN) \\ E \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

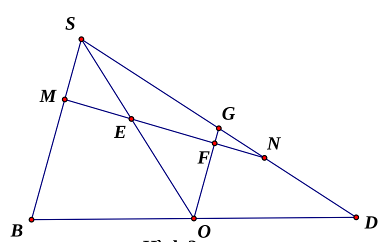
$\Rightarrow E \in (AMN) \cap (SAC)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (SAC) = AE$.

Trong mp(SAC) gọi $I = AE \cap SC$, có $\begin{cases} I \in SC \\ I \in AE \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow I = SC \cap (AMN)$.

Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp S.ABCD bị cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác AMIN.

b) Tam giác ABD được vẽ lại ở hình 2. Qua O dựng đường thẳng d song song với SB, d cắt MN và SD lần lượt tại F và G.



Hình 2

Do đó G là trung điểm SD và $OG = \frac{1}{2}SB$.

Trong ΔNMS có $\frac{NG}{NS} = \frac{FG}{MS} = \frac{1}{4} \Rightarrow FG = \frac{1}{4}SM$

Có $OG = OF + FG \Leftrightarrow \frac{1}{2}SB = OF + \frac{1}{4}SM$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}SM = OF + \frac{1}{4}SM \Rightarrow OF = \frac{5}{4}SM$

Có $\Delta EFO \sim \Delta EMS(g.g) \Rightarrow \frac{EO}{ES} = \frac{FO}{MS} = \frac{5}{4}$.

Trong ΔSAC dựng $OH \parallel AI, H \in SC \Rightarrow$ H trung điểm của CI.

Ngoài ra có $\frac{SI}{IH} = \frac{SE}{EO} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{SI}{IC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Trong ΔSCD dựng $IF \parallel CD, F \in SD$ có $\frac{SI}{IC} = \frac{SF}{FD} = \frac{2}{5}$

Có $SN = \frac{2}{3}SD$ và $SF = \frac{2}{7}SD \Rightarrow \frac{SF}{SN} = \frac{3}{7} \Rightarrow FN = \frac{4}{3}SF = \frac{8}{21}SD$.

Từ đó suy ra $\frac{FN}{ND} = \frac{\frac{8}{21}SD}{\frac{1}{3}SD} = \frac{8}{7}$.

Ngoài ra có $\Delta NFI \sim \Delta NDK(g.g) \Rightarrow \frac{FI}{DK} = \frac{NF}{ND} = \frac{8}{7} \Rightarrow DK = \frac{7}{8}FI$ (*)

Và $\frac{IF}{CD} = \frac{SI}{SC} = \frac{2}{7} \Rightarrow CD = \frac{7}{2}IF$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{CD}{DK} = 4$. Vậy $\frac{KC}{KD} = 5$.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang AB đáy lớn và $AB = 3CD$. Gọi N là trung điểm của CD, M là điểm trên cạnh SB thỏa $SM = 3MB$, điểm I trên cạnh SA và thỏa $AI = 3IS$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mp(SAD).

b) Gọi H là giao điểm của CB với mp(IMN). Tính $\frac{HB}{HC}$.

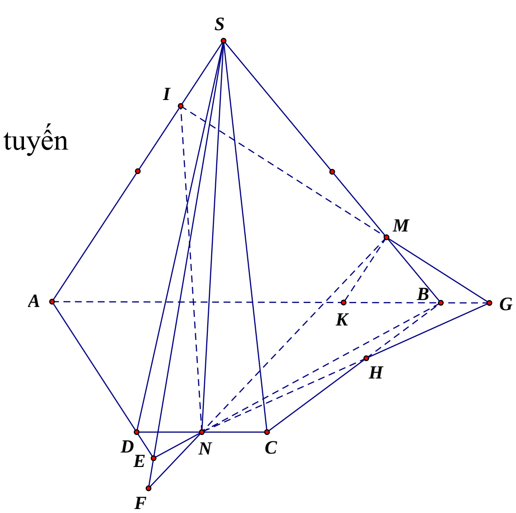
LỜI GIẢI

a) Chọn mp(SBN) chứa MN.

Trong mp(ABCD) gọi $E = AD \cap BN$. Suy ra SE là giao tuyến của (SAD) và (SBN).

Trong mp(SBN) gọi

$F = SE \cap MN \Rightarrow F = MN \cap (SAD)$.



b) Trong mp(SAB) gọi $G = IM \cap AB$. Suy ra NG là giao tuyến của (IMN) và (ABCD).

Trong mp(ABCD) có

$H = NG \cap BC \Rightarrow H = BC \cap (IMN)$.

Trong mp(SAB) dựng $MK \parallel SA$, có

$\frac{BM}{BS} = \frac{BK}{BA} = \frac{MK}{SA} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow AB = 4BK \Rightarrow AK = 3BK$ (1)

và có $\frac{GK}{GA} = \frac{MK}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow GA = 3GK \Rightarrow AK = 2GK$ (2)

Từ (1) và (2) có $3BK = 2GK \Leftrightarrow 3BK = 2GB + 2BK \Leftrightarrow BK = 2GB \Rightarrow GB = \frac{AB}{8}$.

Ta có $\Delta HCN \sim \Delta HBG \Rightarrow \dfrac{HC}{HB} = \dfrac{CN}{BG} = \dfrac{\frac{1}{6}AB}{\frac{1}{8}AB} = \dfrac{4}{3}$.

Câu 9: Cho tứ diện ABCD . Gọi I và K là trung điểm của AB và CD . Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho AD = 3JD.

a) Tìm giao điểm F của IJ và (BCD)

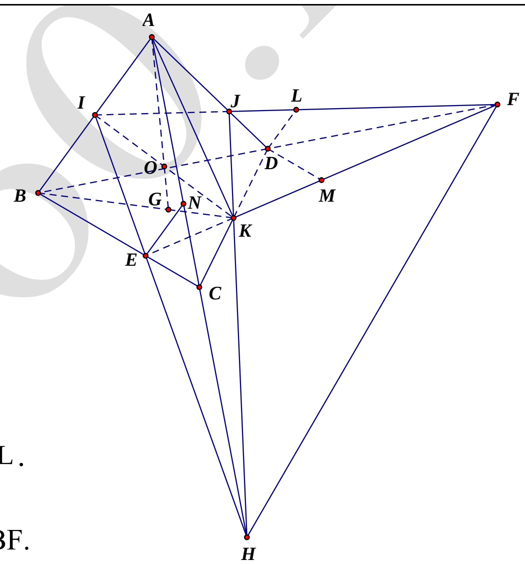
b) Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC. Tính $\dfrac{EB}{EC}$.

c) Chứng minh ba đường thẳng AC , KJ , IE đồng quy tại điểm H. Tính $\dfrac{HC}{HA}$.

d) Chứng minh $EJ \parallel HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF.

e) Gọi O trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh A , O ,G thẳng hàng. Tính $\dfrac{OA}{OG}$.

LỜI GIẢI



a) Trong mp(ABD) gọi $F = IJ \cap BD$ có

$\begin{cases} F \in IJ \\ F \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F = IJ \cap (BCD)$.

b) Trong mp(BCD) gọi $E = JK \cap BC$ có

$\begin{cases} E \in BC \\ E \in FK \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = BC \cap (IJK)$.

Trong mp(ABD) dựng $DL \parallel AB, L \in IJ$,

có $\Delta JAI \sim \Delta JDL(g.g) \Rightarrow \dfrac{AI}{DL} = \dfrac{JA}{JD} = 2 \Rightarrow AI = 2DL$.

Trong ΔBIF có $\overrightarrow{DL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BI} \Rightarrow D$ trung điểm của BF.

Trong mp(BCD) dựng $DM \parallel BC, M \in EF \Rightarrow BE = 2DM$, ngoài ra có $\Delta KDM = \Delta KCE(g.c.g) \Rightarrow CE = DM$. Vậy $\dfrac{EB}{EC} = 2$.

c) Trong mp(IJK) gọi $H = JK \cap IE$, có $\begin{cases} H \in IE \subset (ABC) \\ H \in JK \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (ACD)$. Hay H thuộc giao tuyến AC của mp(ABC) với mp(ACD). Kết luận 3 đường thẳng AC, JK và IE đồng quy tại điểm H.

Trong mp(ABC) dựng $EN \parallel AB, N \in AC$. Trong ΔABC có $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{EN}{AB} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{EN}{AI} = \dfrac{2}{3}$, trong ΔHAI có $\dfrac{HE}{HI} = \dfrac{EN}{AI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow E$ là trọng tâm của ΔABH

$\Rightarrow \frac{HC}{HA} = \frac{1}{2}$.

d) Trong ΔIHF có $\frac{IJ}{IE} = \frac{IE}{IH} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm) $\Rightarrow EJ \parallel EH$ (định lý đảo Talét).

e) Có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}\right)$ (1).

Và $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}\right)$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$.

Kết luận 3 điểm A, O, G thẳng hàng và $\frac{OA}{OG} = 3$.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi M, E là trung điểm SA, AC; $F \in CD$ sao cho $CF = \frac{1}{3}CD$.

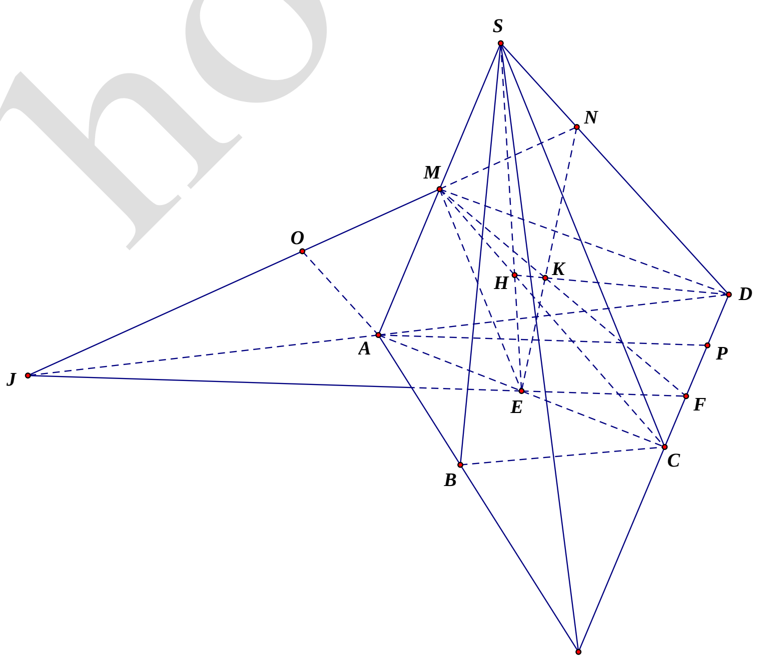
a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .

b) Tìm giao điểm N của SD và (MEF). Tính $\frac{NS}{ND}$

c) Gọi $H = SE \cap CM; K = MF \cap NE$. Chứng minh 3 điểm D, H, K thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số sau: $\frac{HM}{HC}$; $\frac{HS}{HE}$; $\frac{KM}{KF}$; $\frac{KN}{KE}$; $\frac{KH}{KD}$.

LỜI GIẢI



a) Có $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $I = AB \cap CD$, $\begin{cases} I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SI$.

b) Chọn mp(SAD) chứa SD. Tìm giao tuyến của (MEF) và (SAD):

Trong mp(ABCD) gọi $J = AD \cap EF$, $\begin{cases} J \in AD \subset (SAD) \\ J \in EF \subset (MEF) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAD) \cap (MEF)$ (3).

Và $M \in (SAD) \cap (MEF)$ (4).

Từ (1) và (2) suy ra $(SAD) \cap (MEF) = JM$. Điểm N cần tìm là giao điểm của đường thẳng JM và SD.

Gọi P trung điểm của DF, xét ΔCAP có EF là đường trung bình nên $EF \parallel AP$. Xét ΔDJF có AP là đường trung bình nên A trung điểm của DJ.

Trong mp(SAD) dựng $AO \parallel SD, O \in JM$. Có $\Delta MAO = \Delta MSN(g.c.g) \Rightarrow AO = SN$ (5)

Ngoài ra trong ΔJDN, AO là đường trung bình nên $AO = \frac{1}{2}DN$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $\frac{NS}{ND} = \frac{1}{2}$.

c) Có $H = SE \cap CM$ (vì SE, CM $\subset (SAC)$). Vì $\begin{cases} H \in SE \subset (SDE) \\ H \in MC \subset (MCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (SDE) \cap (MCD)$ (7).

Có $K = MF \cap NE$ (vì MF, NE $\subset (MEF)$). Vì $\begin{cases} K \in EN \subset (SDE) \\ K \in MF \subset (MCD) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SDE) \cap (MCD)$ (8).

Và $D \in (SDE) \cap (MCD)$ (9).

Từ (7), (8), (9) suy ra ba điểm H, K, D thẳng hàng.

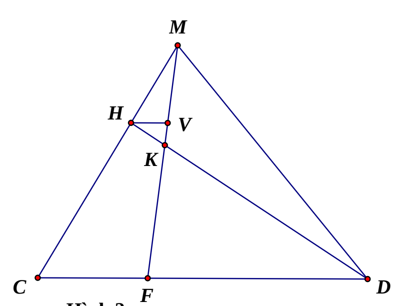
d) Có H là trọng tâm của ΔSAC nên suy ra $\frac{HM}{HC} = \frac{1}{2}$, $\frac{HS}{HE} = 2$.

Theo chứng minh ở câu b) có $\frac{JE}{JE} = \frac{3}{4}$ và $\frac{JM}{JN} = \frac{3}{4}$, do đó $\frac{JE}{JE} = \frac{JM}{JN} \Rightarrow ME \parallel NF$ và $\frac{ME}{NF} = \frac{3}{4}$. Từ đó có $\Delta KEM \sim \Delta KNF(g.g) \Rightarrow \frac{KM}{KF} = \frac{KE}{KN} = \frac{EM}{NF} = \frac{3}{4}$.

Tam giác ΔMCD được vẽ lại ở hình 2. Dựng $HV \parallel CD, V \in MF$, từ đó có:

$\Delta KHV \sim \Delta KDF(g.g) \Rightarrow \frac{KH}{KD} = \frac{HV}{DF}$.

Mà $\frac{HV}{DF} = \frac{\frac{1}{3}CF}{2CF} = \frac{1}{6}$. Kết luận $\frac{KH}{KD} = \frac{1}{6}$.



Hình 2

Câu 11: Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy 3 điểm E, F, G sao cho $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3};\frac{AF}{AC}=\frac{1}{2};\frac{DG}{DB}=\frac{1}{4}$.

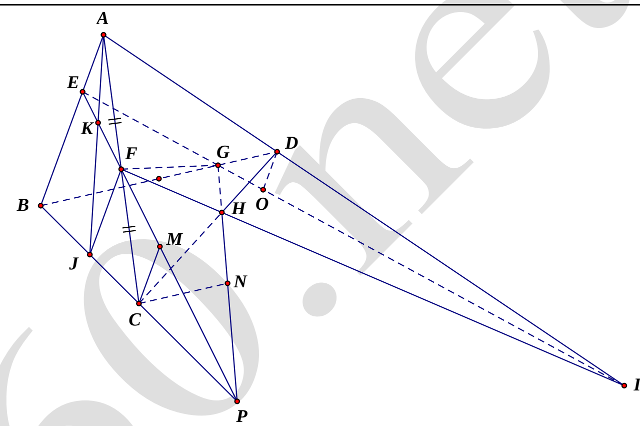
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và mp(BCD).

b) Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với mp(EFG). Tính tỉ số $\frac{HC}{HD}$.

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng AD với mp(EFG). Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.

d) Chứng minh 3 điểm F, H, I thẳng.

e) Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K. Tính tỉ số $\frac{AK}{AJ}$.



LỜI GIẢI

a) Có $\begin{cases} G\in(EFG) \\ G\in BD\subset(BCD)\end{cases}$

$\Rightarrow G\in(EFG)\cap(BCD)\,(1)$

Trong mp(ABC) gọi $P=EF\cap BC$, có

$\begin{cases} P\in EF\subset(EFG) \\ P\in BC\subset(BCD)\end{cases}$

$\Rightarrow P\in(EFG)\cap(BCD)\,(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(EFG)\cap(BCD)=GP$.

b) Trong mp(BCD) gọi $H=GP\cap CD$, có $\begin{cases} H\in CD \\ H\in GP\subset(EFG)\end{cases}\Rightarrow H=CD\cap(EFG)$.

Trong mp(ABC) dựng $CM\parallel AB, M\in PE\Rightarrow \Delta FCM=\Delta FAE(g.c.g)\Rightarrow CM=AE$. Trong ΔBEP có $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}\left(\text{do } \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}\right)$. Vậy CM là đường trung bình của ΔBEP nên C trung điểm của BP.

Trong mp(BCD) dựng $CN\parallel BD, N\in PG\Rightarrow$ CN là đường trung bình của ΔBGP

$\Rightarrow CN=\frac{1}{2}BG$. Ngoài ra $\Delta HCN\sim\Delta HDG(g.g)\Rightarrow \frac{HC}{HD}=\frac{CN}{DG}=\frac{\frac{1}{2}BG}{\frac{1}{3}BG}=\frac{3}{2}$.

Kết luận $\frac{HC}{HD}=\frac{3}{2}$.

c) Trong mp(ABD) gọi $I=AD\cap EG$, có $\begin{cases} I\in AD \\ I\in EG\subset(EFG)\end{cases}\Rightarrow I=AD\cap(EFG)$.

Trong mp(ABD) dựng

$DO\parallel AB, O\in EI\Rightarrow \Delta GDO\sim\Delta GBE(g.g)\Rightarrow \frac{DO}{BE}=\frac{GD}{GB}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{DO}{2AE}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{DO}{AE}=\frac{2}{3}$. Áp dụng định lý Ta lét trong ΔAEI có $\frac{ID}{IA}=\frac{DO}{AE}=\frac{2}{3}$.

Kết luận $\frac{ID}{IA}=\frac{2}{3}$.

d) Ta có 3 điểm F, H, I cùng thuộc cả hai mặt phẳng (EFG) và mp(ACD). Suy ra 3 điểm F, H, I thuộc giao tuyến hai mặt phẳng (EFG) và mp(ACD), nên 3 điểm này thẳng hàng.

e) Có JF là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow JF \parallel AB$ nên $\Delta KJF \sim \Delta KAE(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{KJ}{KA}=\frac{JF}{AE}=\frac{\frac{1}{2}BB}{\frac{1}{3}AB}=\frac{3}{2}$$. Kết luận $\frac{AK}{AJ}=\frac{2}{5}$.